МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2005

УДК 539.3

© 2005 г. И.И. АРГАТОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ГЕРЦА С УЧЕТОМ КАСАТЕЛЬНЫХ СМЕЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА

Рассмотрена задача одностороннего контакта двух упругих тел, ограниченных параболоидами вращения, которая при упрощающих предположениях сводится к системе двух интегральных уравнений с несимметричными ядрами. В замкнутой форме получено приближенное решение контактной задачи, учитывающее касательные смещения на поверхности контакта.

1. Уточненная постановка задачи Герца. Пусть в недеформированном состоянии упругие тела Ω_1 и Ω_2 касаются в единственной точке O и занимают области, определяемые неравенствами (считаем, что ось Oz_i направлена внутрь тела Ω_i):

$$z_i \le \Phi_i(r) \ (i = 1, 2)$$

Согласно теории Герца [1] (см. также [2], § 137) положим

$$\Phi_i(r) = (2R_i)^{-1}r^2 \ (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

где R_i – радиус кривизны поверхности тела Ω_i в его вершине. Через δ_0 будем обозначать сближение контактирующих тел Ω_1 и Ω_2 в результате их сдавливания противонаправленными силами величиною P, действующими вдоль осей Oz_1 и Oz_2, соответственно.

На поверхностях упругих тел Ω_1 и Ω_2 рассмотрим две точки M_1 и M_2 с цилиндрическими координатами (r_1, φ, z_1) и (r_2, φ, z_2), где

$$z_i = \Phi_i(r_i) \ (i = 1, 2) \tag{1.2}$$

В процессе деформации точка M_i получает радиальное $u_r^i(r_i)$ и вертикальное $w_i(r_i)$ перемещения. Пусть в результате деформации точки M_1 и M_2 совпали. Тогда получаем следующие условия совместности перемещений [2]:

$$r_1 + u_r^1 = r_2 + u_r^2 \tag{1.3}$$

$$z_1 + w_1 = -(z_2 + w_2) + \delta_0 \tag{1.4}$$

Равенства (1.3) и (1.4) должны выполняться при $0 \le r_1 \le a_1$ и $0 \le r_2 \le a_2$, где a_1 и a_2 – координаты точек M_1 и M_2, оказавшихся на краю площадки контакта. При этом собственно радиус a площадки контакта ω определяется из соотношения

$$a = a_1 + u_r^1(a_1) = a_2 + u_r^2(a_2) \tag{1.5}$$

Как и в теории Герца, перемещения точек упругих тел в окрестности пятен контакта выражаем при помощи решения задачи Буссинеска (см., например, [3]) в виде

$$w_i(r_i) = \theta_i \iint\limits_{\omega_i} \frac{p_i(\rho)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{r_i^2 + \rho^2 - 2r_i\rho\cos\varphi}} \tag{1.6}$$

$$u_r^i(r_i) = -\theta_i^\vee \iint\limits_{\omega_i} \frac{p_i(\rho)(r_i - \rho\cos\varphi)}{r_i^2 + \rho^2 - 2r_i\rho\cos\varphi} \rho d\rho d\varphi \tag{1.7}$$

$$\theta_i = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i}, \quad \theta_i^\vee = \frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{2\pi E_i} \quad (i = 1, 2) \tag{1.8}$$

Здесь ω_i – круг радиуса a_i (прообраз площадки контакта для тела Ω_i), $p_i(r_i)$ – плотность обобщенных контактных давлений.

Согласно уравнению статического равновесия

$$2\pi \int\limits_0^{a_i} p_i(\rho)\rho d\rho = P \ (i = 1, 2) \tag{1.9}$$

Выражая из уравнения (1.3) поочередно радиусы r_1 и r_2, выводим из условия совместности перемещений (1.4) следующие уравнения:

$$w_1(r_1) + w_2(r_2) = \delta_0 - \frac{r_1^2}{2R_1} - \frac{1}{2R_2}(r_1 + u_r^1(r_1) - u_r^2(r_2))^2 \tag{1.10}$$

$$w_1(r_1) + w_2(r_2) = \delta_0 - \frac{1}{2R_1}(r_2 + u_r^2(r_2) - u_r^1(r_1))^2 - \frac{r_2^2}{2R_2} \tag{1.11}$$

Следуя [4], нелинейные уравнения (1.10) и (1.11) заменяем линеаризованными

$$w_1(r_1) + w_2(r_2) = \delta_0 - \frac{r_1^2}{2R} - \frac{r_1}{R_2}(u_r^1(r_1) - u_r^2(r_2)) \tag{1.12}$$

$$w_1(r_1) + w_2(r_2) = \delta_0 - \frac{r_2^2}{2R} + \frac{r_2}{R_1}(u_r^1(r_1) - u_r^2(r_2)) \tag{1.13}$$

где $1/R = (1/R_1) + (1/R_2)$ – суммарная кривизна.

Уравнения (1.12) и (1.13) были получены в [4] из других соображений.

Для упрощения системы (1.12), (1.13) в [4] было сделано следующее предположение (k – некоторый постоянный множитель):

$$\begin{gathered} \iint\limits_{\omega_2} \frac{p_2(\rho_2)(r_2 - \rho_2\cos\varphi)}{R(r_2;\, \rho_2, \varphi)^2} d\sigma_2 \approx k \iint\limits_{\omega_1} \frac{p_1(\rho_1)(r_1 - \rho_1\cos\varphi)}{R(r_1;\, \rho_1, \varphi)^2} d\sigma_1 \\ \iint\limits_{\omega_2} \frac{p_2(\rho_2) d\sigma_2}{R(r_2;\, \rho_2, \varphi)} \approx k \iint\limits_{\omega_1} \frac{p_1(\rho_1) d\sigma_1}{R(r_1;\, \rho_1, \varphi)} \end{gathered} \tag{1.14}$$

Здесь $d\sigma_i = \rho_i d\rho_i d\varphi$ – элемент площади, $R(r_i;\, \rho_i, \varphi)$ – знаменатель дроби в подынтегральном выражении (1.6).

При этом система (1.12), (1.13) принимает вид

$$(\theta_1 + k\theta_2)(B_1 p_1)(r_1) = \delta_0 - \frac{r_1^2}{2R} + \frac{r_1}{R_2}(\theta_1^\vee - k\theta_2^\vee)(B_1^\vee p_1)(r_1) \tag{1.15}$$

$$(k^{-1}\theta_1 + \theta_2)(B_2 p_2)(r_2) = \delta_0 - \frac{r_2^2}{2R} - \frac{r_2}{R_1}(k^{-1}\theta_1^\vee - \theta_2^\vee)(B_2^\vee p_2)(r_2) \tag{1.16}$$

Здесь θ_i и $\overset{\vee}{\theta}_i$ – упругие постоянные (1.8), B_i – интегральный оператор, действующий по формуле

$$(B_i p_i)(r_i) = \iint_{\omega_i} \frac{p_i(\rho)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{r_i^2 + \rho^2 - 2r_i\rho\cos\varphi}} \tag{1.17}$$

где $\overset{\vee}{B}_i$ – интегральный оператор, фигурирующий в правой части равенства (1.7).

Радиус площадки контакта определяется из условия положительности контактных давлений, т.е.

$$p_i(r_i) > 0 \ (0 \le r_i < a_i), \quad p_i(a_i) = 0 \ (i = 1, 2) \tag{1.18}$$

При заданной силе P, сжимающей упругие тела, для отыскания плотностей $p_1(r_1)$ и $p_2(r_2)$ контактных давлений, радиусов a_1 и a_2, сближения упругих тел δ_0, и параметра k в [4] был предложен алгоритм, основанный на численном методе [5]. В [6] рассмотрена осесимметричная задача о сдавливании упругого тела с абсолютно твердым (штампом). Решение получено численным методом, использующим аппроксимацию интегральных операторов конечными суммами. Двумерная контактная задача в уточненной постановке исследовалась в [7, 8] аналитическим методом. Подобные (1.15), (1.15) уточненные линеаризованные условия контакта, учитывающие касательные смещения, в контактных задачах для моделей пластин и оболочек рассмотрены в [9] (см. § 2.3).

2. Обсуждение. Адекватность гипотезы (1.14) проверялась в [4] численными расчетами.

При помощи формулы (3.613.2) [10] касательное перемещение (1.7) представим в форме

$$u_r^i(r_i) = -\overset{\vee}{\theta}_i \frac{2\pi}{r_i}\int_0^{r_i} p_i(\rho)\rho d\rho \ (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

Соответственно этому будем иметь

$$(\overset{\vee}{B}_i p_i)(r_i) = \frac{2\pi}{r_i}\int_0^{r_i} p_i(\rho)\rho d\rho \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь вопрос о замене нелинейных условий совместности перемещений (1.10) и (1.11) линеаризованными (1.12) и (1.13).

Так, при переходе от уравнения (1.10) к (1.12) были отброшены члены $(2R_2)^{-1}(u_r^1(r_1) - u_r^2(r_2))^2$ и сохранены $(2R_2)^{-1}(u_r^1(r_1) - u_r^2(r_2))r_1$, дающие поправку к теории Герца. Выясним, при каких условиях отброшенные слагаемые оказываются малыми по сравнению с удержанными.

По формуле (2.1) находим следующую оценку (p_{i0} – максимальное значение плотности контактных давлений $p_i(r_i)$): $|u_r^i| < \overset{\vee}{\theta}_i \pi a_i p_{i0}$. Определяя величину p_{i0} по теории Герца (без учета касательных перемещений), получаем, что касательные перемещения на поверхности контакта с точностью до множителя, зависящего от соотношения упругих постоянных, не превосходят величины сближения δ_0.

Таким образом, удержанные члены, дающие поправку, оказываются в главном порядка $\delta_0^{3/2}R^{-1/2}$, так как радиус площадки контакта a_i в главном равен $\sqrt{\delta_0 R}$. В то же время, отброшенные члены являются величинами порядка $\delta_0^2 R^{-1}$. Тем самым относительная погрешность линеаризованного условия совместности перемещений оказывается порядка δ_0/R или $(a_i/R)^2$.

Будучи последовательными, впредь в получаемых выражениях будем сохранять лишь члены $O(a_i/R)$, или что то же самое $O(\sqrt{\delta_0/R})$, и пренебрегать членами $O(\delta_0/R)$.

3. Максимальное значение контактных давлений. Воспользуемся общим решением осесимметричной контактной задачи с круговой площадкой контакта $(B_i p_i)(r_i) = u_i(r_i)$, полученным в [11–13] в форме

$$p_i(r_i) = \frac{F_i(a_i)}{\pi\sqrt{a_i^2 - r_i^2}} - \frac{1}{\pi}\int_{r_i}^{a_i} \frac{F_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r_i^2}}ds \tag{3.1}$$

$$\pi F_i(r_i) = u_i(0) + r_i \int_0^{r_i} \frac{u_i'(t)}{\sqrt{r_i^2 - t^2}}dt \tag{3.2}$$

Из условия (1.18) обращения контактных давлений в нуль на краю площадки контакта вытекает равенство

$$F_i(a_i) = 0 \tag{3.3}$$

При этом формула (3.1) приобретает вид

$$p_i(r_i) = -\frac{1}{\pi}\int_{r_i}^{a_i} \frac{F_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r_i^2}}ds \tag{3.4}$$

Вычислим максимальное значение контактного давления

$$p_i(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{a_i} \frac{F_i'(s)}{s}ds \tag{3.5}$$

Согласно формулам (1.5) и (1.16) при учете (2.2) имеем

$$(\theta_1 + k\theta_2)u_1(r_1) = \delta_0 - \frac{r_1^2}{2R} + \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2} 2\pi \int_0^{r_1} p_1(\rho)\rho d\rho \tag{3.6}$$

$$\frac{(\theta_1 + k\theta_2)}{k}u_2(r_2) = \delta_0 - \frac{r_2^2}{2R} - \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{kR_1} 2\pi \int_0^{r_2} p_2(\rho)\rho d\rho \tag{3.7}$$

Подставляя выражения (3.6) и (3.7) в формулу (3.2), получаем

$$\pi(\theta_1 + k\theta_2)F_1(r_1) = \delta_0 - \frac{r_1^2}{R} + \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2} 2\pi r_1 \int_0^{r_1} \frac{p_1(s)s}{\sqrt{r_1^2 - s^2}}ds \tag{3.8}$$

$$\frac{\pi(\theta_1 + k\theta_2)}{k}F_2(r_2) = \delta_0 - \frac{r_2^2}{R} - \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{kR_1} 2\pi r_2 \int_0^{r_2} \frac{p_2(s)s}{\sqrt{r_2^2 - s^2}}ds \tag{3.9}$$

Дифференцируя обе части равенства (3.8), находим

$$\pi(\theta_1 + k\theta_2)\frac{F_1'(r_1)}{r_1} = -\frac{2}{R} + \frac{2\pi}{r_1}\frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2}\int\limits_0^{r_1}\frac{2p_1(t) + tp_1'(t)}{\sqrt{r_1^2 - t^2}}tdt$$

Подставим данное выражение в формулу (3.5), изменим порядок интегрирования и проинтегрируем по частям. В результатах находим

$$\pi(\theta_1 + k\theta_2)p_1(0) = \frac{2a_1}{\pi R} - \frac{2(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2}\int\limits_0^{a_1} p_1(t)\left(\arccos\frac{t}{a_1} + \frac{t}{\sqrt{a_1^2 - t^2}}\right)dt \tag{3.10}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\pi(\theta_1 + k\theta_2)}{k}p_2(0) = \frac{2a_2}{\pi R} + \frac{2(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{kR_1}\int\limits_0^{a_2} p_2(t)\left(\arccos\frac{t}{a_2} + \frac{t}{\sqrt{a_2^2 - t^2}}\right)dt \tag{3.11}$$

Согласно теории Герца между контактирующими телами, локально ограниченными параболоидами вращения, возникает контактное давление

$$p_i(r_i) = p_{i0}\sqrt{1 - (r_i^2/a_i^2)} \quad (i = 1, 2) \tag{3.12}$$

$$p_{i0} = 3P/(2\pi a_i^2) \tag{3.13}$$

где p_{i0} – максимальное значение контактных давлений.

Подставим выражения (3.12) в правые части уравнений (3.10) и (3.11) для приближенного определения величин p_{10} и p_{20}. В результате вычисления квадратур будем иметь

$$\pi(\theta_1 + k\theta_2)p_{10} = \frac{2a_1}{\pi R} - \left(\frac{\pi^2}{4} + 2\right)\frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2}a_1 p_{10} \tag{3.14}$$

$$\frac{\pi(\theta_1 + k\theta_2)}{k}p_{20} = \frac{2a_2}{\pi R} + \left(\frac{\pi^2}{4} + 2\right)\frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{kR_1}a_2 p_{20} \tag{3.15}$$

Из уравнений (3.14) и (3.15), пренебрегая величинами порядка $(a_i/R)^2$ по сравнению с единицей, получаем

$$p_{10} = \frac{2a_1}{\pi^2(\theta_1 + k\theta_2)R}\left\{1 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 2\right)\frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)a_1}{\pi(\theta_1 + k\theta_2)R_2}\right\} \tag{3.16}$$

$$p_{20} = \frac{2ka_2}{\pi^2(\theta_1 + k\theta_2)R}\left\{1 + \left(\frac{\pi^2}{4} + 2\right)\frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)a_2}{\pi(\theta_1 + k\theta_2)R_1}\right\} \tag{3.17}$$

Заметим, что вторые слагаемые в фигурных скобках в формулах (3.16) и (3.17) дают поправки к теории Герца, учитывающие влияние касательных смещений.

4. Уравнение для определения радиуса площадки контакта. Согласно обозначениям (3.2) и (3.8), (3.9) уравнение (3.3) может быть преобразовано к виду

$$\delta_0 = \frac{a_1^2}{R} - \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2}2\pi a_1\int\limits_0^{a_1}\frac{p_1(s)s}{\sqrt{a_1^2 - s^2}}ds \tag{4.1}$$

$$\delta_0 = \frac{a_2^2}{R} + \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{kR_1} 2\pi a_2 \int_0^{a_2} \frac{p_2(s)s}{\sqrt{a_2^2 - s^2}} ds \tag{4.2}$$

Уравнения (4.1) и (4.2) служат для определения искомых радиусов a_1 и a_2 в зависимости от параметра k по заданному значению δ_0 сближения упругих тел.

Подставляя в уравнения (4.1) и (4.2) герцевскую плотность (3.12), получаем приближенные равенства

$$\delta_0 = \frac{a_1^2}{R} - \pi a_1^2 p_{10} \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2} \tag{4.3}$$

$$\delta_0 = \frac{a_2^2}{R} + \pi a_2^2 p_{20} \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{kR_1} \tag{4.4}$$

Пренебрегая величинами $O(\delta_0/R)$ по сравнению с единицей, из уравнений (4.3) и (4.4) при учете (3.16) и (3.17) находим

$$a_1 = \sqrt{\delta_0 R}\left(1 + \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{\pi(\theta_1 + k\theta_2)} \frac{\sqrt{\delta_0 R}}{R_2}\right) \tag{4.5}$$

$$a_2 = \sqrt{\delta_0 R}\left(1 - \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{\pi(\theta_1 + k\theta_2)} \frac{\sqrt{\delta_0 R}}{R_1}\right) \tag{4.6}$$

Подчеркнем, что уравнения (3.10), (3.11) и (4.1), (4.2) представляют собой точные равенства, т.е. непосредственные следствия исходных интегральных уравнений (1.15) и (1.16). Поскольку уравнения (1.15), (1.16) сами являются приближенными, то для получения качественных выводов о влиянии касательных смещений в задаче Герца достаточно приближенного удовлетворения уравнениям (3.10), (3.11) и (4.1), (4.2) с такой точностью, с которой были получены сами уравнения (1.15) и (1.16).

5. Определение силы, сжимающей упругие тела. Подстановка выражения (3.4) в равенство (1.9) приводит к следующему уравнению [13]:

$$P = 2\int_0^{a_i} F_i(s) ds \quad (i = 1, 2) \tag{5.1}$$

Подставляя теперь в уравнение (5.1) ($i = 1$) выражение (3.8) для подынтегральной функции, находим

$$\frac{\pi}{2}(\theta_1 + k\theta_2)P = a_1\delta_0 - \frac{a_1^3}{3R} + \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2} 2\pi \int_0^{a_1} p_1(t)\sqrt{a_1^2 - t^2}\, t dt$$

Заменяя в данном соотношении величину δ_0 согласно равенству (4.1), получаем

$$\frac{\pi}{2}(\theta_1 + k\theta_2)P = \frac{2a_1^3}{3R} - \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{R_2} 2\pi \int_0^{a_1} \frac{p_1(t)t^3}{\sqrt{a_1^2 - t^2}} dt \tag{5.2}$$

Аналогично уравнению (5.2) из уравнения (5.1) ($i = 2$) при учете выражения (3.9) находим

$$\frac{\pi(\theta_1 + k\theta_2)}{2k}P = \frac{2a_2^3}{3R} + \frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{kR_1}2\pi\int_0^{a_2}\frac{p_2(t)t^3}{\sqrt{a_2^2 - t^2}}dt \tag{5.3}$$

Заметим, что уравнения (5.2) и (5.3) могут быть выведены непосредственно из уравнений (1.15) и (1.16) применением теоремы Моссаковского [14].

Подставляя теперь в уравнения (5.2), (5,3) герцевскую плотность (3.12), получаем приближенные равенства

$$\frac{\pi}{2}(\theta_1 + k\theta_2)P = \frac{2a_1^3}{3R} - \frac{\pi(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{2R_2}a_1^3 p_{10} \tag{5.4}$$

$$\frac{\pi(\theta_1 + k\theta_2)}{2k}P = \frac{2a_2^3}{3R} + \frac{\pi(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{2kR_1}a_2^3 p_{20} \tag{5.5}$$

Выразим силу P через перемещение δ_0. Подставим в уравнение (5.4) выражение величины p_{10}, определяемое формулой (3.16); после чего заменим величину a_1 по формуле (4.5). В результате преобразований и упрощений (с точностью до членов $O(a/R)$, включительно) находим

$$P = \frac{4\delta_0^{3/2}\sqrt{R}}{3\pi(\theta_1 + k\theta_2)}\left\{1 + \frac{3(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{2\pi(\theta_1 + k\theta_2)}\frac{\sqrt{\delta_0 R}}{R_2}\right\} \tag{5.6}$$

Аналогично с использованием соотношений (5.5), (3.17) и (4.6) получаем

$$P = \frac{4k\delta_0^{3/2}\sqrt{R}}{3\pi(\theta_1 + k\theta_2)}\left\{1 - \frac{3(\overset{\vee}{\theta}_1 - k\overset{\vee}{\theta}_2)}{2\pi(\theta_1 + k\theta_2)}\frac{\sqrt{\delta_0 R}}{R_1}\right\} \tag{5.7}$$

Приравнивая правые части соотношений (5.6) и (5.7), выводим уравнение для определения параметра k. С точностью до малых величин более высокого порядка малости будем иметь

$$k = 1 + \frac{3}{2\pi}\frac{(\overset{\vee}{\theta}_1 - \overset{\vee}{\theta}_2)}{(\theta_1 + \theta_2)}\sqrt{\frac{\delta_0}{R}} \tag{5.8}$$

Подстановка значения (5.8) в формулы (5.6) и (5.7) приводит к зависимости

$$P = \frac{4\delta_0^{3/2}\sqrt{R}}{3\pi(\theta_1 + \theta_2)}\left\{1 + \frac{3(\overset{\vee}{\theta}_1 - \overset{\vee}{\theta}_2)}{2\pi(\theta_1 + \theta_2)^2}\frac{(R_1\theta_1 - R_2\theta_2)}{R_1 + R_2}\sqrt{\frac{\delta_0}{R}}\right\} \tag{5.9}$$

Наконец, подставляя значение параметра k, определяемое формулой (5.8), в соотношения (4.5) и (4.6), находим искомые радиусы a_1 и a_2 площадки контакта.

6. Основные соотношения уточненной теории осесимметричного контактного взаимодействия упругих тел. Как правило, в приложениях в качестве известной величины в контактной задаче выступает сила P. В таком случае уравнение (5.9) позволяет определить сближение контактирующих тел δ_0. С точностью, с которой было получено уравнение (5.9), будем иметь

$$\delta_0 = \left(\frac{3\pi(\theta_1+\theta_2)P}{4\sqrt{R}}\right)^{2/3}\left\{1-\frac{(\overset{\vee}{\theta}_1-\overset{\vee}{\theta}_2)}{\pi(\theta_1+\theta_2)^2}\frac{(R_1\theta_1-R_2\theta_2)}{R_1+R_2}\sqrt[3]{\frac{3\pi(\theta_1+\theta_2)P}{4R^2}}\right\} \tag{6.1}$$

Поскольку расчет производился по недеформированному состоянию, для каждого из упругих тел получен собственный радиус площадки контакта. С другой стороны, в результате деформации упругие тела приходят в соприкосновение по круговой площадке с радиусом a, определяемым соотношением (1.5). Заметим, что при подстановке выражений (4.5) и (4.6) в соотношение (1.5) при учете формул (2.1), (5.9) и (5.8) получаются различные выражения для радиуса a. Данное обстоятельство является следствием гипотезы (1.14).

Далее, подстановка выражений (4.5), (4.6) в формулы (3.16) и (3.17) при учете соотношений (5.9) и (6.1) дает выражения для максимумов контактных давлений p_{10} и p_{20} в зависимости от силы P.

Наконец, приближенные выражения для плотностей контактных давлений $p_1(r_1)$ и $p_2(r_2)$ получаются на основе формулы (3.4), куда следует подставить выражения

$$\pi(\theta_1+k\theta_2)F_1(r_1) = \delta_0-\frac{r_1^2}{R}+\frac{\pi(\overset{\vee}{\theta}_1-k\overset{\vee}{\theta}_2)}{2R_2}p_{10}r_1a_1f\left(\frac{r_1}{a_1}\right)$$

$$\frac{\pi(\theta_1+k\theta_2)}{k}F_2(r_2) = \delta_0-\frac{r_2^2}{R}-\frac{\pi(\overset{\vee}{\theta}_1-k\overset{\vee}{\theta}_2)}{2kR_1}p_{20}r_2a_2f\left(\frac{r_2}{a_2}\right)$$

$$f(t) = 2t+(1-t^2)\ln\frac{1+t}{1-t}$$

В [4] было отмечено, что учет касательных смещений приводит к уменьшению несовместности деформаций, которая отмечается вблизи зоны контакта. В то же время учет касательных смещений значительно усложняет постановку контактной задачи Герца. Построенное приближенное решение позволяет достаточно просто производить расчеты и оценивать влияние данного эффекта на основные параметры упругого контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий РФ (грант Президента Российской Федерации МД-182.2003.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hertz H*. Über die Berührung fester elastischer Körper // J. für die reine und angew. Math. 1882. Bd. 92. S. 156–171.
2. *Ляв А*. Математическая теория упругости. М.; Л.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр. 1935. 674 с.
3. *Новацкий В*. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Галанов Б.А*. Постановка и решение некоторых уточненных задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 56–63.
5. *Галанов Б.А*. О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 61–67.

6. *Галанов Б.А., Кривонос Ю.М.* Об учете в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1984. Вып. 53. С. 87–94.
7. *Солдатенков И.А.* Контактная задача для полуплоскости в уточненной постановке (учет касательного контактного перемещения). Препринт № 501. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1991. 36 с.
8. *Солдатенков И.А.* Контактная задача для полуплоскости при учете касательного перемещения на контакте // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 51–61.
9. *Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 1999. 408 p.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
11. *Леонов М.Я.* К теории расчета упругих оснований // ПММ. 1939. Т. 3. Вып. 2. С. 53–78.
12. *Schubert G.* Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken // Ing.-Archiv, 1942. Bd. 13. № 3. S. 132–147.
13. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
14. *Моссаковский В.И.* Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 4. С. 477–482.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
29.05.2003