

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ ФАЗОВЫМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ ВО ВКЛЮЧЕНИИ

Рассматривается задача о фазовых превращениях в некоторой области упругого пространства, выражающихся изменением формы, размеров и упругих свойств этой области. С помощью разработанного ранее обобщения метода Эшелби построены интегральные уравнения относительно компонент тензора напряжений во включении, в котором произошли фазовые превращения. В случае, когда включение имеет форму эллиптического цилиндра, получены явные аналитические выражения для компонент тензора напряжений как внутри, так и вне включения.

1. Введение. Процессы фазовых переходов в деформируемых твердых телах нередко сопровождаются образованием элементов новой фазы, характеристики упругости которой отличаются от характеристик упругости исходного материала. В качестве примера можно указать процессы мартенситного превращения в системах типа Fe_3Pt (см. [1] и указанную там литературу) и автокаталитического фазового превращения в керамиках на основе циркония (см. [2], где имеются дальнейшие ссылки). Вместе с тем в работе [3], а также в целом ряде последовавших за ней публикаций (см., например [4, 5] и имеющиеся там ссылки) предполагалось, что в результате фазовых превращений, происходящих в некоторой области упругого пространства, изменяются лишь ее размеры и форма, а упругие свойства остаются неизменными. В [6] был предложен подход к учету изменения упругих свойств претерпевающего фазовые превращения включения, имеющего форму эллипсоида (см. также [1]), однако, явные формулы для напряжений получены не были.

Цель данной статьи – развитие результатов Эшелби [3] на случай, когда фазовые превращения приводят также к изменению упругих свойств материала. Ниже на основе обобщения метода Эшелби, развитого в [7, 8], выводятся интегральные уравнения относительно компонент тензора напряжений внутри включения. В случае, когда включение имеет форму эллиптического цилиндра, получены аналитические выражения для напряжений как внутри, так и вне включения.

2. Постановка задачи. Предположим, аналогично тому как это сделано в [3], что в области G изотропного упругого пространства, чьи упругие постоянные λ_M и μ_M , а коэффициент Пуассона ν_M , происходят фазовые превращения, заключающиеся в изменении формы, размеров и упругих свойств этой области. Предположим также, что изменения размеров и формы выражаются деформациями, которые в условиях отсутствия стеснения равнялись бы $e_{ij}^P(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. В дальнейшем будем полагать, что

$$e_{ij}^P(x) = \begin{cases} e_{ij}^P = \text{const}, & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases}$$

Постоянные Ламе и коэффициент Пуассона области G после фазовых превращений обозначим λ_I , μ_I и ν_I соответственно. Пусть $e_{ij}^I(x)$ и $\sigma_{ij}^I(x)$ – компоненты тензоров

полных деформаций и напряжений во включении ($x \in G$), а $e_{ij}^M(x)$ и $\sigma_{ij}^M(x)$ – полные деформации и напряжения в матрице ($x \notin G$). Введем обозначения для полных деформаций и напряжений во всем пространстве

$$e_{ij}(x) = \begin{cases} e_{ij}^I(x), & x \in G \\ e_{ij}^M(x), & x \notin G \end{cases}, \quad \sigma_{ij}(x) = \begin{cases} \sigma_{ij}^I(x), & x \in G \\ \sigma_{ij}^M(x), & x \notin G \end{cases}$$

Полные деформации складываются из деформаций фазового превращения и возникающих вследствие превращений деформаций стеснения, которые будем обозначать $e_{ij}^F(x)$:

$$e_{ij}(x) = e_{ij}^F(x) + e_{ij}^P(x) \quad (2.1)$$

Возникающие в теле напряжения $\sigma_{ij}(x)$ связаны с деформациями стеснения законом Гука. При сделанных предположениях о том, что материал как до, так и после фазовых превращений остается изотропным и линейно-упругим, имеем

$$\sigma_{ij}^I(x) = \lambda_I \theta^F(x) \delta_{ij} + 2\mu_I e_{ij}^F(x), \quad \theta^F(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^F(x), \quad x \in G \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij}^M(x) = \lambda_M \theta^F(x) \delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^F(x), \quad x \notin G \quad (2.3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Обозначим перемещения во включении и в матрице через $u^I(x) = (u_1^I(x), u_2^I(x), u_3^I(x))$ и $u^M(x) = (u_1^M(x), u_2^M(x), u_3^M(x))$ соответственно. Вектор-функцию перемещений во всем пространстве обозначим $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$:

$$u(x) = \begin{cases} u^I(x), & x \in G \\ u^M(x), & x \notin G \end{cases}$$

Полные деформации выражаются через перемещения следующим образом:

$$e_{ij}^I(x) = (u_{i,j}^I(x) + u_{j,i}^I(x))/2, \quad x \in G \quad (2.4)$$

$$e_{ij}^M(x) = (u_{i,j}^M(x) + u_{j,i}^M(x))/2, \quad x \notin G \quad (2.5)$$

Как во включении, так и в матрице должны выполняться уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}^I(x) = 0 \quad (j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3), \quad x \in G \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij,j}^M(x) = 0 \quad (j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3), \quad x \notin G \quad (2.7)$$

Здесь и ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Предположим, что между включением и матрицей имеется полное сцепление. Это условие выражается следующими равенствами:

$$\sigma_{ij}^I(x') n_j(x') = \sigma_{ij}^M(x') n_j(x'), \quad x' \in \partial G \quad (2.8)$$

$$u^I(x') = u^M(x'), \quad x' \in \partial G \quad (2.9)$$

Здесь ∂G – граница области G , $n(x') = (n_1(x'), n_2(x'), n_3(x'))$ – единичный вектор внешней по отношению к G нормали к ∂G в точке x' .

Из (2.6)–(2.8) следует, что во всем пространстве справедливы уравнения

$$\sigma_{ij,j}(x) = 0, \quad x \in R^3 \quad (2.10)$$

Из (2.4), (2.5) и (2.9) следует, что во всем пространстве полные деформации выражаются через перемещения с помощью формулы

$$e_{ij}(x) = (u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x))/2, \quad x \in R^3 \quad (2.11)$$

3. Вывод интегральных уравнений. Согласно (2.2) и (2.3) деформации стеснения выражаются через напряжения следующим образом:

$$e_{ij}^F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_I} \left[\sigma_{ij}(x) - \frac{\nu_I}{1+\nu_I} \Theta(x) \delta_{ij} \right], & x \in G \\ \frac{1}{2\mu_M} \left[\sigma_{ij}(x) - \frac{\nu_M}{1+\nu_M} \Theta(x) \delta_{ij} \right], & x \notin G \end{cases}, \quad \Theta(x) = \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}(x) \quad (3.1)$$

Если бы упругие постоянные не изменились в результате фазовых превращений, то при заданных напряжениях $\sigma_{ij}(x)$ связанные с ними законом Гука деформации $e_{ij}^\Phi(x)$ имели бы вид

$$e_{ij}^\Phi(x) = \frac{1}{2\mu_M} \left[\sigma_{ij}(x) - \frac{\nu_M}{1+\nu_M} \Theta(x) \delta_{ij} \right], \quad x \in R^3 \quad (3.2)$$

Разницу между истинными деформациями стеснения $e_{ij}^F(x)$ и деформациями $e_{ij}^\Phi(x)$ обозначим $e_{ij}^{DP}(x)$:

$$e_{ij}^F(x) = e_{ij}^\Phi(x) + e_{ij}^{DP}(x) \quad (3.3)$$

Из (3.1)–(3.3) следует

$$e_{ij}^{DP}(x) = \frac{1}{2\mu_I} \left[\sigma_{ij}(x) - \frac{\nu_I}{1+\nu_I} \Theta(x) \delta_{ij} \right] - \frac{1}{2\mu_M} \left[\sigma_{ij}(x) - \frac{\nu_M}{1+\nu_M} \Theta(x) \delta_{ij} \right], \quad x \in G \quad (3.4)$$

$$e_{ij}^{DP}(x) = 0, \quad x \notin G$$

Примем $e_{ij}^{DP}(x)$ за дополнительные деформации фазовых превращений. Из (2.1) и (3.3) имеем

$$e_{ij}(x) = e_{ij}^\Phi(x) + e_{ij}^{DP}(x) + e_{ij}^P(x) \quad (3.5)$$

Определим функции, связанные с деформациями, входящими в (3.5), законом Гука с упругими постоянными λ_M и μ_M .

$$\sigma_{ij}^d(x) = \lambda_M \theta(x) \delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}(x), \quad \theta(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}(x) \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ij}^{\Phi}(x) = \lambda_M \theta^{\Phi}(x) \delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^{\Phi}(x), \quad \theta^{\Phi}(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^{\Phi}(x) \quad (3.7)$$

$$\sigma_{ij}^{DP}(x) = \lambda_M \theta^{DP}(x) \delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^{DP}(x), \quad \theta^{DP}(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^{DP}(x) \quad (3.8)$$

$$\sigma_{ij}^P(x) = \lambda_M \theta^P(x) \delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^P(x), \quad \theta^P(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^P(x) \quad (3.9)$$

Из (3.2) и (3.7) следует

$$\sigma_{ij}^{\Phi}(x) = \sigma_{ij}(x) \quad (3.10)$$

Из (3.4) и (3.8), имеем

$$\sigma_{ij}^{DP}(x) = \frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{ij}(x) + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2\nu_M)} \Theta(x) \delta_{ij} - \sigma_{ij}(x), \quad x \in G \quad (3.11)$$

$$\sigma_{ij}^{DP}(x) = 0, \quad x \notin G$$

Из (3.5)–(3.9) следует

$$\sigma_{ij}^d(x) = \sigma_{ij}^{\Phi}(x) + \sigma_{ij}^{DP}(x) + \sigma_{ij}^P(x) \quad (3.12)$$

Из (3.10) и (3.12), имеем

$$\sigma_{ij}^d(x) - \sigma_{ij}^{DP}(x) - \sigma_{ij}^P(x) = \sigma_{ij}(x) \quad (3.13)$$

Из (2.10) и (3.13) получаем

$$\sigma_{ij,j}^d(x) - \sigma_{ij,j}^{DP}(x) - \sigma_{ij,j}^P(x) = 0 \quad (3.14)$$

Так как $\sigma_{ij}^P(x) = \text{const}$ при $x \in G$ и $\sigma_{ij}^P(x) = 0$ при $x \notin G$, то имеет место равенство (см. [7]):

$$\sigma_{ij,j}^P(x) = -t_i^P(x') \delta(\partial G), \quad t_i^P(x') = \sigma_{ij}^P(x') n_j(x'), \quad x' \in \partial G \quad (3.15)$$

где $\delta(\partial G)$ – дельта-функция, сосредоточенная на границе области G .

Аналогично

$$\sigma_{ij,j}^{DP}(x) = \sigma_{ij,j}^{*DP}(x) - t_i^{DP}(x') \delta(\partial G), \quad t_i^{DP}(x') = \sigma_{ij}^{DP}(x') n_j(x'), \quad \sigma_{ij,j}^{*DP}(x) = \begin{cases} \sigma_{ij,j}^{DP}(x), & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases} \quad (3.16)$$

Из (3.14)–(3.16), имеем

$$\sigma_{ij,j}^d(x) - \sigma_{ij,j}^{*DP}(x) + t_i^{DP}(x') \delta(\partial G) + t_i^P(x') \delta(\partial G) = 0 \quad (3.17)$$

Из (2.11), (3.6) и (3.17) следует

$$\mu_M \Delta u_i(x) + (\lambda_M + \mu_M) \theta_i(x) - \sigma_{ij,j}^{*DP}(x) + t_i^{DP}(x') \delta(\partial G) + t_i^P(x') \delta(\partial G) = 0 \quad (3.18)$$

Предполагается, что $\lim u_i(x) = 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Из (3.18) видно, что функции $u_i(x)$ являются решениями уравнений Ламе в однородном пространстве с упругими постоянными λ_M и μ_M и объемными силами $-\sigma_{ij,j}^{*DP}(x) + t_i^{DP}(x)\delta(\partial G) + t_i^P(x)\delta(\partial G)$.

Пусть $T_{ij}^k(x)$ – тензор напряжений, отвечающий действию единичной силы в однородном изотропном упругом пространстве с постоянными Ламе λ_M и μ_M , сосредоточенной в начале координат и направленной вдоль оси x_k : $T_{ij,j}^k(x) + \delta_{ik}\delta(x) = 0$.

Из (3.18) и определения $T_{ij}^k(x)$ следует равенство

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^d(x) = & - \int_G T_{ij}^k(x-y)\sigma_{km,m}^{DP}(y)dy + \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y)t_k^{DP}(y)dS_y + \\ & + \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y)t_k^P(y)dS_y \end{aligned} \quad (3.19)$$

Проводя в (3.19) в интеграле по G интегрирование по частям, получим

$$\sigma_{ij}^d(x) = - \int_G \frac{\partial T_{ij}^k(x-y)}{\partial x_m} \sigma_{km}^{DP}(y)dy + \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y)t_k^P(y)dS_y \quad (3.20)$$

Из (3.11), (3.13) и (3.20) следует, что внутри области G имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{ij}(x) + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta(x)\delta_{ij} + \sigma_{ij}^P = \\ = - \int_G \frac{\partial T_{ij}^k(x-y)}{\partial x_m} \left[\frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{km}(y) + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta(y)\delta_{km} - \sigma_{km}(y) \right] dy + \\ + \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y)t_k^P(y)dS_y \end{aligned} \quad (3.21)$$

Система (3.21) представляет собой систему интегральных уравнений относительно компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(x)$ внутри включения G . После их определения напряжения $\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}^d(x)$ вне области G могут быть вычислены по формуле (3.20).

4. Аналитическое решение для включения, имеющего форму эллиптического цилиндра. В случае если напряжения $\sigma_{ij}(x)$, а вследствие (3.11) и функции $\sigma_{ij}^{DP}(x)$, постоянны при $x \in G$, уравнения (3.17) и (3.18) принимают вид

$$\sigma_{ij,j}^d(x) + t_i^{DP}(x)\delta(\partial G) + t_i^P(x)\delta(\partial G) = 0 \quad (4.1)$$

$$\mu_M \Delta u_i(x) + (\lambda_M + \mu_M)\theta_{,i}(x) + t_i^{DP}(x)\delta(\partial G) + t_i^P(x)\delta(\partial G) = 0 \quad (4.2)$$

Заметим, что уравнения (3.21) совершенно аналогичны уравнениям, полученным в [8], и отвечающим задаче о включении в бесконечном изотропном упругом пространстве в условиях, когда на бесконечности заданы постоянные напряжения. Как известно, в задаче о включении, имеющем форму эллипсоида, напряжения внутри

включения постоянны (см. [3]). Отсюда следует, что напряжения $\sigma_{ij}(x)$, являющиеся решениями (3.21), а вместе с ними и фиктивные напряжения $\sigma_{ij}^d(x)$, являющиеся решениями (4.1), (4.2), также постоянны внутри включения, если оно имеет форму эллипсоида. Ниже рассматривается предельный случай, когда включение G является эллиптическим цилиндром, ось которого совпадает с осью x_3 . Сечение G плоскостью, перпендикулярной оси x_3 , обозначим через D . По предположению область D является эллипсом $D = \{x = (x_1, x_2): x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 \leq 1\}$. Всюду ниже под x будем подразумевать точку на плоскости $x = (x_1, x_2)$. Предположим также, что от нуля могут отличаться только собственные деформации фазовых превращений $e_{11}^P, e_{12}^P, e_{22}^P$. В принятых предположениях реализуются условия плоской деформации и уравнения (4.2) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mu_M \Delta u_i(x) + (\lambda_M + \mu_M) \theta_{,i}(x) + t_i^{DP}(x') \delta(\partial D) + t_i^P(x') \delta(\partial D) &= 0 \\ x = (x_1, x_2), \quad x' = (x'_1, x'_2) \in \partial D \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

На бесконечности, как и выше, предполагаются выполненными условия $\lim u_i(x) = 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Согласно результатам [7], вычисленные с помощью решений (4.3) фиктивные напряжения σ_{ij}^d постоянны в D и равны

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^d &= -\frac{1}{2(1-\nu_M)} \frac{1}{(a_1+a_2)} \left\{ (\sigma_{11}^{DP} + \sigma_{11}^P) a_2 \left[-2(1-\nu_M) - \frac{a_1}{a_1+a_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_{22}^{DP} + \sigma_{22}^P) a_1 \left[\frac{a_2}{a_1+a_2} - 2\nu_M \right] \right\} \\ \sigma_{12}^d &= \frac{\sigma_{12}^{DP} + \sigma_{12}^P}{2(1-\nu_M)} \left\{ 1 - 2\nu_M + \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1+a_2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^d &= -\frac{1}{2(1-\nu_M)} \frac{1}{(a_1+a_2)} \left\{ (\sigma_{11}^{DP} + \sigma_{11}^P) a_2 \left[\frac{a_1}{a_1+a_2} - 2\nu_M \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_{22}^{DP} + \sigma_{22}^P) a_1 \left[-2(1-\nu_M) - \frac{a_2}{a_1+a_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Подставив (3.11) и (3.13) во второе из уравнений (4.4), получим

$$\frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{12} + \sigma_{12}^P = \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{12} + \sigma_{12}^P \right) \left\{ 1 - 2\nu_M + \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1+a_2)^2} \right\} / [2(1-\nu_M)]$$

Отсюда находим напряжения $\sigma_{12} = \sigma_{12}^I$ внутри эллипса

$$\sigma_{12}^I = \frac{-2a_1 a_2 \mu_I \sigma_{12}^P}{2a_1 a_2 \mu_M + \mu_I [(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]} \quad (4.5)$$

Подставив (3.11) и (3.13) в первое и третье уравнения (4.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{11} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta + \sigma_{11}^P &= \frac{1}{2(1 - v_M)} \frac{1}{(a_1 + a_2)} \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{11} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta + \sigma_{11}^P \right] a_2 \left[-2(1 - v_M) - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{22} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta + \sigma_{22}^P \right] a_1 \left[\frac{a_2}{a_1 + a_2} - 2v_M \right] \right\} \\ \frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{22} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta + \sigma_{22}^P &= \frac{1}{2(1 - v_M)} \frac{1}{(a_1 + a_2)} \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{11} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta + \sigma_{11}^P \right] a_2 \left[\frac{a_1}{a_1 + a_2} - 2v_M \right] + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{22} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 + v_I)(1 - 2v_M)} \Theta + \sigma_{22}^P \right] a_1 \left[-2(1 - v_M) - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Учитывая, что при плоской деформации внутри включения $\Theta = (1 + v_I)(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{11} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 - 2v_M)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{11}^P &= \frac{1}{2(1 - v_M)} \frac{1}{(a_1 + a_2)} \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{11} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 - 2v_M)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{11}^P \right] a_2 \left[-2(1 - v_M) - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \right] + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{22} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 - 2v_M)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{22}^P \right] a_1 \left[\frac{a_2}{a_1 + a_2} - 2v_M \right] \right\} \\ \frac{\mu_M}{\mu_I} \sigma_{22} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 - 2v_M)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{22}^P &= \frac{1}{2(1 - v_M)} \frac{1}{(a_1 + a_2)} \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{11} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 - 2v_M)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{11}^P \right] a_2 \left[\frac{a_1}{a_1 + a_2} - 2v_M \right] + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I} \sigma_{22} + \frac{\mu_M(v_M - v_I)}{\mu_I(1 - 2v_M)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \sigma_{22}^P \right] a_1 \left[-2(1 - v_M) - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Собирая в этих условиях коэффициенты при σ_{11} , σ_{22} , σ_{11}^P и σ_{22}^P , получим

$$\frac{2a_1\mu_M(1 - v_I) + 2a_2\mu_I(1 - v_M) - (\mu_M - \mu_I)a_1a_2/(a_1 + a_2)}{2\mu_I(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{11} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2a_1(\mu_I v_M - \mu_M v_I) + (\mu_M - \mu_I)a_1 a_2 / (a_1 + a_2)}{2\mu_I(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{22} = \\
 & = \frac{a_1 a_2 / (a_1 + a_2) - 2a_1(1 - v_M)}{2(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{11}^P - \frac{a_1 a_2 / (a_1 + a_2) - 2v_M a_1}{2(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{22}^P \\
 & \frac{2a_2(\mu_I v_M - \mu_M v_I) + (\mu_M - \mu_I)a_1 a_2 / (a_1 + a_2)}{2\mu_I(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{11} + \\
 & + \frac{2a_2\mu_M(1 - v_I) + 2a_1\mu_I(1 - v_M) - (\mu_M - \mu_I)a_1 a_2 / (a_1 + a_2)}{2\mu_I(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{22} = \\
 & = \frac{a_1 a_2 / (a_1 + a_2) - 2v_M a_2}{2(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{11}^P + \frac{a_1 a_2 / (a_1 + a_2) - 2a_2(1 - v_M)}{2(1 - v_M)(a_1 + a_2)} \sigma_{22}^P
 \end{aligned}$$

После очевидных упрощений приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}
 & \{2a_1\mu_M(1 - v_I) + 2a_2\mu_I(1 - v_M) - (\mu_M - \mu_I)a_1 a_2 / (a_1 + a_2)\} \sigma_{11} + \\
 & + \{2a_1(\mu_I v_M - \mu_M v_I) + (\mu_M - \mu_I)a_1 a_2 / (a_1 + a_2)\} \sigma_{22} = \\
 & = \mu_I \{ [a_1 a_2 / (a_1 + a_2) - 2a_1(1 - v_M)] \sigma_{11}^P + [2v_M a_1 - a_1 a_2 / (a_1 + a_2)] \sigma_{22}^P \} \quad (4.6) \\
 & \{2a_2(\mu_I v_M - \mu_M v_I) + (\mu_M - \mu_I)a_1 a_2 / (a_1 + a_2)\} \sigma_{11} + \\
 & + \{2a_2\mu_M(1 - v_I) + 2a_1\mu_I(1 - v_M) - (\mu_M - \mu_I)a_1 a_2 / (a_1 + a_2)\} \sigma_{22} = \\
 & = \mu_I \{ [2v_M a_2 - a_1 a_2 / (a_1 + a_2)] \sigma_{11}^P + [a_1 a_2 / (a_1 + a_2) - 2a_2(1 - v_M)] \sigma_{22}^P \}
 \end{aligned}$$

Упростим запись системы уравнений (4.6). Для этого сложим уравнения, входящие в (4.6), и полученное уравнение сократим на множитель 2. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
 & [a_1\mu_M + a_2\mu_I - v_I(a_1 + a_2)\mu_M] \sigma_{11} + [a_1\mu_I + a_2\mu_M - v_I(a_1 + a_2)\mu_M] \sigma_{22} = \\
 & = \mu_I \{ [v_M a_2 - a_1(1 - v_M)] \sigma_{11}^P + [v_M a_1 - a_2(1 - v_M)] \sigma_{22}^P \} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Умножив первое из уравнений (4.6) на a_2 , а второе на a_1 и вычтя из первого уравнения второе, получим

$$\begin{aligned}
 & a_2[a_1\mu_M + a_2\mu_I + (a_1 + a_2)\mu_I(1 - 2v_M)] \sigma_{11} + \\
 & + a_1[-(a_1\mu_I + a_2\mu_M) - (a_1 + a_2)\mu_I(1 - 2v_M)] \sigma_{22} = a_1 a_2 \mu_I [-\sigma_{11}^P + \sigma_{22}^P] \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (4.7), (4.8), находим напряжения $\sigma_{11} = \sigma_{11}^I$ и $\sigma_{22} = \sigma_{22}^I$ внутри эллипса. Для сокращения записи введем некоторые обозначения:

$$\begin{aligned}
 T & = a_1\mu_M + a_2\mu_I, \quad S = a_1\mu_I + a_2\mu_M, \quad R_0 = -T \cdot S - \mu_I(a_1 T + a_2 S)(1 - 2v_M) + \\
 & + \mu_M v_I(a_1 S + a_2 T) + (a_1 + a_2)^2 \mu_M \mu_I v_I(1 - 2v_M)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 & = a_1 \{ \sigma_{11}^P [\mu_M a_2(1 - v_M - v_I) + \mu_I(2a_1(1 - v_M)^2 - a_2 v_M(1 - 2v_M))] + \\
 & + \sigma_{22}^P [\mu_M a_2(v_I - v_M) + \mu_I(1 - v_M)((1 - 2v_M)a_2 - 2v_M a_1)] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & a_2 \{ \sigma_{11}^P [\mu_M a_1 (v_I - v_M) + \mu_I (1 - v_M) ((1 - 2v_M) a_1 - 2v_M a_2)] + \\ & + \sigma_{22}^P [\mu_M a_1 (1 - v_M - v_I) + \mu_I (2a_2 (1 - v_M)^2 - a_1 v_M (1 - 2v_M))] \} \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений получаем окончательные выражения для напряжений внутри включения

$$\sigma_{11}^I = \mu_I Q_1 / R_0, \quad \sigma_{22}^I = \mu_I Q_2 / R_0 \quad (4.9)$$

Из (3.11) и (4.5), (4.9) находим величины σ_{ij}^{DP} внутри эллипса

$$\sigma_{12}^{DP} = \frac{-2a_1 a_2 (\mu_M - \mu_I) \sigma_{12}^P}{2a_1 a_2 \mu_M + \mu_I [(1 - 2v_M)(a_1 + a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{11}^{DP} = \frac{[\mu_M (1 - v_M - v_I) - \mu_I (1 - 2v_M)] Q_1 + \mu_M (v_M - v_I) Q_2}{(1 - 2v_M) R_0} \quad (4.11)$$

$$\sigma_{22}^{DP} = \frac{\mu_M (v_M - v_I) Q_1 + [\mu_M (1 - v_M - v_I) - \mu_I (1 - 2v_M)] Q_2}{(1 - 2v_M) R_0} \quad (4.12)$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – некоторый вектор. Определим функции $A_{11}(\alpha)$, $A_{12}(\alpha)$ и $A_{22}(\alpha)$, заданные вне эллиптического цилиндра и зависящие от α как от параметра

$$\begin{aligned} A_{11}(\alpha) = & -\frac{1}{(1 - v_M)} \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \frac{1}{\rho^2} \left\{ \alpha_1 \left[\left(2(1 - v_M) + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \text{Re}(\Phi(\rho, \theta)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \text{Re}(\Psi(\rho, \theta)) \right] + \alpha_2 \frac{4a_1}{a_1 + a_2} \left[\text{Im}(\Phi(\rho, \theta)) - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \text{Im}(\Psi(\rho, \theta)) \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_3 \left[- \left(2v_M + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \text{Re}(\Phi(\rho, \theta)) + \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \text{Re}(\Psi(\rho, \theta)) \right] \right\} \\ A_{12}(\alpha) = & -\frac{1}{(1 - v_M)} \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \frac{1}{\rho^2} \left\{ \alpha_1 \left[\left(1 - 2v_M + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \text{Im}(\Phi(\rho, \theta)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \text{Im}(\Psi(\rho, \theta)) \right] + 2\alpha_2 \left[\frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \text{Re}(\Psi(\rho, \theta)) - \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \text{Re}(\Phi(\rho, \theta)) \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_3 \left[\left(1 - 2v_M - \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \text{Im}(\Phi(\rho, \theta)) + \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \text{Im}(\Psi(\rho, \theta)) \right] \right\} \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22}(\alpha) = & -\frac{1}{(1 - v_M)} \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \frac{1}{\rho^2} \left\{ \alpha_1 \left[\left(2v_M - \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \text{Re}(\Phi(\rho, \theta)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \text{Re}(\Psi(\rho, \theta)) \right] + \alpha_2 \frac{4a_2}{a_1 + a_2} \left[\text{Im}(\Phi(\rho, \theta)) + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \text{Im}(\Psi(\rho, \theta)) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \alpha_3 \left[\left(-2(1 - \nu_M) + \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \operatorname{Re}(\Phi(\rho, \theta)) - \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \operatorname{Re}(\Psi(\rho, \theta)) \right] \Bigg\}$$

$$y_1 = \rho \cos \theta, \quad y_2 = \rho \sin \theta, \quad y_i = x_i / a_i, \quad \rho \geq 1, \quad \Phi(\rho, \theta) = \frac{2e^{2i\theta}}{R(1+w+R)}, \quad w = e^{2i\theta} \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)$$

$$R = \sqrt{1 - 2uw + w^2}, \quad \sqrt{1} = 1, \quad u = \frac{2}{\rho^2} - 1, \quad \Psi(\rho, \theta) = \frac{-2e^{4i\theta} [(w-u)(1+w+2R) + R^2]}{R^3(1+w+R)^2}$$

Re и Im обозначают вещественную и мнимую части числа соответственно; для R подразумевается главное значение корня.

Определим векторы $\sigma^P = (\sigma_{11}^P, \sigma_{12}^P, \sigma_{22}^P)$ и $\sigma^{DP} = (\sigma_{11}^{DP}, \sigma_{12}^{DP}, \sigma_{22}^{DP})$. Из уравнений (4.3) и результатов [7] следует, что вне включения напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^M$ выражаются следующими формулами:

$$\sigma_{11}^M = A_{11}(\sigma^{DP} + \sigma^P), \quad \sigma_{12}^M = A_{12}(\sigma^{DP} + \sigma^P), \quad \sigma_{22}^M = A_{22}(\sigma^{DP} + \sigma^P) \quad (4.14)$$

Поскольку $A_{ij}(\sigma^{DP} + \sigma^P) = A_{ij}(\sigma^{DP}) + A_{ij}(\sigma^P)$, то формулы (4.14) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^M &= \sigma_{11}^{M0} + \sigma_{11}^{MD}, & \sigma_{12}^M &= \sigma_{12}^{M0} + \sigma_{12}^{MD}, & \sigma_{22}^M &= \sigma_{22}^{M0} + \sigma_{22}^{MD} \\ \sigma_{ij}^{M0} &= A_{ij}(\sigma^P), & \sigma_{ij}^{MD} &= A_{ij}(\sigma^{DP}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Заметим, что напряжения σ_{ij}^{M0} отвечают случаю, когда фазовые превращения, происходящие в области эллиптического цилиндра в пространстве с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M , выражаются собственными деформациями e_{ij}^P превращенной области, но не приводят к изменению упругих свойств. Напряжения σ_{ij}^{MD} дают поправку, связанную с изменением упругих свойств.

Подставив (4.10)–(4.12) в выражения для σ_{ij}^{MD} и воспользовавшись (4.13), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{MD} &= \frac{1}{(1 - \nu_M)(a_1 + a_2)^2 \rho^2} \left\{ \frac{a_1 a_2}{R_0} \operatorname{Re}(\Phi(\rho, \theta)) \left[Q_1 \left(2\mu_M(1 - \nu_I) - 2\mu_I(1 - \nu_M) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\mu_M - \mu_I) \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) - Q_2 \left(2(\mu_M \nu_I - \mu_I \nu_M) + (\mu_M - \mu_I) \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \right] + \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \times \\ &\quad \times \frac{\operatorname{Re}(\Psi(\rho, \theta))}{R_0} (\mu_M - \mu_I)(Q_2 - Q_1) - \frac{8a_1^2 a_2 (\mu_M - \mu_I) \sigma_{12}^P}{[2a_1 a_2 \mu_M + \mu_I((1 - 2\nu_M)(a_1 + a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2)](a_1 + a_2)} \times \\ &\quad \left. \times \left[\operatorname{Im}(\Phi(\rho, \theta)) - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \operatorname{Im}(\Psi(\rho, \theta)) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{12}^{MD} = \frac{1}{(1 - \nu_M)(a_1 + a_2)^2 \rho^2} \left\{ \frac{a_1 a_2}{R_0} \operatorname{Im}(\Phi(\rho, \theta)) \left[(Q_1 + Q_2)(\mu_M(1 - 2\nu_I) - \mu_I(1 - 2\nu_M)) + \right. \right.$$

$$+ (Q_1 - Q_2)(\mu_M - \mu_I) \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \left] + \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\text{Im}(\Psi(\rho, \theta))}{R_0} (Q_2 - Q_1)(\mu_M - \mu_I) - \right. \quad (4.16)$$

$$\left. \frac{4a_1 a_2 (\mu_M - \mu_I) \sigma_{12}^P}{2a_1 a_2 \mu_M + \mu_I ((1 - 2\nu_M)(a_1 + a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \text{Re}(\Psi(\rho, \theta)) - \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \text{Re}(\Phi(\rho, \theta)) \right] \right\} \\ \sigma_{22}^{MD} = \frac{1}{(1 - \nu_M)} \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\text{Re}(\Phi(\rho, \theta))}{R_0} \left[Q_1 \left(2(\mu_M \nu_I - \mu_I \nu_M) - (\mu_M - \mu_I) \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + Q_2 \left(2\mu_I (1 - \nu_M) - 2\mu_M (1 - \nu_M) + (\mu_M - \mu_I) \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \right] + \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{Re}(\Psi(\rho, \theta))}{R_0} (\mu_M - \mu_I) (Q_1 - Q_2) - \frac{8a_1 a_2^2 (\mu_M - \mu_I) \sigma_{12}^P}{[2a_1 a_2 \mu_M + \mu_I ((1 - 2\nu_M)(a_1 + a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2)] (a_1 + a_2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\text{Im}(\Phi(\rho, \theta)) + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \text{Im}(\Psi(\rho, \theta)) \right] \right\}$$

Помимо напряжений важную роль для описания процессов фазовых переходов играет величина упругой энергии матрицы и включения. Согласно [3] она может быть записана в виде

$$E = -\frac{1}{2} \int_G \sigma_{ij}^I e_{ij}^P dx \quad (4.17)$$

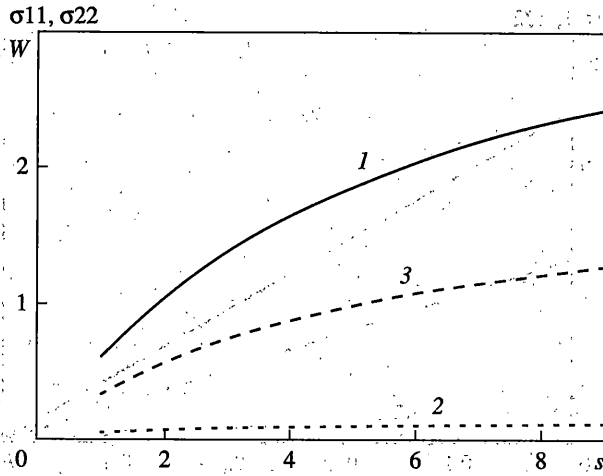
В условиях плоской деформации, когда область G является эллиптическим цилиндром, величина упругой энергии на единицу длины в направлении оси цилиндра, согласно (4.17) и с учетом постоянства напряжений σ_{ij}^I , преобразуется к виду

$$E = -(\sigma_{11}^I e_{11}^P + 2\sigma_{12}^I e_{12}^P + \sigma_{22}^I e_{22}^P) \pi a_1 a_2 / 2 \quad (4.18)$$

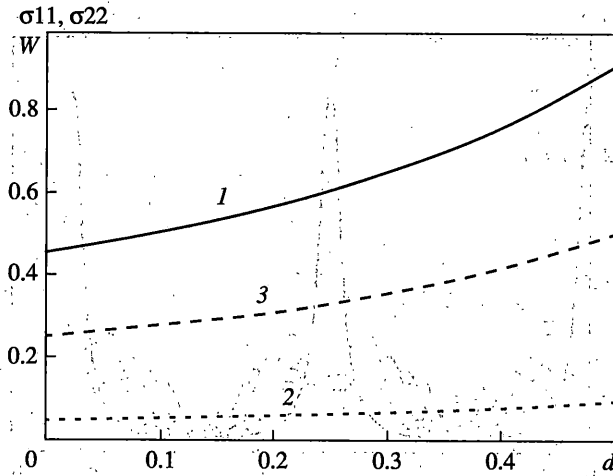
5. Результаты расчетов. В качестве иллюстрации приведем результаты расчетов по аналитическим формулам (4.5), (4.9) и (4.14). Во всех представленных примерах принято, что отношение полуосей эллипса $a_2 : a_1 = 1 : 10$. Предположим также, что собственные деформации включения e_{ij}^P приводят к следующим величинам σ_{ij}^P , рассчитанным по формуле (3.9):

$$\sigma_{11}^P = \sigma_{22}^P = -\sigma, \quad \sigma > 0, \quad \sigma_{12}^P = 0 \quad (5.1)$$

Примем $\nu_I = \nu_M = 0.25$. На фиг. 1 представлены зависимости нормированных напряжений внутри включения $\sigma_{11} = \sigma_{11}^I / \sigma$ (кривая 1) и $\sigma_{22} = \sigma_{22}^I / \sigma$ (кривая 2) от отношения модулей сдвига включения и матрицы $s = \mu_I / \mu_M$. Величина s варьируется от 1 до 10.



Фиг. 1



Фиг. 2

Заметим, что $\sigma_{12}^I = 0$ при условии (5.1). Кроме того, на этом рисунке представлена зависимость $W(s)$ (кривая 3), где W – безразмерная величина упругой энергии матрицы и включения

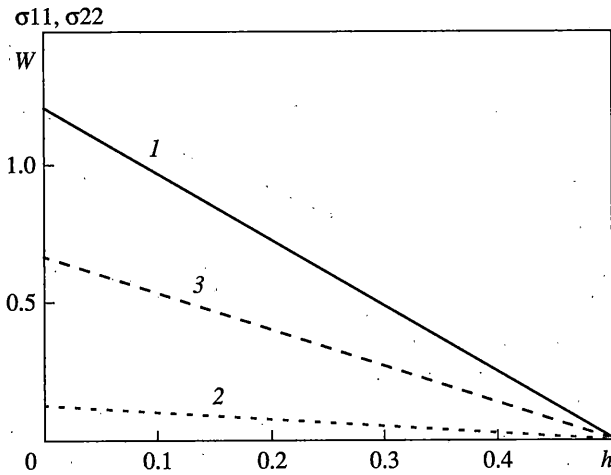
$$W = -E/(\pi a_1 a_2 \sigma e^P) \quad (5.2)$$

где $e^P = e_{11}^P = e_{22}^P$ – величина собственной деформации включения, отвечающая величине $\sigma_{11}^P = \sigma_{22}^P = -\sigma$.

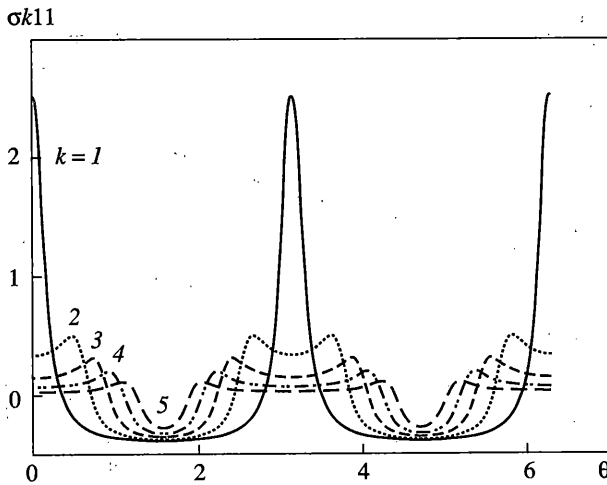
Из (4.18) и (5.2) следует, что в рассматриваемом случае

$$W = (\sigma_{11}^I/\sigma + \sigma_{22}^I/\sigma)/2 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 \quad (5.3)$$

На фиг. 2 представлены зависимости, также отвечающие условиям (5.1). Кроме того, предполагается, что $\mu_I = \mu_M$ и $\nu_M = 0.25$. Приведенные кривые 1–3 показывают



Фиг. 3

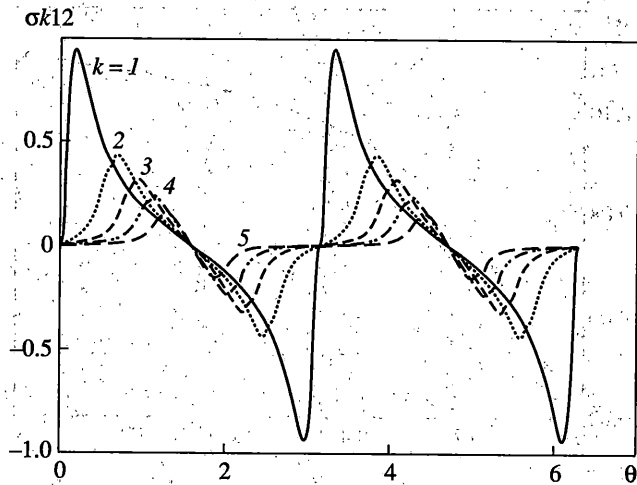


Фиг. 4

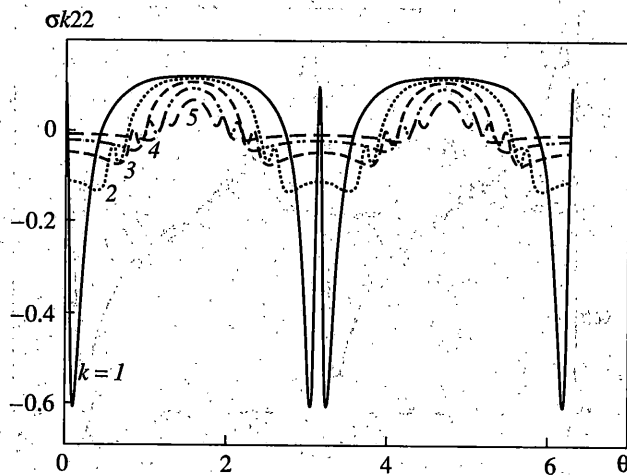
зависимость величин σ_{11} , σ_{22} и W от коэффициента Пуассона включения $\nu_I = d$, который изменяется в пределах 0–0.5.

На фиг. 3 представлены зависимости тех же величин от коэффициента Пуассона матрицы $\nu_M = h$, $0 \leq h \leq 0.5$. Здесь предполагается, что $\mu_I = \mu_M$ и $\nu_I = 0.25$. Отметим, что в случае, когда материал матрицы близок к несжимаемому и выполнены условия (5.1), фазовые превращения не приводят к возмущению напряженного состояния.

На фиг. 4–6 приведены нормированные напряжения в матрице $\sigma_{ij}^*(\rho, \theta) = \sigma_{ij}^M(\rho, \theta)/\sigma$. Предполагается, что $\mu_M : \mu_I = 1 : 10$, $\nu_I = \nu_M = 0.25$. Для кривых на фиг. 4–6 введены следующие обозначения: $\sigma_{1ij}(\theta) = \sigma_{ij}^*(1, \theta)$, $\sigma_{2ij}(\theta) = \sigma_{ij}^*(1.2, \theta)$, $\sigma_{3ij}(\theta) = \sigma_{ij}^*(1.5, \theta)$, $\sigma_{4ij}(\theta) = \sigma_{ij}^*(2, \theta)$ и $\sigma_{5ij}(\theta) = \sigma_{ij}^*(3, \theta)$ (кривые 1–5). Параметр θ меняется от 0 до 2π .



Фиг. 5

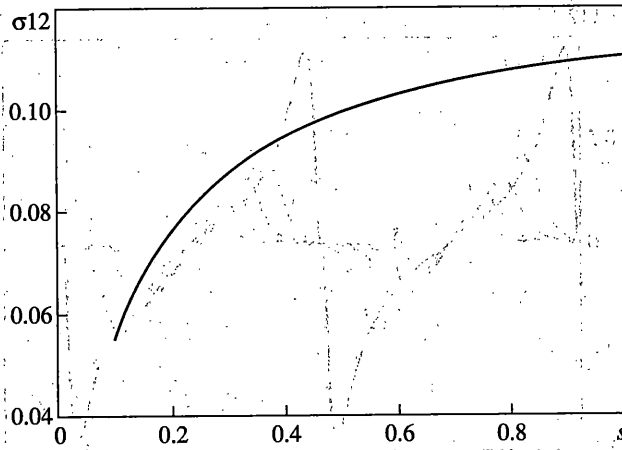


Фиг. 6

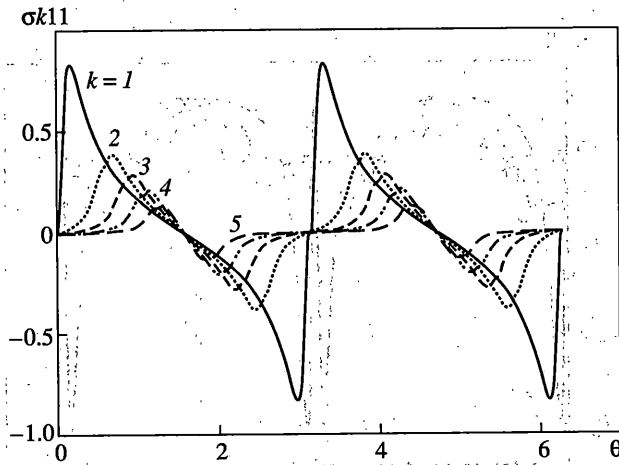
На фиг. 7–10 приведены результаты расчетов для иного типа собственных деформаций включения. В этих расчетах предполагается, что $e_{11}^P = e_{22}^P = 0$, $e_{12}^P \neq 0$. Это соответствует следующим величинам σ_{ij}^P :

$$\sigma_{11}^P = \sigma_{22}^P = 0, \quad \sigma_{12}^P = \tau \quad (5.4)$$

На фиг. 7 представлена зависимость нормированного напряжения внутри включения $\sigma_{12} = -\sigma_{12}^I / \tau$ от отношения модулей сдвига включения и матрицы $s = \mu_I / \mu_M$. Здесь величина s варьируется от 0.1 до 1. Заметим, что в условиях (5.4) $\sigma_{11}^I = \sigma_{22}^I = 0$.



Фиг. 7



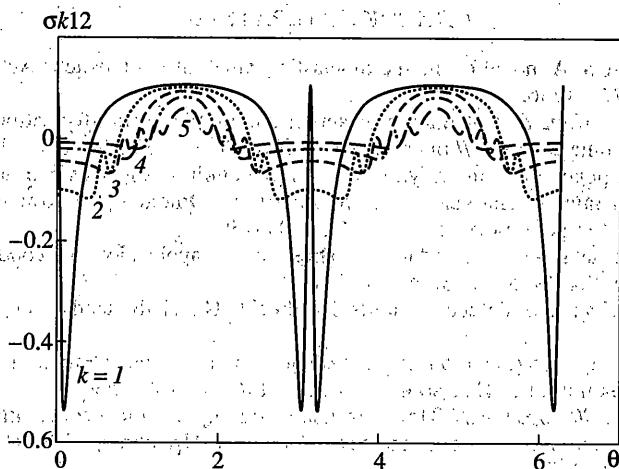
Фиг. 8

Зависимость упругой энергии от отношения модулей сдвига не приведена, так как безразмерная величина упругой энергии совпадает с величиной нормированного напряжения. Из (4.18) и (5.4) следует

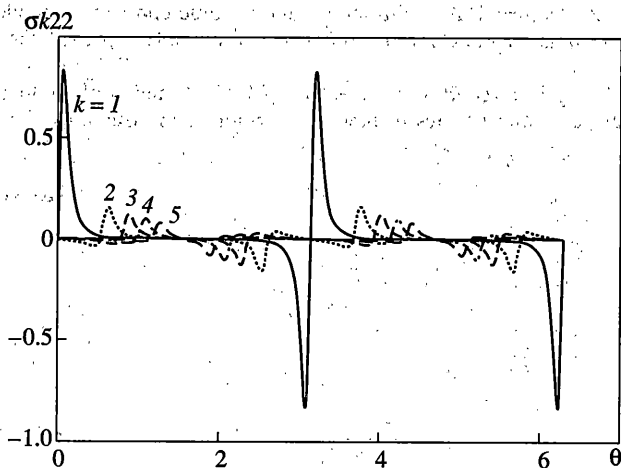
$$W = -E/(\pi a_1 a_2 e^{P_{12}} \tau) = -\sigma_{12}^I / \tau = \sigma_{12} \quad (5.5)$$

Согласно формуле (4.5) величина σ_{12}^I не зависит от ν_L . Зависимость σ_{12}^I от коэффициента Пуассона матрицы ν_M достаточно простая, в частности, при $\mu_L = \mu_M$ эта зависимость выражается формулой

$$\sigma_{12} = \frac{a_1 a_2}{(1 - \nu_M)(a_1 + a_2)^2} \quad (5.6)$$



Фиг. 9



Фиг. 10

В связи с этим график зависимости σ_{12} от v_M не приводится.

На фиг. 8–10 приведены нормированные напряжения в матрице $\sigma_{ij}^*(\rho, \theta) = -\sigma_{ij}^M(\rho, \theta)/\tau$. Предполагается что $\mu_M: \mu_I = 2.33, \nu_I = \nu_M = 0.33$. Эти значения упругих постоянных отвечают экспериментально полученным [9] данным для сплавов с памятью формы, таких как никелид титана (см. также [10]). Обозначения на фиг. 8–10 совпадают с обозначениями на фиг. 4–6.

Авторы признательны А.А. Мовчану за полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках Проекта № 2, раздела “Механика”, блока 1 “Ориентированные фундаментальные исследования” раздела “Фундаментальные исследования в области физических наук” ФЦНТП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям науки и техники” на 2002–2006 гг., а также гранта НШ-1849.2003.1 Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ling H.C., Owen W.S.* A model of the thermoelastic growth of martensite // *Acta Metallurg.* 1981. V. 29. № 10. P. 1721–1736.
2. *Rauch G., Fett T., Munz D.* Calculation of autocatalytic phase transformation zones in cracked and uncracked zirconia ceramics // *Intern. J. Fract.* 2002. V. 116. № 2. P. 121–140.
3. *Эшелби Дж.* Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой // *Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций.* М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 103–139.
4. *Asaro R.J.* Somigliana dislocations and internal stresses; with application to second phase hardening // *Intern. J. of Engng. Sci.* 1975. V. 13. № 3. P. 271–286.
5. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff Publ., 1987. 587 p.
6. *Эшелби Дж.* Упругое поле вне эллипсоидального включения // *Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций.* М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 140–153.
7. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* Плоская задача о напряженном состоянии, определяемом фазовыми превращениями в эллиптической области. Препринт № 714. М.: Инс-т пробл. механики РАН, 2003. 50 с.
8. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* Интегральные уравнения задачи об упругом включении. Полное аналитическое решение задачи об эллиптическом включении // *Изв. РАН. МТТ.* 2004. № 1. С. 50–76.
9. *Lagoudas D.C., Bo Z., Qidwai M.A.* A unified thermodynamic constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites // *Mech. Compos. Mater. Struct.* 1996. V. 3. P. 153–179.
10. *Qidwai M.A., Entchev P.B., Lagoudas D.C., DeGiorgi V.G.* Modeling of the thermomechanical behavior of porous shape memory alloys // *Intern. J. of Solids and Structures.* 2001. V. 38. P. 8653–8671.

Москва

Поступила в редакцию
8.06.2004