МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2005

УДК 531.383

© 2005 г. В.Ф. ЖУРАВЛЁВ

БЕСПЛАТФОРМЕННАЯ ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

(Пространственный осциллятор – датчик полной инерциальной информации)

Обсуждаются алгоритмы съема информации и управления изотропным пространственным осциллятором, позволяющим превратить его в датчик инерциальной информации, сочетающий в себе одновременно трехмерный датчик угловой ориентации и трехмерный датчик линейных ускорений.

Будем предполагать вначале, что подвижный объект совершает вращение вокруг неподвижной точки и эта точка совпадает с центром колебаний осциллятора. Тогда уравнения пространственного изотропного осциллятора, находящегося под воздействием только упругих сил, записанные в инерциальной системе отсчета, имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

где частота собственных колебаний осциллятора определяет единицу измерения времени.

В системе отсчета, связанной с самим объектом, уравнения движения

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} + 2A^T\dot{A}\dot{\mathbf{y}} + A^T\ddot{A}\mathbf{y} = 0 \tag{2}$$

получаются после перехода от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{y}$ посредством ортогонального преобразования с матрицей A:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{y} \tag{3}$$

В наиболее общей форме задача, которая ставится для уравнений (2), состоит в восстановлении матрицы ориентации $A(t)$ по наблюдениям колебаний осциллятора $y(t)$ в связанной системе отсчета.

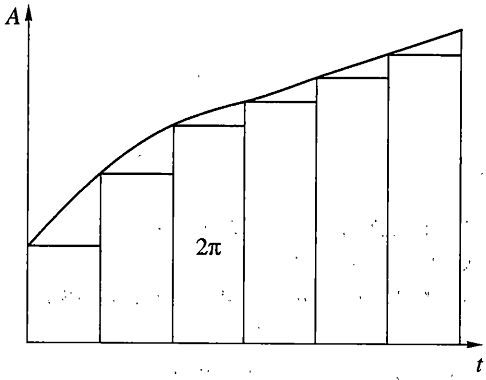
Уравнения второго порядка (2) относительно искомой матрицы A могут быть записаны в виде системы двух уравнений первого порядка после введения обозначения для матрицы угловой скорости $\Omega = A^T\dot{A}$:

$$\dot{\Omega}\mathbf{y} = -\Omega^2\mathbf{y} - 2\Omega\dot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$$

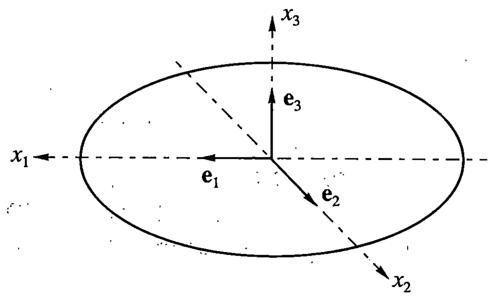
$$\dot{A} = A\Omega$$

Первое из этих уравнений представляет уравнение Риккати относительно матрицы угловой скорости Ω, второе уравнение Пуассона для матрицы A.

Будем далее предполагать, что частота собственных колебаний осциллятора много больше модуля угловой скорости подвижного объекта, тогда приближенно решение системы (2) относительно матрицы $A(t)$ можно искать в виде кусочно-постоянной функции, считая $A(t) = \mathrm{const}$ для $2\pi(n-1) < t < 2\pi n$, где n пробегает все целые значения (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Из интегрального исчисления следует, что последовательность ступенчатых функций равномерно сходится к функции $A(t)$ тогда и только тогда, когда эта функция непрерывная, или содержит только разрывы первого рода. Это означает, что для любой заданной точности вычисления матрицы A всегда можно выбрать период собственных колебаний осциллятора таким, что заданная точность будет гарантирована.

На каждом таком интервале общее решение системы (2) имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t \tag{4}$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – трехмерные векторы произвольных постоянных. Такое решение является, очевидно, точным для уравнений в инерциальной системе отсчета. Приближенное решение (4) имеет прозрачный смысл – за время одного колебания осциллятора форма его колебаний в связанной системе меняется пренебрежимо мало.

Траектория, определяемая соотношениями (4), представляет собой параметрическую запись произвольного эллипса, включая в качестве частных случаев, проходящие через начало координат отрезки прямых и окружности с центром в том же начале. Введем следующие обозначения (фиг. 2): $\mathbf{e}_1$ – единичный вектор большой полуоси эллипса, r – длина этой полуоси, $\mathbf{e}_2$ – единичный вектор малой полуоси, а k – длина этой полуоси, $\mathbf{e}_3$ – единичный вектор перпендикуляра к плоскости эллипса ($\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$).

Эти векторы являются столбцами матрицы A: $A = \|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\|$. Это матрица позволяет связать запись эллипса в подвижных осях с его записью в инерциальных осях

$$A(\mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t) = \begin{Vmatrix} r\cos(t+\tau) \\ k\sin(t+\tau) \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r\cos\tau \\ k\sin\tau \\ 0 \end{Vmatrix}\cos t + \begin{Vmatrix} -r\sin\tau \\ k\cos\tau \\ 0 \end{Vmatrix}\sin t \tag{5}$$

где угол τ определяет положение точки на эллипсе в момент времени $t = 0$.

Выразим эту матрицу явно через векторы произвольных постоянных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Для этого заметим, что соотношение (5) эквивалентно следующим двум соотношениям

$$A\mathbf{u} = \begin{Vmatrix} r\cos\tau \\ k\sin\tau \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad A\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} -r\sin\tau \\ k\cos\tau \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{6}$$

и вычислим векторное произведение векторов (6)

$$A\mathbf{u}\times A\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} r\cos\tau \\ k\sin\tau \\ 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} -r\sin\tau \\ k\cos\tau \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{Vmatrix} \tag{7}$$

Величина $K = rk$, представляющая собой модуль момента количеств движения колеблющейся частицы, носит название квадратуры (πrk – площадь эллипса).

Поскольку, в силу инвариантности векторного произведения по отношению к группе вращения, имеет место тождество $A\mathbf{u} \times A\mathbf{v} = A(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, то в результате можем записать следующее матричное равенство

$$A\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \begin{Vmatrix} r\cos\tau & -r\sin\tau & 0 \\ k\sin\tau & k\cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & K \end{Vmatrix} = B \tag{8}$$

которое может быть явно разрешено относительно матрицы A, если $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0$:

$$A = B\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^{-1}, \quad (\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq 0) \tag{9}$$

Если $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, то эллипс вырождается в отрезок прямой, информация о повороте объекта вокруг этой прямой теряется.

Если выразить r, k и τ через векторы произвольных постоянных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, то матрица A, определяющая ориентацию эллипса (4) относительно исходного трехгранника, будет выражена только через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, т.е. только через данные наблюдений. Поскольку в случае вращения этого трехгранника эллипс (4) остается неподвижным в инерциальной системе отсчета, то матрица A определяет ориентацию подвижного объекта в абсолютном пространстве.

Для нахождения требуемых параметров вычислим скалярные произведения векторов (6) друг на друга и самих на себя

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{u} = \begin{Vmatrix} r\cos\tau \\ k\sin\tau \\ 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} r\cos\tau \\ k\sin\tau \\ 0 \end{Vmatrix} = r^2\cos^2\tau + k^2\sin^2\tau$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} r\cos\tau \\ k\sin\tau \\ 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -r\sin\tau \\ k\cos\tau \\ 0 \end{Vmatrix} = (k^2 - r^2)\cos\tau\sin\tau \tag{10}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = A\mathbf{v}\cdot A\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} -r\sin\tau \\ k\cos\tau \\ 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -r\sin\tau \\ k\cos\tau \\ 0 \end{Vmatrix} = r^2\sin^2\tau + k^2\cos^2\tau$$

Соотношения (10) позволяют найти

$$\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 = r^2 + k^2, \quad \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 = (r^2 - k^2)\cos 2\tau \tag{11}$$

Это дает возможность получить окончательно

$$\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 \pm \sqrt{(\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2)^2 + 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}\right]}$$

$$\mathrm{tg}\,2\tau = \frac{2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2} \quad \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 \neq 0 \tag{12}$$

Заметим, что входящая в (8) и (9) квадратура $K = rk$ также может вычисляться непосредственно через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Из (12) следует

$$rk = \sqrt{\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2} = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}| \tag{13}$$

В случае $\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2 = 0$ и одновременно $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ угол τ не определен и траекторией точки, как это видно из (12), является окружность.

Равенства (12) совместно с (9) завершают задачу построения матрицы A, т.е. матрицы ориентации подвижного триэдра относительно неподвижного в случаях, когда траектория осциллятора в инерциальной системе отсчета не является ни отрезком прямой, ни окружностью.

Выражения (9) и (12) носят общий характер, они не зависят от того, каким образом вычисляются по данным измерений векторные константы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Между тем эти выражения существенно упрощаются, если конкретизировать процедуру измерения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Будем считать, что для измерений используется отсчетный генератор, частота которого равна частоте рассматриваемого осциллятора. Этот генератор позволяет определять $\mathbf{y}(t)$ в избранные моменты времени. Поэтому, в соответствии с (4) необходимые константы могут быть найдены так

$$\mathbf{u} = \mathbf{y}(2\pi(n-1)), \quad \mathbf{v} = \mathbf{y}(\pi/2 + 2\pi(n-1)), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Далее, посредством обратной связи можно вводить поправку на частоту генератора, пропорциональную скалярному произведению векторов (14): $\dot{\tau} = a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$. В силу (10) $\dot{\tau} = a(k^2 - r^2)\sin\tau\cos\tau$ и при $a > 0$ генератор настраивается на асимптотически устойчивый режим, в котором $\tau = 0$. В выбранные таким образом моменты измерения произведение $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ и формулы (12) приобретают вид

$$r = |\mathbf{u}|, \quad k = |\mathbf{v}|, \quad \tau = 0 \tag{15}$$

что позволяет найти матрицу A в виде

$$A = \begin{Vmatrix} |\mathbf{u}| & 0 & 0 \\ 0 & |\mathbf{v}| & 0 \\ 0 & 0 & |\mathbf{u}\times\mathbf{v}| \end{Vmatrix} \|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^{-1} = \left\| \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|} \right\|^T \tag{16}$$

в последнем переходе в (16) обратная матрица заменена на транспонированную в силу ее ортогональности.

Эллиптическая траектория (4) изотропного пространственного осциллятора (2) не является устойчивой по отношению к сколь угодно малым возмущениям. Так, при малых вариациях жесткости: $\ddot{\mathbf{y}} + (E + C)\mathbf{y} + \ldots = 0$, где E – единичная матрица, а C – малая по норме симметрическая матрица, траектория в общем случае перестает быть плоской и замкнутой, и описанный выше алгоритм построения матрицы A реализован быть не может.

При этом, если возмущение C мало, то выход траектории из плоскости можно интерпретировать как медленный поворот этой плоскости в инерциальном пространстве, т.е. как "уход" построенного выше гироскопа. Само выполнение изложенного алгоритма при этом затруднений не встречает. По-другому дело обстоит в случае эволюции эллипса в самой плоскости. При малых изменениях жесткости эллипс периодически превращается то в окружность, то в отрезок прямой. Именно в этих случаях измерения становятся невозможными.

Если в качестве возмущения появляется малая диссипация $\ddot{\mathbf{y}} + D\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} + \ldots = 0$, то амплитуда колебаний стремится к нулю, и измерения становятся невозможными по этой причине.

Для того чтобы пространственный изотропный осциллятор мог быть практически реализован как гироскоп, необходимо ввести в уравнения (2) управляющие воздействия, сообщающие ему устойчивость по отношению к малым возмущениям. При этом обеспечить устойчивость плоскости колебаний осциллятора, т.е. гарантировать такой гироскоп от "ухода" невозможно в принципе, поэтому мы такую задачу и не будем ставить. С другой стороны, обеспечить орбитальную асимптотическую устойчивость некоторой выделенной эллиптической траектории в плоскости колебаний можно и этого вполне достаточно для реализуемости изложенного выше алгоритма построения матрицы ориентации A.

Такая задача была решена в [1, 2], где было показано, что уравнение

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mu(K - K_0)J\mathbf{x} + \varepsilon(1 - \mathbf{x}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2)\dot{\mathbf{x}} \tag{17}$$

в котором

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}, \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

обладает асимптотически устойчивым интегральным многообразием

$$2E = \mathbf{x}^2 + \dot{\mathbf{x}}^2 = r^2 + k^2 = 1, \quad |\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}| = K = K_0 \tag{18}$$

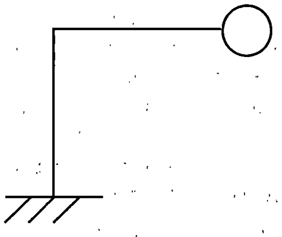
Первое из соотношений (18) означает постоянство энергии колебаний, второе – постоянство квадратуры. Система (17) представляет собой плоский осциллятор, к которому может быть приведен исходный преобразованием с матрицей A – (9). Имея в виду (3), уравнение (17) в трехмерном варианте запишется так

$$\begin{gathered} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mu(K - K_0)\breve{J}\mathbf{y} + \varepsilon(1 - \mathbf{y}^2 - \dot{\mathbf{y}}^2)\dot{\mathbf{y}} + 2A^T\dot{A}\dot{\mathbf{y}} + A^T\ddot{A}\mathbf{y} = 0 \\ \breve{J} = A^T \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} A \end{gathered} \tag{19}$$

При получении этого уравнения было учтено, что квадратура K и полная энергия E являются инвариантами ортогональной группы.

Приложенные к маятнику в соответствии с (19) силы стабилизируют колебания с постоянной амплитудой и постоянной квадратурой и обеспечивают выполнимость изложенных алгоритмов.

Практическая реализация подобного гироскопа может быть выполнена, например, с помощью шести Г-образных упругих стержней, обеспечивающих пространственно изотропный, упругий подвес (фиг. 3).



Фиг. 3

Стержни имеют квадратное сечение и на их гранях размещены пьезоэлектрические датчики силы и датчики информации. Подобного типа приборы следует рассматривать в ряду вибрационных гироскопов невысокой точности для широкого применения [3, 4].

Практическая реализация может быть также осуществлена с помощью однородного шара в электромагнитном подвесе.

Замечание 1. Выше предполагалось, что подвижный объект совершает только вращательные движения вокруг центра осциллятора. Если движение имеет общий характер, то в правых частях системы (2) появляются медленно меняющиеся члены, обусловленные проекциями кажущегося ускорения на оси прибора, в результате чего к гармоническому высокочастотному решению (4) следует добавить медленно меняющуюся составляющую. В этом случае перед реализацией описанного выше алгоритма необходимо при помощи фильтра выделить из сигнала гармоническую часть. При этом медленно меняющаяся часть, перепроектированная при помощи матрицы A на оси инерциального трехгранника, дает информацию об абсолютном ускорении. Таким образом, рассмотренный выше прибор может одновременно играть роль и датчика трехмерной угловой ориентации и трехмерного датчика абсолютного ускорения. Дискретную фильтрацию можно осуществить, если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ при вычислении A определять так $\mathbf{u} = [\mathbf{y}(2\pi(n-1)) - \mathbf{y}(\pi + 2\pi(n-1))]/2$. Информацию об ускорении можно получить, вычисляя $[\mathbf{y}(2\pi(n-1)) + \mathbf{y}(\pi + 2\pi(n-1))]/2$.

Замечание 2. Рассмотренный выше прибор в отличие от вибрационных гироскопов типа [3, 4] не является уравновешенным: колеблющийся осциллятор нагружает основание реакциями упругих связей. Представляется возможным решение этой проблемы чисто конструкторскими методами посредством совмещения двух противофазных осцилляторов рассмотренного типа.

Выражаю благодарность Ж.М. Карону за стимулирование интереса к рассмотренному вопросу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
2. *Журавлёв В.Ф.* Управляемый маятник Фуко, как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
3. *Leger P.* Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd Saint-Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. T. 1. – Saint-Petersburg, 1996. – P. 143–149.
4. *Charcosset Cl., Bonjour Ch., …* Gyrometre a resonateur mecanique // Demande de brevet europeen. EP 0 773 429 A1. Bulletin 1996/20 p.

Москва

Поступила в редакцию
7.12.2004