

УДК 539.3

© 2005 г. Н.В. БОЕВ

## РАССЕЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕВЫПУКЛОЙ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ

Классическая задача рассеяния высокочастотной волны от точечного источника, находящегося в упругой среде на произвольной гладкой невыпуклой граничной свободной поверхности упругого тела, исследована с учетом возможных переотражений. Исследование основано на оценке кратных дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы. В замкнутом виде получены выражения главного члена асимптотики для амплитуд перемещений в отраженных волнах при различных возможных комбинациях отражения и трансформации продольных и поперечных волн на невыпуклых участках граничной поверхности.

**1. Введение.** В случае однократного отражения упругих волн, решение задачи в двумерном случае получено в [1]. В трехмерном случае в [2, 3] найдено коротковолновое приближение в замкнутом виде для давления в акустической волне при ее однократном отражении от произвольной гладкой поверхности. В [3] для давления в высокочастотной акустической волне в случае произвольного числа ее переотражений ( $N$  раз) от поверхности получено выражение через определитель  $2N$  порядка симметричной матрицы ленточной структуры.

В настоящей работе развивается метод [3] для исследования рассеяния высокочастотных волн на граничной неплоской поверхности упругой среды с учетом возможных переотражений.

Разрабатываемый метод основан на асимптотической оценке дифракционных интегралов методом многомерной стационарной фазы. При этом, как и в классической геометрической теории дифракции, разработанной в задачах скалярной акустики [4] и развитой затем в задачах динамической теории упругости [5], следует различать высокочастотную асимптотику в локальном и глобальном смысле. Асимптотическое решение, построенное ниже, имеет локальный характер и дает главный асимптотический член амплитуды дифрагированного поля в малой окрестности любого луча, вышедшего из точки  $x_0$ , отразившегося от поверхности в точке  $y^*$  и пришедшего в точку  $x$ . Очевидно, что такие лучи могут существовать только в том случае, если обе точки  $y^*$  и  $x$  лежат в освещенной области. Это замечание, справедливое для однократного отражения, остается справедливым и при произвольном  $N$  числе переотражений: все точки отражения  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$ , а также точка приема  $x$  должны лежать в области "света".

**2. Постановка задачи.** Пусть из точки  $x_0$  бесконечной упругой среды на граничную поверхность находящейся в ней полости падает сферическая монохроматическая высокочастотная волна. Волна порождается сосредоточенной в точке  $x_0$  силой  $Qe^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — частота колебаний. При этом перемещения в точке  $y$  упругого пространства определяются матрицей Купрадза [6]:

$$U_j^{(k)}(y, x_0) = U_{jp}^{(k)}(y, x_0) + U_{js}^{(k)}(y, x_0) \quad (k, j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

$$U_{jp}^{(k)}(y, x_0) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left( \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} \right), \quad R_0 = |x_0 - y|$$

$$U_{js}^{(k)}(y, x_0) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[ k_s^2 \delta_{kj} \left( \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} \left( \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} \right) \right]$$

$$k_p = \omega/c_p, \quad k_s = \omega/c_s$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Лямэ,  $c_p, c_s$  – волновые числа и скорости продольной и поперечной волн,  $\delta_{kj}$  – символы Кронекера.

Целью работы является исследование амплитудных характеристик рассеянного поля на поверхности полости или поверхностях системы полостей, свободных от напряжений.

**3. Метод решения.** Зависимость характеристик задачи от времени монохроматическая, в частности, для перемещений в упругой среде она имеет вид  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \text{Re}[\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)\exp(-i\omega t)]$ .

Матрица Купрадце определяет в точке  $y$  в радиальном направлении  $\mathbf{q} = \mathbf{x}_0 y / |\mathbf{x}_0 y|$  ненулевые перемещения в продольной ( $p$ ) и поперечной ( $s$ )-волнах:

$$\mathbf{u}_q^{(p)}(y) = Q_q \mathbf{q} \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \left( 1 + i \frac{2}{k_p R_0} - \frac{2}{(k_p R_0)^2} \right) \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0}, \quad Q_q = (Q, \mathbf{q}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_{q_1}^{(s)}(y) = Q_{q_1} \mathbf{q}_1 \frac{k_s^2}{4\pi\rho\omega^2} \left( 1 - i \frac{1}{k_s R_0} - \frac{1}{(k_s R_0)^2} \right) \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0}, \quad Q_{q_1} = (Q, \mathbf{q}_1) \quad (3.2)$$

Тангенциальное направление  $\mathbf{q}_1$  перпендикулярно  $\mathbf{q}$ ;  $Q_q$  и  $Q_{q_1}$  – проекции силы  $Q$  на направления  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}_1$ .

Вектор  $\mathbf{q} = \{-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma\}$  – направление падения продольной  $p$ -волны (3.1) и поперечной волны (3.2), а вектор имеет координаты  $\mathbf{q}_1 = \{-\text{ctg}\gamma \cos\alpha, -\text{ctg}\gamma \cos\beta, \sin\gamma\}$ . Координаты векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}_1$  заданы в локальной декартовой системе координат, определяемой нормалью и касательными к линиям кривизны поверхности в точке зеркального отражения  $y^*$ .

В высокочастотном режиме колебаний при  $k_p \rightarrow \infty$  и  $k_s \rightarrow \infty$  в направлениях  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}_1$  имеем асимптотические представления перемещений в падающей волне

$$\mathbf{u}_q^{(p)}(y) = Q_q \mathbf{q} \frac{k_p^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R_0}}{R_0} [1 + O(k_p^{-1})] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_{q_1}^{(s)}(y) = Q_{q_1} \mathbf{q}_1 \frac{k_s^2}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_s R_0}}{R_0} [1 + O(k_s^{-1})] \quad (3.4)$$

Компоненты вектора перемещений в отраженной от свободной граничной поверхности  $S$  волне в точке  $x$  упругой среды определяются следующим интегралом [6]:

$$u_k(x) = \iint_S \mathbf{T}_y[\mathbf{U}^{(k)}(y, x)] \cdot \mathbf{u}(y) dS_y \quad (3.5)$$

$$\mathbf{T}_y[\mathbf{U}^{(k)}(y, x)] = 2\mu \frac{\partial \mathbf{U}^{(k)}}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div}(\mathbf{U}^{(k)}) + \mu(\mathbf{n} \times \operatorname{rot}(\mathbf{U}^{(k)})). \quad (3.6)$$

где матрица Купрадце  $\mathbf{U}^{(k)}(y, x)$  получается из матрицы  $\mathbf{U}^{(k)}(y, x_0)$  (2.1) заменой  $x_0$  на  $x$  и  $R_0$  на  $R = |y - x|$ ;  $\mathbf{T}_y$  – вектор силы (3.6) в точке  $y$ ;  $\mathbf{u}(y)$  – вектор полного поля перемещений на граничной поверхности,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности  $S$  в точке  $y$ .

Выделим в векторах полного перемещения на граничной поверхности и в векторе  $\mathbf{T}_y$  силы в точке  $y$  слагаемые, определяемые продольной ( $p$ ) и поперечной ( $s$ ) волнами.

$$u_k(x) = \iint_S \{ \mathbf{T}_y[\mathbf{U}_p^{(k)}(y, x)] + \mathbf{T}_y[\mathbf{U}_s^{(k)}(y, x)] \} \cdot [\mathbf{u}(y; p) + \mathbf{u}(y; s)] dS_y \quad (3.7)$$

$$u_k(x) = \iint_S \mathbf{T}_y[\mathbf{U}_p^{(k)}(y, x)] \cdot \mathbf{u}(y; p) dS_y + \iint_S \mathbf{T}_y[\mathbf{U}_s^{(k)}(y, x)] \cdot \mathbf{u}(y; p) dS_y + \quad (3.8)$$

$$+ \iint_S \mathbf{T}_y[\mathbf{U}_p^{(k)}(y, x)] \cdot \mathbf{u}(y; s) dS_y + \iint_S \mathbf{T}_y[\mathbf{U}_s^{(k)}(y, x)] \cdot \mathbf{u}(y; s) dS_y,$$

В представлениях (3.7) и (3.8)  $\mathbf{u}(y; p)$  – вектор полного перемещения на границе  $S$ , сформированный при падении продольной волны на границу  $S$ ;  $\mathbf{u}(y; s)$  – вектор полного перемещения на границе  $S$ , сформированный при падении поперечной волны на границу  $S$ .

Первое и последнее слагаемые в (3.8) описывают  $p$ - $p$  и  $s$ - $s$  – отражения, а второе и третье  $p$ - $s$  и  $s$ - $p$  – трансформации. В высокочастотном режиме колебаний исследуем дифракцию упругих волн на свободной граничной поверхности упругого тела.

**3.1. Однократное отражение.** Рассмотрим вначале однократное отражение продольной волны в продольную ( $p$ - $p$  – отражение) и трансформацию продольной волны в поперечную ( $p$ - $s$  – трансформация).

Если из точки  $x_0$  упругой среды на ее граничную поверхность падает сферическая высокочастотная волна, то известно, что амплитуда отраженной высокочастотной волны в точке  $x$  определяется направлением падения волны и малой окрестностью  $S^*$  точки зеркального отражения  $y^*$  граничной поверхности. Поэтому с ростом частоты амплитуда отраженного сигнала может быть получена в рамках лучевых представлений.

В дальнейшем получим главный член высокочастотной асимптотики для выражений (3.5). Отнесем малую окрестность точки  $y^* \in S^*$  к правой декартовой системе координат  $OX_1X_2X_3$ , определяемой единичной нормалью и касательными к линиям кривизны поверхности в точке  $y^* \in S^*$ . В выбранной системе координат единичная нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности в точке  $y^*$  имеет координаты  $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ .

Остановимся вначале на  $p$ - $p$  – отражении. Выпишем в этом случае координаты вектора перемещений в отраженной  $p$  – волне  $u_k^{(p)}(x)$ , определяемым первым слагаемым выражения (3.8), в развернутом виде

$$u_k^{(p)}(x) = \iint_{S^*} \left[ \mu \sum_{m=1}^2 \left( \frac{\partial U_{mp}^{(k)}}{\partial y_3} + \frac{\partial U_{3p}^{(k)}}{\partial y_m} \right) u_m(y; p) + \right. \quad (3.9)$$

$$\left. + \left( 2\mu \frac{\partial U_{3p}^{(k)}}{\partial y_3} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{U}_p^{(k)} \right) u_3(y; p) \right] dS_y$$

При оценке дифракционных интегралов (3.9) все приводимые формулы понимаются в асимптотическом смысле при высоких частотах колебаний.

Для асимптотической оценки при  $k_p \rightarrow \infty$  интеграла (3.9) используем асимптотические представления при  $k_p \rightarrow \infty$

$$\operatorname{div} \overline{U}_p^{(k)}(y, x) = i \frac{k_p^3}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R}}{R} \frac{\partial R}{\partial y_k} [1 + O(k_p^{-1})] \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial U_{jp}^{(k)}}{\partial y_m} = i \frac{k_p^3}{4\pi\rho\omega^2} \frac{e^{ik_p R}}{R} \frac{\partial R}{\partial y_m} \frac{\partial R}{\partial y_k} \frac{\partial R}{\partial y_j} [1 + O(k_p^{-1})] \quad (k, j, m = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

$$y(y_1, y_2, y_3), \quad x(x_1, x_2, x_3), \quad y \in S$$

$$\frac{\partial R}{\partial y_1} = \frac{y_1 - x_1}{R} = -\cos\alpha, \quad \frac{\partial R}{\partial y_2} = \frac{y_2 - x_2}{R} = -\cos\beta, \quad \frac{\partial R}{\partial y_3} = \frac{y_3 - x_3}{R} = \cos\gamma$$

Здесь  $\{-\cos\alpha, -\cos\beta, \cos\gamma\}$  – направляющие косинусы вектора  $ux$ .

После подстановки (3.10) и (3.11) в (3.9) перейдем к локальной сферической системе координат  $r, \theta, \psi$  в точке  $y^*$ ; в которой компоненты вектора перемещений приводятся к виду

$$u_r^{(p)}(x) = i \frac{k_p^3}{4\pi\mu k_s^2} \iint_{S^*} \Phi(y) \frac{e^{ik_p R}}{R} dS_y \quad (3.12)$$

$$u_\theta^{(p)}(x) = 0, \quad u_\psi^{(p)}(x) = 0$$

$$\Phi(y) = -2\mu[\cos\alpha u_1(y; p) + \cos\beta u_2(y; p)]\cos\gamma + [2\mu\cos^2\gamma + \lambda]u_3(y; p) \quad (3.13)$$

При асимптотической оценке интеграла (3.12), (3.13) компоненты полного поля перемещений  $u_k(y; p)$  следует взять как решение локальной задачи об отражении плоской волны от граничной плоскости упругого полупространства [7, 8]:

$$u_m(y; p) = \left(1 + V_{pp}(y) - \frac{k_s}{k_p \sin\gamma} \sqrt{1 - \frac{k_p^2}{k_s^2} \sin^2\gamma} V_{ps}(y)\right) u_{mq}^{(p)}(y) \quad (m = 1, 2) \quad (3.14)$$

$$u_3(y; p) = (1 - V_{pp}(y) - \operatorname{tg}\gamma V_{ps}(y)) u_{3q}^{(p)}(y)$$

где  $V_{pp}$  и  $V_{ps}$  соответственно коэффициенты  $p$ - $p$  – отражения и  $p$ - $s$  – трансформации [7, 8].

Подставляя (3.14) и (3.13) в (3.12) и с учетом для подынтегрального выражения соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{k_p^2}{2k_s^2} \left\{ -\sin 2\gamma \left[ -\sin\gamma(1 + V_{pp}) + \frac{k_s}{k_p} \sqrt{1 - \frac{k_p^2}{k_s^2} \sin^2\gamma} V_{ps} \right] + \right. \\ & \left. + \left( \frac{k_s^2}{k_p^2} - 2\sin^2\gamma \right) [-\cos\gamma(1 - V_{pp}) + \sin\gamma V_{ps}] \right\} = \cos\gamma V_{pp} \end{aligned} \quad (3.15)$$

которое доказывается с использованием явного вида коэффициентов  $V_{pp}$  и  $V_{ps}$ , для радиального перемещения может быть получено следующее основное представление (после вынесения неосциллирующих функций за знак интеграла):

$$u_r^{(p)}(x) = M_1 i \frac{k_p \cos \gamma}{2\pi L_0 L} V_{pp}(y^*) \iint_{S^*} e^{ik_p \Phi_{pp}} dS, \quad M_1 = \frac{Q_q k_p^2}{4\pi \mu k_s^2} \quad (3.16)$$

$$\Phi_{pp} = |x_0 - y| + |y - x|, \quad L_0 = |x_0 - y^*|, \quad L = |y^* - x|$$

Лучевое представление можно получить из (3.16), используя метод двумерной стационарной фазы [9] в применении к дифракционному интегралу (3.16). В выбранной системе координат в точке  $y^*$  произвольная точка  $y \in S^*$  имеет координаты  $y(\Delta s_1, \Delta s_2, -0.5(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2))$ , где  $\Delta s_1, \Delta s_2$  – приращения дуг вдоль линий кривизны,  $k_1 = R_1^{-1}$  и  $k_s = R_2^{-1}$  – главные кривизны, а  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности  $S^*$  в точке  $y^* \in S^*$ ,  $(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2)$  – вторая квадратичная форма поверхности  $S^*$ , отнесенной к линиям кривизны.

Применим к треугольникам  $x_0 y^* u$  и  $x y^* u$  теорему косинусов.

$$|x_0 - y|^2 = L_0^2 + |\Delta s|^2 - 2L_0 |\Delta s| \cos \angle x_0 y^* u \quad (3.17)$$

$$|x - y|^2 = L^2 + |\Delta s|^2 - 2L |\Delta s| \cos \angle x y^* u$$

Из скалярных произведений векторов  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  – орт вектора  $y^* x_0$ ,  $\Delta s = \{\Delta s_1, \Delta s_2, -0.5(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2)\}$  и  $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, \cos \gamma\}$  – орт вектора  $y^* x$ ,  $\Delta s$  соответственно следует:

$$|\Delta s| \cos \angle x_0 y^* u = \Delta s_1 \cos \alpha + \Delta s_2 \cos \beta + 0.5(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2) \cos \gamma$$

$$|\Delta s| \cos \angle x y^* u = -\Delta s_1 \cos \alpha - \Delta s_2 \cos \beta + 0.5(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2) \cos \gamma$$

Если пренебречь величинами, малыми по сравнению с  $(\Delta s_1)^2, \Delta s_1 \Delta s_2, (\Delta s_2)^2$ , то из формулы (3.17) следуют представления

$$|x_0 - y| = L_0 - \Delta s_1 \cos \alpha - \Delta s_2 \cos \beta + 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \alpha + k_1 \cos \gamma)(\Delta s_1)^2 - L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta \Delta s_1 \Delta s_2 + 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \beta + k_2 \cos \gamma)(\Delta s_2)^2 \quad (3.18)$$

$$|x - y| = L + \Delta s_1 \cos \alpha + \Delta s_2 \cos \beta + 0.5(L^{-1} \sin^2 \alpha + k_1 \cos \gamma)(\Delta s_1)^2 - L^{-1} \cos \alpha \cos \beta \Delta s_1 \Delta s_2 + 0.5(L^{-1} \sin^2 \beta + k_2 \cos \gamma)(\Delta s_2)^2$$

Следовательно

$$\Phi_{pp} = L_0 + L + 0.5d_{11}(\Delta s_1)^2 + d_{12}\Delta s_1 \Delta s_2 + 0.5d_{22}(\Delta s_2)^2$$

$$d_{11} = (L_0^{-1} + L^{-1}) \sin^2 \alpha + 2k_1 \cos \gamma, \quad d_{12} = -(L_0^{-1} + L^{-1}) \cos \alpha \cos \beta$$

$$d_{22} = (L_0^{-1} + L^{-1}) \sin^2 \beta + 2k_2 \cos \gamma$$

Отсутствие первых степеней  $\Delta s_1, \Delta s_2$  в фазе  $\Phi_{pp}$  говорит о том, что точка  $y^*$  прямого лучевого отражения соответствует стационарному значению фазы  $\Phi_{pp}$ . Таким

образом, главный член асимптотики интеграла (3.16) определяется коэффициентами при  $(\Delta s_1)^2$ ,  $\Delta s_1 \Delta s_2$ ,  $(\Delta s_2)^2$  и может быть получен из выражения (3.16) применением метода двумерной стационарной фазы [9]:

$$u_r^{(p)}(x) = M_1 V_{pp}(y^*) \cos \gamma \frac{\exp\{i[k_p(L_0 + L) + \pi(\delta_2^{(pp)} + 2)/4]\}}{L_0 L \sqrt{|\det(D_2^{(pp)})|}} \quad (3.19)$$

где  $D_2^{(pp)}$  – матрица гессiana симметричной структуры ( $d_{ij} = d_{ji}$ ;  $i, j = 1, 2$ ), а  $\delta_2^{(pp)} = \text{sign } D_2^{(pp)}$  – разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы  $D_2^{(pp)}$ .

Соотношение (3.19) может быть приведено к виду:

$$u_r^{(p)}(x) = \frac{M_1 V_{pp}(y^*) \exp\{i[k_p(L_0 + L) + \pi(\delta_2^{(pp)} + 2)/4]\}}{\sqrt{|(L_0 + L)^2 + 2L_0 L(L_0 + L)(k_2 \sin^2 \alpha + k_1 \sin^2 \beta) \cos^{-1} \gamma + 4L_0^2 L^2 K|}} \quad (3.20)$$

Здесь  $K = k_1 k_2$  – гауссова кривизна поверхности  $S^*$  в точке  $y^*$ ;  $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$  – вектор, определяющий направление падения луча  $x_0 - y^*$  в выбранной системе координат.

Для формулы (3.20) выделим два предельных случая. Если  $k_1 = k_2 = 0$ , то из (3.20) следует известный результат для перемещения в отраженной от плоскости волне  $u_r^{(p)}(x) = -M_1 V_{pp}(L_0 + L)^{-1} \exp[ik_p(L_0 + L)]$ . В случае обратного рассеяния ( $V_{pp} = -1$ ,  $V_{ps} = 0$ ) в дальнем поле выражение (3.20) для радиального перемещения по модулю совпадает с выражением для давления в скалярном случае [10]:

$$u_r^{(p)}(x) = -0.5 M_1 i L_0^{-2} \sqrt{R_1 R_2} \exp\left[i\left(2kL_0 + \frac{\pi}{4} \delta_2^{(pp)}\right)\right]$$

Формула (3.20) получена для случая, когда высокочастотная волна падает на выпуклую поверхность. Если волна падает на вогнутую поверхность, то главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  берутся отрицательными.

Формула (3.20) отличается от аналогичной [2, 3] для давления  $p(x)$  в отраженной высокочастотной акустической волне в скалярном случае лишь присутствием коэффициента отражения  $V_{pp}$  и несущественного множителя в случае упругой среды. Формула для давления в один раз отраженной акустической волне от акустически твердой поверхности получена в [2] на основе геометрической теории дифракции (ГТД) Келлера, а в [3] на основе оценки дифракционного интеграла методом двумерной стационарной фазы. Это означает, что главный член асимптотики дифракционного интеграла совпадает с расчетами давления в отраженной волне по ГТД.

Применим изложенный метод для получения явного выражения для амплитуды перемещений в отраженной  $s$ -волне при  $p$ - $s$ -трансформации. В целях сокращения записей при исследовании трансформации  $p$ -волны в  $s$ -волну будем по-прежнему точку зеркального отражения обозначать  $y^*$ , а точку приема  $x$ . Очевидно, что в двух режимах  $p$ - $p$  и  $p$ - $s$  – отражений расположение точек  $y^*$  и  $x$  в общем случае будет различным. Тогда для компонент вектора перемещений в отраженной  $s$ -волне в сферической системе координат приходим к оценке следующего интеграла:

$$u_\theta^{(s)}(x) = M_2 i \frac{k_p \cos \gamma_1}{2\pi L_0 L_1} V_{ps}(y^*) \iint_S e^{ik_p \Phi_{ps}} dS_y, \quad M_2 = \frac{Q_q}{4\pi\mu} \quad (3.21)$$

$$u_r^{(s)}(x) = 0, \quad u_\psi^{(s)}(x) = 0$$

$$\Phi_{ps} = |x_0 - y| + k_s k_p^{-1} |y - x|, \quad L_1 = |y^* - x|$$

Используя разложения (3.18), закон Снеллиуса  $k_p \sin \gamma = k_s \sin \gamma_1$ , а также соотношения

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha_1}{\sin \gamma_1}, \quad \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} = \frac{\cos \beta_1}{\sin \gamma_1}$$

можно показать, что в фазе  $\Phi_{ps}$  отсутствуют слагаемые с  $\Delta s_1$  и  $\Delta s_2$  и она приводится к виду

$$\Phi_{ps} = L_0 + k_s k_p^{-1} L_1 + 0.5 d_{11} (\Delta s_1)^2 + d_{12} \Delta s_1 \Delta s_2 + 0.5 d_{22} (\Delta s_2)^2 \quad (3.22)$$

$$d_{11} = L_0^{-1} \sin^2 \alpha + k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \sin^2 \alpha_1 + k_1 (\cos \gamma - k_s k_p^{-1} \cos \gamma_1)$$

$$d_{22} = L_0^{-1} \sin^2 \beta + k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \sin^2 \beta_1 + k_2 (\cos \gamma - k_s k_p^{-1} \cos \gamma_1)$$

$$d_{12} = -L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta - k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1$$

Оценивая интеграл (3.21) методом двумерной стационарной фазы [9], получаем асимптотическое представление

$$u_\theta^{(s)}(x) = M_2 V_{ps}(y^*) \cos \gamma_1 \frac{\exp\{i[k_p L_0 + k_s L_1 + \pi(\delta_2^{(ps)} + 2)/4]\}}{L_0 L_1 \sqrt{|\det(D_2^{(ps)})|}} \quad (3.23)$$

где элементы симметричной ( $d_{12} = d_{21}$ ) матрицы гессiana  $D_2^{(ps)}$  определяются формулами (3.22), а  $\delta_2^{(ps)} = \text{sign} D_2^{(ps)}$ .

В случае падения на поверхность поперечной волны (3.4) могут быть рассмотрены  $s$ - $s$ -отражение и  $s$ - $p$ -трансформация.

Для  $s$ - $s$ -отражения:

$$u_\theta^{(s)}(x) = \frac{Q_{q1}}{4\pi\mu} V_{ss}(y^*) \cos \gamma \frac{\exp\{i[k_s(L_0 + L) + \pi(\delta_2^{(ss)} + 2)/4]\}}{L_0 L \sqrt{|\det(D_2^{(ss)})|}} \quad (3.24)$$

где  $V_{ss}$  - коэффициент отражения  $s$ -волны [7, 8], а матрица гессiana  $D_2^{(ss)}$  совпадает по структуре с матрицей  $D_2^{(pp)}$ ,  $\delta_2^{(ss)} = \text{sign} D_2^{(ss)}$ .

Для  $s$ - $p$ -трансформации:

$$u_\theta^{(p)}(x) = \frac{Q_{q1} k_p}{4\pi\mu k_s} V_{sp}(y^*) \cos \gamma_1 \frac{\exp\{i[k_s L_0 + k_p L_1 + \pi(\delta_2^{(sp)} + 2)/4]\}}{L_0 L_1 \sqrt{|\det(D_2^{(sp)})|}} \quad (3.25)$$

где  $V_{sp}$  - коэффициент трансформации  $s$ -волны в  $p$ -волну [7, 8],  $\delta_2^{(sp)} = \text{sign} D_2^{(sp)}$ , а элементы симметричной ( $d_{12} = d_{21}$ ) матрицы гессiana  $D_2^{(sp)} = d_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) имеют вид:

$$d_{11} = L_0^{-1} \sin^2 \alpha + k_p k_s^{-1} L_1^{-1} \sin^2 \alpha_1 + k_1 (\cos \gamma - k_p k_s^{-1} \cos \gamma_1)$$

$$d_{12} = -(L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta + k_p k_s^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1)$$

$$d_{22} = L_0^{-1} \sin^2 \beta + k_p k_s^{-1} L_1^{-1} \sin^2 \beta_1 + k_2 (\cos \gamma - k_p k_s^{-1} \cos \gamma_1)$$

Здесь вектор  $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma\}$  определяет направление падения  $s$ -волны, а вектор  $\{-\cos \alpha_1, -\cos \beta_1, \cos \gamma_1\}$  – отражения  $p$ -волны.

3.2. *Двукратное переотражение волны.* Применение ГТД Келлера, основанной на использовании коэффициентов расходимости, уже в случае двукратного отражения волны является достаточно громоздким. Если исследовать задачу о переотражении высокочастотной волны от поверхности упругого тела с различными возможными трансформациями волн произвольного  $N$  числа раз, то более удобно исходить из оценки  $2N$  кратного дифракционного интеграла методом многомерной стационарной фазы. Основой исследования общего случая произвольного числа переотражений является задача о двукратном отражении, к рассмотрению которой переходим.

Прямое использование интегрального представления (3.5) по всей зоне “света” для отраженных волн невозможно [4], так как оно не описывает многократно отраженных волн. Если в формулу Грина (3.5) подставить в качестве полного поля  $\mathbf{u}(y)$  значения (3.14) первичного поля, то интегральная формула (3.5) дает лишь однократно отраженную волну. Двукратно отраженная волна получится лишь тогда, когда значения  $\mathbf{u}(y)$  включают в себя и первичное поле, и его однократное отражение. Для решения задачи о двукратном переотражении будем исходить из модификации [4] интегральной формулы (3.5). Следуя этой модификации, двукратно отраженные волны будем находить интегрированием по окрестности  $S_2^*$  второй точки зеркального отражения  $y_2^*$ , лучей, полученных при однократном отражении от окрестности  $S_1^*$  первой точки зеркального отражения  $y_1^*$ . Такая модификация означает, что при нахождении главного члена асимптотики четырехкратного дифракционного интеграла будем находиться в рамках расчета амплитуды перемещений в двукратно отраженной волне по ГТД.

Переотражение высокочастотной волны рассмотрим на примере повторного отражения луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$ , излучающегося из точки  $x_0$  ( $p$ -волна (3.3)) и принимающегося в точке  $x_3$  с возможной трансформацией  $p$ - $s$ - $p$ .

Компоненты вектора перемещений  $p$ -волны в точке  $x_3$  даются следующей формулой:

$$u_k^{(p)}(x_3) = \iint_{S_2^*} T_{y_2} [U_p^{(k)}(y_2, x_3)] \mathbf{u}(y_2; s) dS_2 \quad (3.26)$$

Здесь  $\mathbf{u}(y_2; s)$  – вектор полного перемещения в точке  $y_2 \in S_2^*$  окрестности точки зеркального отражения  $y_2^*$ , который определяется после первой  $p$ - $s$  – трансформации на окрестности  $S_1^*$  точки зеркального отражения  $y_1^*$ .

При асимптотической оценке интеграла Кирхгофа в формуле (3.26) компоненты вектора полного поля перемещений  $u_k(y_2; s)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) под знаком интеграла следует выбрать как решение локальной задачи дифракции об отражении плоской падаю-



щей  $s$ -волны, сформированной при  $p$ - $s$  – трансформации на окрестности  $S_1^*$  точки зеркального отражения  $y_1^*$ :

$$u_m(y_2; s) = (V_{ss}(y_2) - 1 - \text{tg} \gamma_1 V_{sp}(y_2)) u_m^{(s)}(y_2) \quad (m = 1, 2)$$

$$u_3(y_2; s) = \left( V_{ss}(y_2) + 1 + \frac{k_p}{k_s \sin \gamma_1} \sqrt{1 - \frac{k_s^2}{k_p^2} \sin^2 \gamma_1} V_{sp}(y_2) \right) u_3^{(s)}(y_2) \quad (3.27)$$

где  $V_{ss}(y_2)$  и  $V_{sp}(y_2)$  – коэффициенты  $s$ - $s$  – отражения и  $s$ - $p$  – трансформации [7, 8].

В то же время компоненты вектора перемещений  $u_k^{(s)}(y_2)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) сами выражаются подобной формулой

$$u_k^{(s)}(y_2) = \iint_{S_1^*} \mathbf{T}_{y_1} [\mathbf{U}_s^{(k)}(y_1, y_2)] \mathbf{u}(y_1; p) dS_1 \quad (3.28)$$

где вектор полного поля перемещений  $\mathbf{u}(y_1; p)$  в точках  $y_1 \in S_1$  окрестности  $y_1^*$ , определяется выражениями (3.14). После подстановки (3.14) в (3.28), а (3.28) в (3.27) и (3.27) в (3.26) и перехода в сферическую систему координат  $r, \theta, \psi$  в точке  $y_2^*$  приходим к компонентам перемещений в точке  $x_3$ .

$$u_r^{(p)}(x_3) = -M_1 \frac{k_p k_s \cos \gamma_1 \cos \gamma_3}{4\pi^2 L_0 L_1 L_2} V_{ps}(y_1^*) V_{sp}(y_2^*) \iiint_{S_2^*} \int_{S_1^*} e^{ik_p \Phi_{psp}} dS_1 dS_2 \quad (3.29)$$

$$u_\theta^{(p)}(x_3) = 0, \quad u_\psi^{(p)}(x_3) = 0$$

$$\Phi_{psp} = |x_0 - y_1| + k_s k_p^{-1} |y_1 - y_2| + |y_2 - x_3| \quad (3.30)$$

$$L_0 = |x_0 - y_1^*|, \quad L_1 = |y_1^* - y_2^*|, \quad L_2 = |y_2^* - x_3|$$

Окрестности  $S_1^*$  и  $S_2^*$  точек зеркального отражения  $y_1^*$  и  $y_2^*$  отнесем к правым декартовым системам координат  $O_i X_1^{(i)} X_2^{(i)} X_3^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ), определяемым нормальными  $n_1$  (ось  $O_1 X_3^{(1)}$ ) и  $n_2$  (ось  $O_2 X_3^{(2)}$ ) и касательными к линиям кривизны (оси  $O_i X_1^{(i)}, O_i X_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ )). Вдоль линий кривизны будем отсчитывать длины дуг  $\Delta s_1^{(1)}$  и  $\Delta s_2^{(1)}$  в окрестности  $S_1^*$  точки  $y_1^*$  и  $\Delta s_1^{(2)}$  и  $\Delta s_2^{(2)}$  в окрестности  $S_2^*$  точки  $y_2^*$ . Так же как и ранее для малых  $\Delta s_1^{(i)}, \Delta s_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) будем иметь

$$|x_0 - y_1| = L_0 - \Delta s_1^{(1)} \cos \alpha - \Delta s_2^{(1)} \cos \beta + 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \alpha + k_1^{(1)} \cos \gamma) (\Delta s_1^{(1)})^2 - L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta \Delta s_1^{(1)} \Delta s_2^{(1)} + 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \beta + k_2^{(1)} \cos \gamma) (\Delta s_2^{(1)})^2 \quad (3.31)$$

$$|y_2 - x_3| = L_2 + \Delta s_1^{(2)} \cos \alpha_3 + \Delta s_2^{(2)} \cos \beta_3 + 0.5(L_2^{-1} \sin^2 \alpha_3 + k_1^{(2)} \cos \gamma_3) (\Delta s_1^{(2)})^2 - L_2^{-1} \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \Delta s_1^{(2)} \Delta s_2^{(2)} + 0.5(L_2^{-1} \sin^2 \beta_3 + k_2^{(2)} \cos \gamma_3) (\Delta s_2^{(2)})^2 \quad (3.32)$$

При  $p$ - $s$ - $p$  – трансформации  $\{-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma\}$  – вектор, определяющий направление падения  $p$ -волны (3.3);  $\{-\cos\alpha_1, -\cos\beta_1, \cos\gamma_1\}$  – вектор, определяющий направление отраженной  $s$ -волны в точке  $y_1^*$ ;  $\{-\cos\alpha_2, -\cos\beta_2, -\cos\gamma_2\}$  – направление падения  $s$ -волны, отраженной в точке  $y_1^*$  относительно системы координат в точке  $y_2^*$ ;  $\{-\cos\alpha_3, -\cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$  – направление отраженной  $p$ -волны в точке  $y_2^*$ .

Найдем расстояние  $|y_1 - y_2| = |y_2 y_1|$  в фазе  $\varphi_{psp}$  (3.30). Это расстояние рассмотрим в правой системе координат  $O_2 \bar{X}_1^{(2)} \bar{X}_2^{(2)} \bar{X}_3^{(2)}$  с началом координат  $O_2$  в точке  $y_2^*$ . Эта система координат получается вращением системы координат  $O_2 X_1^{(2)} X_2^{(2)} X_3^{(2)}$  на угол  $\Phi$  ( $0 \leq \Phi < \pi$ ) вокруг луча  $y_1^* - y_2^*$  до расположения оси  $O_2 X_3^{(2)}$  в плоскости падения – отражения луча  $x_0 - y_1^* - y_2^*$ . В системе координат  $O_2 \bar{X}_1^{(2)} \bar{X}_2^{(2)} \bar{X}_3^{(2)}$  обозначим координаты точек  $y_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ,  $y_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $y_1^*(\xi_1^0, \eta_1^0, \zeta_1^0)$ . С учетом этого вектор  $y_2 y_1$  в этой системе координат представим в виде:

$$y_2 y_1 = y_2^* y_1^* + A y_1^* y_1 - B y_2^* y_2$$

$$y_2 y_1 = \{\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2\}, \quad y_2^* y_1^* = \{\xi_1^0, \eta_1^0, \zeta_1^0\} \quad (3.33)$$

$$y_i^* y_i = \{\Delta s_1^{(i)}, \Delta s_2^{(i)}, -0.5(k_1^{(i)}(\Delta s_1^{(i)})^2 + k_2^{(i)}(\Delta s_2^{(i)})^2)\} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь координаты векторов  $y_i^* y_i$  ( $i = 1, 2$ ) выписаны в локальных системах координат точек  $y_1^*$  и  $y_2^*$ . Матрица  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – ортогональная матрица перехода от базиса декартовой системы координат  $O_2 \bar{X}_1^{(2)} \bar{X}_2^{(2)} \bar{X}_3^{(2)}$  в точке  $y_2^*$  к базису декартовой системы координат  $O_2 X_1^{(1)} X_2^{(1)} X_3^{(1)}$  в точке  $y_1^*$ . Матрица  $B = (b_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – ортогональная матрица перехода от базиса декартовой системы координат  $O_2 \bar{X}_1^{(2)} \bar{X}_2^{(2)} \bar{X}_3^{(2)}$  в точке  $y_2^*$  к базису декартовой системы координат  $O_2 X_1^{(2)} X_2^{(2)} X_3^{(2)}$  в точке  $y_1^*$ .

*Замечание.* Представление (3.33) справедливо при произвольном расположении в пространстве луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3^*$ . В случае, если луч  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3^*$  расположен в одной плоскости, то матрица  $B$  является единичной матрицей  $E$  размера  $3 \times 3$ .

Элементы ортогональных матриц  $A$  и  $B$  могут быть получены через стандартные углы Эйлера: угол прецессии  $\psi$ , угол нутации  $\theta$ , угол чистого вращения  $\varphi$ . Тригонометрические функции этих углов могут быть выражены через тригонометрические функции направляющих углов падающих и отраженных волн при повторном отражении. В этом случае элементы  $a_{ij}$  ортогональной матрицы  $A$  имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} = G_{12}^{-1} \left[ \cos\beta_1 \begin{Bmatrix} \cos\beta_2 \\ -\cos\alpha_2 \end{Bmatrix} - \cos\alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \end{Bmatrix} \right] \cos(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = G_{12}^{-1} \left[ \cos\alpha_1 \begin{Bmatrix} -\cos\beta_2 \\ \cos\alpha_2 \end{Bmatrix} - \cos\beta_1 \begin{Bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \end{Bmatrix} \right] \cos(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos\alpha_2 \\ -\cos\beta_2 \end{Bmatrix} \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{\sin\gamma_2}, \quad \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \end{Bmatrix} \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{\sin\gamma_1}$$

$$a_{33} = -\cos(\gamma_1 + \gamma_2), \quad G_{12} = \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \quad (3.34)$$

Переходим к нахождению элементов матрицы  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Рассмотрим взаимное расположение систем координат  $O_1 X_1^{(1)} X_2^{(1)} X_3^{(1)}$ ,  $O_2 \bar{X}_1^{(2)} \bar{X}_2^{(2)} \bar{X}_3^{(2)}$ ,  $O_2 X_1^{(2)} X_2^{(2)} X_3^{(2)}$ . Пусть базисные векторы в локальных системах координат в точках  $y_1^*$  и  $y_2^*$  будут  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  и  $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$ . Если формы отражающих поверхностей известны, то локальные системы координат и базисные векторы могут быть восстановлены. Найдем угол  $\Phi$ , на который нужно повернуть систему координат  $O_2 X_1^{(2)} X_2^{(2)} X_3^{(2)}$ , чтобы совместить ее с системой координат  $O_2 \bar{X}_1^{(2)} \bar{X}_2^{(2)} \bar{X}_3^{(2)}$ .

Введем в рассмотрение векторы  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{q}_1^* \times \mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{q}_2^* \times \mathbf{n}_2$  где  $\mathbf{q}_1^* = \{-\cos\alpha_1, -\cos\beta_1, \cos\gamma_1\}$  – направление отраженной  $s$ -волны в точке  $y_1^*$ , а  $\mathbf{q}_2^* = \{-\cos\alpha_2, -\cos\beta_2, -\cos\gamma_2\}$  – направление падения  $s$ -волны в точке  $y_2^*$  относительно системы координат  $O_2 X_1^{(2)} X_2^{(2)} X_3^{(2)}$ .

$$\mathbf{d}_j = (-\cos\beta_j)\mathbf{i}_j + (\cos\alpha_j)\mathbf{j}_j \quad (j = 1, 2)$$

Векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  перпендикулярны вектору  $y_2^* y_1^*$ . Угол поворота  $\Phi$  определяется из соотношения

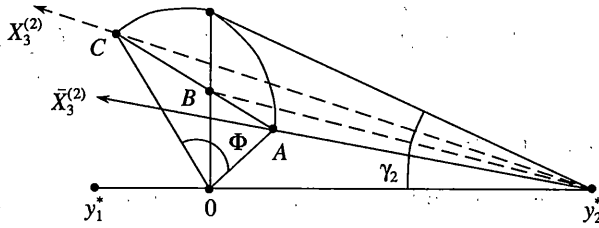
$$\cos\Phi = \frac{(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|} = (\sin\gamma_1 \sin\gamma_2)^{-1} \times [\cos\beta_1 \cos\beta_2 (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) - \cos\beta_1 \cos\alpha_2 (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2) - \cos\alpha_1 \cos\beta_2 (\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_2) + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 (\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)]$$

Если уравнения поверхностей известны, то можно считать известными скалярные произведения  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ ,  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2)$ ,  $(\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_2)$ ,  $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  базисных векторов. Таким образом,

$$\Phi = \arccos\left(\frac{(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|}\right)$$

Будем рассматривать в качестве неподвижной систему координат  $O_2 \bar{X}_1^{(2)} \bar{X}_2^{(2)} \bar{X}_3^{(2)}$ . При вращении системы координат  $O_2 X_1^{(2)} X_2^{(2)} X_3^{(2)}$  вокруг луча  $y_1^* - y_2^*$  каждая из осей  $O_2 X_1^{(2)}$ ,  $O_2 X_2^{(2)}$ ,  $O_2 X_3^{(2)}$  будет описывать коническую поверхность, при этом вращение будет осуществляться на угол  $\Phi$ . Поскольку на каждой отдельной конической поверхности находятся одноименные оси, то можно найти угол между ними. Найдем, например, угол  $O_2 \bar{X}_3^{(2)} \wedge O_2 X_3^{(2)}$ . Рассмотрим вращение единичного вектора  $(O_2 X_3^{(2)})_0$  (фигура):

$$\Delta O A y_2^*: OA = 1 \cdot \sin\gamma_2 \quad (0 \leq \gamma_2 \leq \pi/2)$$



$$\left(0 \leq \frac{\Phi}{2} \leq \frac{\pi}{2}\right), \Delta OAB: AB = AO \cdot \sin \frac{\Phi}{2} = 1 \cdot \sin \gamma_2 \sin \frac{\Phi}{2}$$

$$\Delta BAy_2^*: AB = 1 \cdot \sin \frac{1}{2}(O_2 \bar{X}_3^{(2)} \wedge O_2 X_3^{(2)})$$

Получаем

$$v_{33} = O_2 \bar{X}_3^{(2)} \wedge O_2 X_3^{(2)} = 2 \arcsin \left( \sin \gamma_2 \sin \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.35)$$

Аналогично рассуждая, получим

$$v_{11} = O_2 \bar{X}_1^{(2)} \wedge O_2 X_1^{(2)} = 2 \arcsin \left( \frac{\cos \beta_2}{\sin \gamma_2} \sin \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.36)$$

$$v_{22} = O_2 \bar{X}_2^{(2)} \wedge O_2 X_2^{(2)} = 2 \arcsin \left( \frac{\cos \alpha_2}{\sin \gamma_2} \sin \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.37)$$

Воспользуемся соотношениями [11] для углов Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ :

$$\cos v_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \quad (3.38)$$

$$\cos v_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \quad (3.39)$$

$$\cos v_{33} = \cos \theta \quad (3.40)$$

Из (3.38)–(3.40) получаем

$$\theta = 2 \arcsin \left( \sin \gamma_2 \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.41)$$

$$\cos v_{11} + \cos v_{22} = \cos(\psi + \varphi) + \cos(\psi + \varphi) \cos \theta$$

Откуда будем иметь

$$\psi + \varphi = \arccos \left( \frac{\cos v_{11} + \cos v_{22}}{1 + \cos \theta} \right) = v_0^+ \quad (3.42)$$

$$\cos v_{11} - \cos v_{22} = \cos(\psi - \varphi) - \cos(\psi - \varphi) \cos \theta$$

$$\psi - \varphi = \arccos \left( \frac{\cos v_{11} - \cos v_{22}}{1 - \cos \theta} \right) = v_0^- \quad (3.43)$$

Из системы уравнений (3.42), (3.43) следует

$$\psi = \frac{1}{2}(v_0^+ + v_0^-), \quad \varphi = \frac{1}{2}(v_0^+ - v_0^-) \quad (3.44)$$

В дальнейшем построение элементов матрицы  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) через углы Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$  осуществляется также как и в [11].

С учетом свойств ортогональных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , а также соотношений

$$\mathbf{A}y_2^*y_1^* = L_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}, \quad \mathbf{B}y_2^*y_1^* = -L_1q_2^*$$

расстояние  $|y_1 - y_2|$  в фазе  $\varphi_{psp}$  (3.30) с точностью до малых второго порядка включительно приводится к виду:

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| = & L_1 + \cos\alpha_1\Delta s_1^{(1)} + \cos\beta_1\Delta s_2^{(1)} - 0.5\cos\gamma_1\left[k_1^{(1)}(\Delta s_1^{(1)})^2 + k_2^{(1)}(\Delta s_2^{(1)})^2\right] - \\ & - \cos\alpha_2\Delta s_1^{(2)} - \cos\beta_2\Delta s_2^{(2)} - 0.5\cos\gamma_2\left[k_1^{(2)}(\Delta s_1^{(2)})^2 + k_2^{(2)}(\Delta s_2^{(2)})^2\right] + \\ & + L_1^{-1}\left[0.5\sin^2\alpha_1(\Delta s_1^{(1)})^2 + 0.5\sin^2\beta_1(\Delta s_2^{(1)})^2 - \cos\alpha_1\cos\beta_1\Delta s_1^{(1)}\Delta s_2^{(1)} + \right. \\ & \left. + 0.5\sin^2\alpha_2(\Delta s_1^{(2)})^2 + 0.5\sin^2\beta_2(\Delta s_2^{(2)})^2 - \cos\alpha_2\cos\beta_2\Delta s_1^{(2)}\Delta s_2^{(2)} + \right. \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & + (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - c_{11})\Delta s_1^{(1)}\Delta s_1^{(2)} + (\cos\beta_1\cos\alpha_2 - c_{12})\Delta s_2^{(1)}\Delta s_1^{(2)} + \\ & \left. + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - c_{21})\Delta s_1^{(1)}\Delta s_2^{(2)} + (\cos\beta_1\cos\beta_2 - c_{22})\Delta s_2^{(1)}\Delta s_2^{(2)} \right] \end{aligned}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, \quad c_{12} = a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}$$

$$c_{21} = a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, \quad c_{22} = a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}$$

Используя разложения (3.31)–(3.33), закон Снеллиуса  $k_p \sin\gamma = k_s \sin\gamma_1$ ,  $k_s \sin\gamma_2 = k_p \sin\gamma_3$ , а также соотношения

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\gamma_1}, \quad \frac{\cos\beta}{\sin\gamma} = \frac{\cos\beta_1}{\sin\gamma_1}, \quad \frac{\cos\alpha_2}{\sin\gamma_2} = \frac{\cos\alpha_3}{\sin\gamma_3}, \quad \frac{\cos\beta_2}{\sin\gamma_2} = \frac{\cos\beta_3}{\sin\gamma_3}$$

можно показать, что в фазе  $\varphi_{psp}$  (3.30) отсутствуют слагаемые с  $\Delta s_1^{(i)}$  и  $\Delta s_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ),

т.е.  $y_1^* \in S_1^*$  и  $y_2^* \in S_2^*$  прямого лучевого отражения соответствуют стационарному значению фазы  $\varphi_{psp}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{psp} = & |x_0 - y_1| + k_s k_p^{-1} |y_1 - y_2| + |y_2 - x_3| = L_0 + k_s k_p^{-1} L_1 + L_2 + \\ & + 0.5d_{11}(\Delta s_1^{(1)})^2 + d_{12}\Delta s_1^{(1)}\Delta s_2^{(1)} + d_{13}\Delta s_1^{(1)}\Delta s_1^{(2)} + d_{14}\Delta s_1^{(1)}\Delta s_2^{(2)} + \\ & + 0.5d_{22}(\Delta s_2^{(1)})^2 + d_{23}\Delta s_2^{(1)}\Delta s_1^{(2)} + d_{24}\Delta s_2^{(1)}\Delta s_2^{(2)} + \\ & + 0.5d_{33}(\Delta s_1^{(2)})^2 + d_{34}\Delta s_1^{(2)}\Delta s_2^{(2)} + 0.5d_{44}(\Delta s_2^{(2)})^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_0} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \beta \end{Bmatrix} + \frac{k_s}{k_p L_1} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_1 \\ \sin^2 \beta_1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{Bmatrix} \left( \cos \gamma + \frac{k_s}{k_p} \cos \gamma_1 \right)$$

$$\begin{Bmatrix} d_{33} \\ d_{44} \end{Bmatrix} = \frac{k_s}{k_p L_1} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_2 \\ \sin^2 \beta_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{L_2} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_3 \\ \sin^2 \beta_3 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \end{Bmatrix} \left( \frac{k_s}{k_p} \cos \gamma_2 + \cos \gamma_3 \right)$$

$$d_{12} = -L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta - k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1$$

$$d_{34} = -k_s k_p^{-1} L_1^{-1} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 - L_2^{-1} \cos \alpha_3 \cos \beta_3$$

$$d_{13} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - c_{11}), \quad d_{14} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - c_{21})$$

$$d_{23} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \beta_1 \cos \alpha_2 - c_{12}), \quad d_{24} = k_s k_p^{-1} L_1^{-1} (\cos \beta_1 \cos \beta_2 - c_{22})$$

Окончательный результат может быть получен из выражения (3.29) применением метода четырехмерной стационарной фазы [9]:

$$u_r^{(p)}(x_3) = M \frac{\exp\{i[k_p L_0 + k_s L_1 + k_p L_2 + \pi(\delta_4^{(psp)} + 4)/4]\}}{L_0 L_1 L_2 \sqrt{|\det(D_4^{(psp)})|}} \quad (3.47)$$

$$M = \frac{Q_q k_p}{4\pi \mu k_s} V_{ps}(y_1^*) V_{sp}(y_2^*) \cos \gamma_1 \cos \gamma_3$$

где  $D_4^{(psp)} = (d_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) – гессиан симметричной структуры, а его элементы  $d_{ij}$  ( $i \leq j$ ) приведены в формуле (3.26),  $\delta_4^{(psp)} = \text{sign} D_4^{(psp)}$ . Следуя изложенному методу, могут быть рассмотрены и любые другие возможные отражения и трансформации луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$ , а также отражения и трансформации луча произвольное ( $N$  кратное) число раз.

3.3. *Многократные переотражения продольной волны.* В частности, если геометрия граничной поверхности такова, что траектория луча  $x_0 - y_1 - y_2 - \dots - y_N - x_{N+1}$  приводит к  $p - p - p - \dots - p$  отражению, то амплитуда радиального перемещения  $N$  раз отраженного луча в точке  $x_{N+1}$  относительно локальной сферической системы координат  $r, \theta, \psi$  в точке  $y_N^*$  граничной поверхности представляется интегралом

$$u_r^{(p)}(x_{N+1}) = M_1 i^N \left(\frac{k_p}{2\pi}\right)^N L_0^{-1} \prod_{n=1}^N L_n^{-1} \cos \gamma_n V_{pp}(y_n^*) \times$$

$$\times \iiint_{S_N^*} \iiint_{S_{N-1}^*} \dots \iiint_{S_2^*} \iiint_{S_1^*} e^{ik_p \varphi_p} dS_1 dS_2 \dots dS_{N-1} dS_N \quad (3.48)$$

$$u_\theta^{(p)}(x_{N+1}) = 0, \quad u_\psi^{(p)}(x_{N+1}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi_p &= |x_0 - y_1| + \dots + |y_{n-1} - y_n| + \dots + |y_{N-1} - y_N| + |y_N - x_{N+1}| \\ L_n &= |y_n^* - y_{n+1}^*| \quad (n = 1, 2, \dots, N-1); \quad L_N = |y_N^* - x_{N+1}| \end{aligned} \quad (3.49)$$

где  $L_0$  – расстояние между излучателем  $x_0$  и первой точкой зеркального отражения  $y_1^*$ ;  $L_N$  – между приемником  $x_{N+1}$  и последней точкой зеркального отражения  $y_N^*$ ;  $L_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N-1$ ) – расстояние между точками зеркального отражения  $y_n^*$  и  $y_{n+1}^*$ .

Первое  $|x_0 - y_1|$  и последнее  $|y_N - x_{N+1}|$  слагаемые в фазе  $\Phi_p$  (3.49) имеют такую же структуру, как и слагаемые (3.31) и (3.32). Выражения для расстояний  $|y_{n-1} - y_n| = |y_n y_{n-1}|$  ( $n = 2, 3, \dots, N$ ) по структуре такие же, как и (3.45) для  $|y_2 y_1|$ :

$$y_n y_{n-1} = y_n^* y_{n-1}^* + \mathbf{A}^{(n)} y_{n-1}^* y_{n-1} + \mathbf{B}^{(n)} y_n^* y_n$$

где матрицы  $\mathbf{A}^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})$ ,  $\mathbf{B}^{(n)} = (b_{ij}^{(n)})$  при определении расстояния  $|y_{n-1} - y_n|$  находятся по такой же схеме, как и при двукратном преотражении (3.34)–(3.45).

Применяя для оценки при  $k_p \rightarrow \infty$   $2N$  кратного интеграла Кирхгофа (3.48) метод многомерной ( $2N$ -кратной) стационарной фазы, получаем амплитуду радиального перемещения в  $N$  раз преотраженной  $p$ -волне.

$$u_r^{(p)}(x_{N+1}) = M_1 \prod_{n=1}^N V_{pp}(y_n^*) \cos \gamma_n \frac{\exp \left\{ i \left[ k_p \sum_{n=0}^N L_n + (\delta_{2N}^{(p)} + 2N)/4 \right] \right\}}{\prod_{n=0}^N L_n \sqrt{|\det(D_{2N}^{(p)})|}} \quad (3.50)$$

где  $\delta_{2N}^{(p)} = \text{sign} D_{2N}^{(p)}$  – матрица гессиана  $D_{2N}^{(p)} = (d_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, 2N$ ), которая является ленточной (с шириной ленты равной семи) и симметричной  $d_{ij} = d_{ji}$  со следующими ненулевыми элементами  $d_{ij}$  ( $i \leq j$ ):

диагональные элементы:

$$\begin{Bmatrix} d_{2n-1, 2n-1} \\ d_{2n, 2n} \end{Bmatrix} = (L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_n \\ \sin^2 \beta_n \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(n)} \\ k_2^{(n)} \end{Bmatrix} \cos \gamma_n$$

внедиагональные элементы:

$$d_{2n-1, 2n} = -(L_{n-1}^{-1} + L_n^{-1}) \cos \alpha_n \cos \beta_n$$

$$d_{2n-1, 2n+1} = L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \alpha_{n+1} - c_{11}^{(n)})$$

$$d_{2n-1, 2n+2} = L_n^{-1} (\cos \alpha_n \cos \beta_{n+1} - c_{21}^{(n)})$$

$$d_{2n, 2n+1} = L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \alpha_{n+1} - c_{12}^{(n)})$$

$$d_{2n, 2n+2} = L_n^{-1} (\cos \beta_n \cos \beta_{n+1} - c_{22}^{(n)})$$

$$c_{11}^{(n)} = a_{11}^{(n)} b_{11}^{(n)} + a_{21}^{(n)} b_{21}^{(n)} + a_{31}^{(n)} b_{31}^{(n)}, \quad c_{12}^{(n)} = a_{12}^{(n)} b_{11}^{(n)} + a_{22}^{(n)} b_{31}^{(n)} + a_{32}^{(n)} b_{31}^{(n)}$$

$$c_{21}^{(n)} = a_{11}^{(n)} b_{12}^{(n)} + a_{21}^{(n)} b_{22}^{(n)} + a_{31}^{(n)} b_{32}^{(n)}, \quad c_{22}^{(n)} = a_{12}^{(n)} b_{12}^{(n)} + a_{22}^{(n)} b_{22}^{(n)} + a_{32}^{(n)} b_{32}^{(n)}$$

Здесь переменная  $n$  принимает последовательно натуральные значения  $1, 2, 3, \dots$  с условием, что каждый из индексов  $i$  и  $j$  элементов  $d_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, 2N$ ) не превосходит числа  $2N$ ;  $\{-\cos \alpha_n, -\cos \beta_n, -\cos \gamma_n\}$  – направление падающего луча относительно системы координат в точке  $y_n^*$ , а  $\{-\cos \alpha_{n+1}, -\cos \beta_{n+1}, -\cos \gamma_{n+1}\}$  – направление отраженного луча в точке  $y_n^*$  относительно системы координат в точке  $y_{n+1}^*$ ;  $k_1^{(n)}$ ,  $k_2^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) – главные кривизны поверхности в точке  $y_n^*$ .

Заметим, что оценка многомерных дифракционных интегралов (3.29), (3.48) не сводится к последовательному асимптотическому анализу двукратных интегралов, поскольку структура фазовой функции представляет собой довольно сложную комбинацию, зависящую от всех точек окрестностей  $S_1^*$ ,  $S_2^*$ , ...,  $S_N^*$ , участвующих в отражении луча.

**4. Анализ результатов и заключение.** Полученные явные выражения (3.20), (3.23)–(3.25), (3.47), (3.50) в случаях однократного отражения и многократных переотражений показывают, что перемещения в отраженной высокочастотной волне определяются главными кривизнами, гауссовой кривизной граничной поверхности упругого тела в точках зеркального отражения, расстояниями между точками зеркального отражения, их удалением от источника волн и точки приема отраженной волны, направлениями падающих и отраженных волн, а также упругими характеристиками.

Разработанный метод может быть применен и в случае произвольного числа отражений и трансформаций высокочастотной волны на граничной поверхности упругого тела.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-2113.2003.1 для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ и гранта РФФИ (проект 05-01-00155а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sumbatyan M.A., Boyev N.V.* High-frequency diffraction by nonconvex obstacles // *J. Acoust. Soc. Amerika.* 1994. № 5. P. 2347–2353.
2. *McNamara D.A., Pistorius C.W.I., Malherbe J.A.* *G Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction.* Norwood: Artech House, 1990. 472 p.
3. *Боев Н.В., Сумбатян М.А.* Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // *Докл. РАН.* 2003. Т. 392. № 5. С. 614–617.
4. *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* *Геометрическая теория дифракции.* М.: Связь, 1978. 248 с.
5. *Achenbach J.D., Gaitesen A.K., McMaken H.* *Ray Methods for Waves in Elastic solids; With Applications to Scattering by Cracks.* New York: Pittman, 1982. 251 p.
6. *Купрадзе В.Д.* *Методы потенциала в теории упругости.* М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
7. *Бреховских Л.М.* *Волны в слоистых средах.* М.: Наука, 1973. 344 с.
8. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* *Гармонические колебания и волны в упругих телах.* Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
9. *Федорюк М.В.* *Метод перевала.* М.: Наука, 1977. 368 с.
10. *Шендеров Е.Л.* *Волновые задачи гидроакустики.* Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
11. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* *Курс теоретической механики.* Т. 1. М.: Наука, 1982. 352 с.