

УДК 539.3

© 2005 г. А.Г. ГОРШКОВ, Д.В. ТАРЛАКОВСКИЙ, А.М. ШУКУРОВ

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ
ИЗ ДВУХ ЭКСЦЕНТРИЧНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
С АКУСТИЧЕСКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Изучается осесимметричная задача о распространении волн в акустической среде, ограниченной двумя эксцентрично расположенными тонкими упругими сферическими оболочками. Она сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в пространстве преобразований Лапласа. Оригиналы искомых функций находятся с помощью вычетов.

Подобные задачи и методы их решений рассмотрены в [1, 2].

1. Постановка задачи. Акустическая среда ограничена двумя эксцентрично расположенными тонкими линейно упругими сферическими оболочками (R_1, R_2 – радиусы внутренней и внешней оболочек). Расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно l ($l < R_2 - R_1$). Введем две сферические системы координат: $r_1, \theta_1, \vartheta_1$ и $r_2, \theta_2, \vartheta_2$ ($0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, -\pi < \vartheta_1, \vartheta_2 \leq \pi$) с центрами в точках O_1 и O_2 соответственно.

В начальный момент времени $\tau = 0$ к поверхности внутренней оболочки приложено нормальное давление $p_s(\tau, \theta_1)$, а внешняя поверхность внешней оболочки свободная.

С учетом осевой симметрии возмущенное движение акустической среды удовлетворяет следующему волновому уравнению относительно потенциала скоростей ϕ (здесь и далее точками обозначено дифференцирование по времени τ):

$$\ddot{\phi} = \Delta\phi, \quad \Delta = \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(r_i^2 \frac{\partial}{\partial r_i} \right) + \frac{1}{r_i^2 \sin^2 \theta_i} \left(\sin \theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

При этом давление p и радиальная составляющая скорости v_i в соответствующей системе координат связаны с потенциалом так

$$p = -\dot{\phi}, \quad v_i = \partial\phi/\partial r_i \quad (1.2)$$

Уравнения осесимметричных колебаний сферических оболочек записываем в матричном виде

$$\gamma_1^2 \ddot{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{U}_1) + \alpha_0^{(1)}(\mathbf{P}_s - \mathbf{P}_1) \quad (1.3)$$

$$\gamma_2^2 \ddot{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{U}_2) + \alpha_0^{(2)} \mathbf{P}_2 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{U}_i = \|u_i, w_i, \Phi_i\|^T, \quad \mathbf{P}_i = \|0, p_i, 0\|^T, \quad \mathbf{P}_s = \|0, p_s, 0\|^T, \quad \mathbf{L}^{(i)} = \|L_{mk}^{(i)}\|_{3 \times 3} \quad (1.5)$$

$$\beta_i p_i = -\dot{\phi}|_{r_i=R_i} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь индекс $i = 1$ соответствует внутренней, а $i = 2$ – внешней оболочкам; $\mathbf{L}^{(i)}$ – матрицы с элементами в виде дифференциальных операторов $L_{mk}^{(i)}$ (выражения для них,

а также для коэффициентов $\alpha_0^{(i)}$ приведены в [3]); w_i и u_i – нормальные и тангенциальные перемещения; Φ_i – углы поворота нормального к срединным поверхностям оболочек волокна; p_i – контактные давления на поверхностях оболочек (при $r_i = R_i$); индекс “Т” обозначает операцию транспонирования.

На границах контакта оболочек и акустической среды выполняется условие “непротекания”, которое с учетом (1.2) имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \right|_{r_i = R_i} = \dot{w}_i \quad (1.6)$$

В начальный момент времени вся система находится в покое

$$\Phi|_{\tau=0} = \dot{\Phi}|_{\tau=0} = u_i|_{\tau=0} = \dot{u}_i|_{\tau=0} = w_i|_{\tau=0} = \dot{w}_i|_{\tau=0} = \Phi_i|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_i|_{\tau=0} = 0 \quad (1.7)$$

В приведенной начально-краевой задаче (1.1) – (1.7) и далее использованы следующие безразмерные величины (штрих указывает на размерные величины):

$$r_i = \frac{r'_i}{b}, \quad R_i = \frac{R'_i}{b}, \quad \tau = \frac{ct}{b}, \quad u_i = \frac{u'_i}{b}, \quad w_i = \frac{w'_i}{b}, \quad p = \frac{p'}{\rho c^2}, \quad p_i = \frac{p'_i}{E_i}, \quad p_s = \frac{p'_s}{E_1}$$

$$\gamma_i = \frac{c}{c_i}, \quad \beta_i = \frac{E_i}{\rho c^2}, \quad c_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i(1-\nu_i^2)}}$$

где b – некоторый характерный линейный размер; t – время; ρ и c – плотность и скорость звука в акустической среде; ρ_i , E_i и ν_i – плотности, модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов оболочек.

2. Метод решения. Используем метод неполного разделения переменных в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа по времени τ (s – параметр преобразования, значок L обозначает трансформанту). С этой целью в пространстве изображений контактные p_i и заданное p_s давления, а также искомые функции представляем в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta_i)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_i)$:

$$\left\| \begin{matrix} p_i^L \\ w_i^L \\ \Phi_i^L \end{matrix} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \begin{matrix} P_{in}^L(r_i, s) \\ w_{in}^L(r_i, s) \\ \Phi_{in}^L(r_i, s) \end{matrix} \right\| P_n(\cos\theta_i), \quad \left\| \begin{matrix} u_i^L \\ \Phi_i^L \end{matrix} \right\| = -\sin\theta_i \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \begin{matrix} u_{in}^L(r_i, s) \\ \Phi_{in}^L(r_i, s) \end{matrix} \right\| C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_i) \quad (2.1)$$

$$\left\| p_s^L \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| p_{sn}^L(r_1, s) \right\| P_n(\cos\theta_1) \quad (i = 1, 2)$$

Тогда из (1.3)–(1.6) с учетом начальных условий (1.7) получаем следующие соотношения для коэффициентов рядов (2.1):

$$\gamma_1^2 s^2 \mathbf{U}_{1n}^L = \mathbf{I}_n^{(1)} \mathbf{U}_{1n}^L + \alpha_0^{(1)} (\mathbf{P}_{sn}^L - \mathbf{P}_{1n}^L) \quad (2.2)$$

$$\gamma_2^2 s^2 \mathbf{U}_{2n}^L = \mathbf{I}_n^{(2)} \mathbf{U}_{2n}^L + \alpha_0^{(2)} \mathbf{P}_{2n}^L \quad (2.3)$$

$$\beta_i p_{in}^L = -s \Phi_{in}^L \Big|_{r_i = R_i} \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_{in}^L}{\partial r_i} \right|_{r_i=R_i} = s w_{in}^L \quad (2.5)$$

$$\mathbf{U}_{in}^L = \|u_{in}^L, w_{in}^L, \Phi_{in}^L\|^T, \quad \mathbf{P}_{in}^L = \|0, p_{in}^L, 0\|^T, \quad \mathbf{P}_{sn}^L = \|0, p_{sn}^L, 0\|^T, \quad \mathbf{I}_n^{(i)} = \|l_{mkn}^{(i)}\|_{3 \times 3}$$

Выражения для элементов матриц $\mathbf{I}_n^{(i)}$ приведены в [3].

Для обеспечения граничных условий (1.6) решение волнового уравнения (1.1) в пространстве изображений записываем в виде суммы двух рядов

$$\varphi^L = \sqrt{\frac{2s}{\pi r_1}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^L(s) K_{n+1/2}(r_1 s) P_n(\cos \theta_1) + \sqrt{\frac{2\pi s}{r_2}} \sum_{p=0}^{\infty} B_p^L(s) I_{p+1/2}(r_2 s) P_p(\cos \theta_2) \quad (2.6)$$

где $K_{n+1/2}(x)$ и $I_{p+1/2}(x)$ – модифицированные функции Бесселя, $A_n^L(s)$ и $B_n^L(s)$ – неизвестные функции параметра s .

Используя теорему сложения для модифицированных функций полуцелого индекса [4] и их связь с элементарными функциями (в том числе, с многочленами $R_{n0}(s)$ степени n [3]), из (2.1) и (2.6) получаем следующие выражения для коэффициентов φ_{in}^L :

$$\varphi_{1n}^L(r_1, s) = \frac{1}{r_1^{n+1} s^n} \left[R_{n0}(r_1 s) A_n^L(s) e^{-r_1 s} + G_{n0}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} D_{np}(s) B_p^L(s) \right] \quad (2.7)$$

$$\varphi_{2n}^L(r_2, s) = \frac{1}{r_2^{n+1} s^n} \left[(-1)^n G_{n0}(r_2 s) B_n^L(s) + e^{-r_2 s} R_{n0}(r_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} D_{np}(s) A_p^L(s) \right]$$

$$D_{np}(s) = C_{np}^{(1)}(s) e^{ls} - C_{np}^{(2)}(s) e^{-ls}$$

$$C_{np}^{(i)}(s) = \frac{2n+1}{2ls} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0, p0)} \frac{(-1)^{\sigma}}{(ls)^{\sigma}} R_{\sigma 0} [(-1)^i l s]$$

где $b_{\sigma}^{(n0, p0)}$ – коэффициенты Клебша–Гордона [4].

Решая системы уравнений (2.2) и (2.3), находим

$$w_{1n}^L(s) = \alpha_0^{(1)} \frac{\tilde{\Delta}_{1n}(s)}{\Delta_{1n}^L(s)} [p_{sn}^L(s) - p_{1n}^L(s)], \quad w_{2n}^L(s) = \alpha_0^{(2)} \frac{\tilde{\Delta}_{2n}(s)}{\Delta_{2n}^L(s)} p_{2n}^L(s) \quad (2.8)$$

$$\tilde{\Delta}_{i0} = 1, \quad \Delta_{i0} = \gamma_i^2 s^2 - l_{220}^{(i)}$$

$$\tilde{\Delta}_{in} = [\gamma_i^2 s^2 - l_{11n}^{(i)}][\gamma_i^2 s^2 - l_{33n}^{(i)}] - l_{13n}^{(i)} l_{31n}^{(i)}$$

$$\Delta_{in} = [\gamma_i^2 s^2 - l_{11n}^{(i)}][\gamma_i^2 s^2 - l_{22n}^{(i)}][\gamma_i^2 s^2 - l_{33n}^{(i)}] - l_{12n}^{(i)} l_{23n}^{(i)} l_{31n}^{(i)} - l_{13n}^{(i)} l_{21n}^{(i)} l_{32n}^{(i)} - [\gamma_i^2 s^2 - l_{22n}^{(i)}] l_{13n}^{(i)} l_{31n}^{(i)} - [\gamma_i^2 s^2 - l_{11n}^{(i)}] l_{23n}^{(i)} l_{32n}^{(i)} - [\gamma_i^2 s^2 - l_{33n}^{(i)}] l_{12n}^{(i)} l_{21n}^{(i)} \quad (n \geq 1)$$

Подставляя далее равенства (2.7) и (2.8) с учетом (2.4) в граничные условия (2.5), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно бесконечных столбцов $\mathbf{A} = \|A_0^L(s), A_1^L(s), \dots\|^T$ и $\mathbf{B} = \|B_0^L(s), B_1^L(s), \dots\|^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{v}^2\mathbf{z} + \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{B} - \mathbf{T}^{(2)}\mathbf{B}\mathbf{v}^2 - \mathbf{T}^{(3)}\mathbf{B}\mathbf{z}^2 + \mathbf{T}^{(4)}\mathbf{B}\mathbf{v}^2\mathbf{z}^2 &= \mathbf{k}\mathbf{v}\mathbf{z} \\ \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{B}\mathbf{z} - \mathbf{L}^{(2)}\mathbf{B}\mathbf{x}^2\mathbf{z} + \mathbf{F}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{x}^2 - \mathbf{F}^{(2)}\mathbf{A}\mathbf{x}^2\mathbf{z}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$x = e^{-R_2s}, \quad v = e^{-R_1s}, \quad z = e^{-ls}$$

Здесь $\mathbf{T}^{(i)}$, $\mathbf{F}^{(k)}$ – матрицы, \mathbf{M} , $\mathbf{L}^{(k)}$ – диагональные матрицы, \mathbf{k} – столбец, соответственно с элементами $T_{np}^{(i)}$, $F_{np}^{(k)}$, $M_n(s)$, $L_n^{(k)}(s)$ ($i=1-4$, $k=1, 2$), $k_n(s)$, которые имеют вид:

$$M_n(s) = R_1s^2\tilde{\Delta}_{1n}(s)R_{n0}(R_1s) + \frac{\beta_1}{\alpha_0^{(1)}}\Delta_{1n}(s)R_{n1}(R_1s) \quad (2.10)$$

$$T_{np}^{(1)}(s) = M_n(-s)C_{np}^{(1)}(s), \quad T_{np}^{(2)}(s) = M_n(s)C_{np}^{(1)}(s)$$

$$T_{np}^{(3)}(s) = M_n(-s)C_{np}^{(2)}(s), \quad T_{np}^{(4)}(s) = M_n(s)C_{np}^{(2)}(s)$$

$$k_n(s) = -\beta_1R_1^{n+2}s^{n+1}\tilde{\Delta}_{1np}L_{sn}(s)$$

$$L_n^{(1)}(s) = (-1)^n\tilde{M}_n(-s), \quad L_n^{(2)}(s) = (-1)^n\tilde{M}_n(s)$$

$$F_{np}^{(1)}(s) = \tilde{M}_n(-s)C_{np}^{(1)}(s), \quad F_{np}^{(2)}(s) = \tilde{M}_n(s)C_{np}^{(2)}(s)$$

$$\tilde{M}_n(s) = R_2s^2\tilde{\Delta}_{2n}(s)R_{n0}(R_2s) + \frac{\beta_2}{\alpha_0^{(2)}}\Delta_{2n}(s)R_{n1}(R_2s)$$

где $R_{n1}(s)$ – многочлен степени $(n+1)$ [3].

Решение системы уравнений (2.9) представляем в форме рядов по экспонентам

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix} \right\| &= \sum_{i,k,m=0}^{\infty} \left[\left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_{ikm}^{(1)}(s) \\ \mathbf{b}_{ikm}^{(1)}(s) \end{matrix} \right\| z^m + \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_{ikm}^{(2)}(s) \\ \mathbf{b}_{ikm}^{(2)}(s) \end{matrix} \right\| z^{-m-1} \right] x^i v^{-n-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\mathbf{a}_{ikm}^{(l)}(s)$ и $\mathbf{b}_{ikm}^{(l)}(s)$ – неизвестные бесконечные векторы с элементами $a_{ikm}^{(l,n)}(s)$, $b_{ikm}^{(l,n)}(s)$ ($l=1, 2$, $n=0, 1, 2, \dots$).

Подставляя (2.11) в уравнения (2.9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменных x , v и z , получаем рекуррентные соотношения относительно коэффициентов $a_{ikm}^{(l,n)}(s)$, $b_{ikm}^{(l,n)}(s)$:

$$a_{000}^{(1,n)}(s) = k_n(s)/M_n(s), \quad a_{ikm}^{(1,n)}(s) = 0, \quad (i=0, 1, k \geq 0, m \geq 1) \quad (2.12)$$

$$a_{ikm}^{(2,n)}(s) = 0, \quad b_{ikm}^{(1,n)}(s) = 0, \quad b_{ikm}^{(2,n)}(s) = 0 \quad (i=0, 1, k \geq 0, m \geq 0)$$

$$b_{ik0}^{(1,n)}(s) = \frac{L_n^{(2)}(s)}{L_n^{(1)}(s)} \left\{ b_{i-2,k0}^{(1,n)}(s) - (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)a_{i-2,k1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)a_{i-2,k0}^{(2,p)}(s)] \right\}$$

$$b_{ik0}^{(2,n)}(s) = \frac{L_n^{(2)}(s)}{L_n^{(1)}(s)} \left\{ b_{i-2,k0}^{(2,n)}(s) - (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)a_{i-2,k0}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)a_{i-2,k1}^{(2,p)}(s)] \right\}$$

$$(i \geq 2, k \geq 0)$$

$$b_{ikm}^{(1,n)}(s) = \frac{L_n^{(2)}(s)}{L_n^{(1)}(s)} \left\{ b_{i-2,km}^{(1,n)}(s) - (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)a_{i-2,k,m+1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)a_{i-2,k,m-1}^{(2,p)}(s)] \right\}$$

$$b_{ikm}^{(2,n)}(s) = \frac{L_n^{(2)}(s)}{L_n^{(1)}(s)} \left\{ b_{i-2,km}^{(2,n)}(s) - (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)a_{i-2,k,m-1}^{(2,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)a_{i-2,k,m+1}^{(1,p)}(s)] \right\}$$

$$(i \geq 2, k \geq 0, m \geq 1)$$

$$a_{ik0}^{(1,n)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{i,k,1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{i,k,0}^{(2,p)}(s)]$$

$$a_{ik0}^{(2,n)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{ik0}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{ik1}^{(2,p)}(s)] \quad (i \geq 2, k = 0, 1)$$

$$a_{ik0}^{(1,n)}(s) = -\frac{M_n(-s)}{M_n(s)} \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{i,k-2,1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{i,k-2,0}^{(2,p)}(s)] +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{ik1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{ik0}^{(2,p)}(s)]$$

$$a_{ik0}^{(2,n)}(s) = -\frac{M_n(-s)}{M_n(s)} \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{i,k-2,0}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{i,k-2,1}^{(2,p)}(s)] +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{ik0}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{ik1}^{(2,p)}(s)] \quad (i \geq 2, k \geq 2)$$

$$a_{ikm}^{(1,n)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{ik,m+1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{ik,m-1}^{(2,p)}(s)]$$

$$a_{ikm}^{(2,n)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{ik,m-1}^{(2,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{ik,m+1}^{(1,p)}(s)] \quad (i \geq 2, k = 0, 1, m \geq 1)$$

$$a_{ikm}^{(1,n)}(s) = -\frac{M_n(-s)}{M_n(s)} \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{i,k-2,m+1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{i,k-2,m-1}^{(2,p)}(s)] +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{ik,m+1}^{(1,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{ik,m-1}^{(2,p)}(s)]$$

$$a_{ikm}^{(2,n)}(s) = -\frac{M_n(-s)}{M_n(s)} \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{i,k-2,m-i}^{(2,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{i,k-2,m+i}^{(2,p)}(s)] +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} [C_{np}^{(1)}(s)b_{ik,m-i}^{(2,p)}(s) - C_{np}^{(2)}(s)b_{ik,m+i}^{(2,p)}(s)] \quad (i \geq 2, k \geq 2, m \geq 1)$$

Подстановка рядов (2.11) в (2.6), а затем в (2.4) и (2.5) дает формулы для коэффициентов разложений в ряды для изображений потенциала, контактных давлений и радиальных перемещений. Например, на границе второй оболочки имеют место равенства

$$p_{2n}^L(s) = -\frac{1}{R_2^{n+1} s^n} \sum_{i,k,m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n G_{n0}(R_2 s) [b_{ikm}^{(1,n)}(s)z^m + b_{ikm}^{(2,n)}(s)z^{-m-1}] + \right.$$

$$+ R_{n0}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{m-1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{-m-2}] x -$$

$$\left. - R_{n0}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{m+1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{-m}] x \right\} x^i v^{-k-1} \quad (2.13)$$

$$w_{2n}^L(s) = -\frac{1}{R_2^{n+2} s^n} \sum_{i,k,m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n G_{n1}(R_2 s) [b_{ikm}^{(1,n)}(s)z^m + b_{ikm}^{(2,n)}(s)z^{-m-1}] + \right.$$

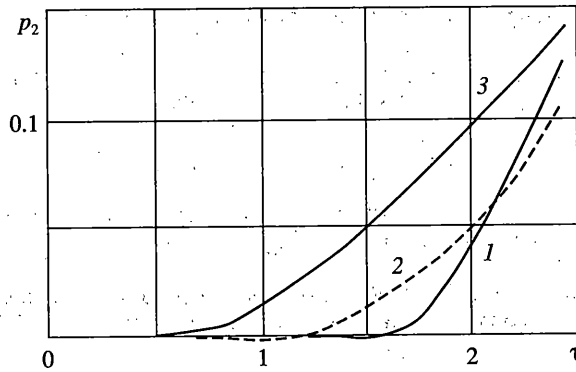
$$+ R_{n1}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{m-1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{-m-2}] x -$$

$$\left. - R_{n1}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{m+1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s)z^{-m}] x \right\} x^i v^{-k-1}$$

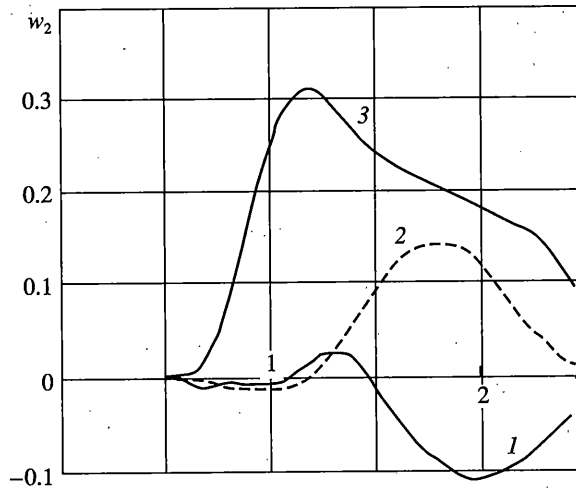
где $G_{n0}(s)$ и $G_{n1}(s)$ – многочлены, выражающиеся через $R_{n0}(s)$ и $R_{n1}(s)$.

Анализ рекуррентных соотношений (2.12) показывает, что коэффициенты $a_{ikm}^{(l,n)}(s)$ и $b_{ikm}^{(l,n)}(s)$ с точностью до множителя $p_{sn}^L(s)$ являются суммами произведений рациональных и экспоненциальных функций параметра преобразования s . Соответственно такой же вид имеют и изображения коэффициентов рядов по углу всех искомым функций. Это позволяет проводить вычисление их оригиналов в явном виде с использованием вычетов. Замыкает алгоритм суммирование рядов (2.1).

3. Пример. Результаты расчетов для давления вида $p_s(\tau, \theta_1) = H(\tau)$ приведены на фиг. 1, 2. Геометрия задачи следующая: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ и $l = 0.5$. За акустическую среду принята вода ($c_0 = 1500$ м/сек, $\rho_0 = 1000$ кг/м³), а материал обеих оболочек сталь ($E_i = 2.01 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_i = 0.3$, $\rho_i = 7800$ кг/м³ ($i = 1, 2$)), что соответствует безразмерным параметрам: $\beta_i = 89.3495$, $\gamma_i = 0.282$, $\alpha_0^{(i)} = 91.0$, $\alpha_1^{(i)} = 0.601$, $\alpha_2^{(i)} = 1.601$, $\alpha_3^{(i)} = 2.6$,



Фиг. 1



Фиг. 2

$\alpha_4^{(i)} = 361.2$, $\alpha_5^{(i)} = 361.5$, $\alpha_6^{(i)} = 30.1$, $\alpha_7^{(i)} = 0.301$ (последние семь величин входят в формулы для элементов матриц $l_{mkn}^{(i)}$ в (2.5)).

На фиг. 1, 2 представлены графики изменения во времени соответственно контактного давления p_2 и радиального перемещения w_2 внешней оболочки в следующих точках: $\theta_2 = 0$ (кривая 1), $\theta_2 = \pi/2$ (кривая 2) и $\theta_2 = \pi$ (кривая 3). В расчетах удерживалось четыре члена ряда в разложениях по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, так как учет большего числа членов дает незначительное уточнение результатов.

4. Заключение. С помощью метода неполного разделения переменных, преобразования Лапласа по времени и разложения в ряды по экспонентам построено аналитическое решение нестационарной осесимметричной задачи о распространении волн в акустической среде, ограниченной эксцентричными тонкими упругими сферическими оболочками. Изображения коэффициентов рядов являются рациональными функция-

ми параметра преобразования, что позволяет находить их оригиналы с помощью вычетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-96658, 04-01-81006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Нестационарные колебания упругой среды, ограниченной двумя эксцентричными сферическими поверхностями // ПММ. 1994. Т. 58. № 2. С. 85–92.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Нестационарные колебания двух тонких упругих сферических оболочек в акустическом пространстве // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 128–133.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
4. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

Москва, Карши

Поступила в редакцию
27.05.2005