МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2005

УДК 539.3

© 2005 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, А.А. КАЛЯКИН

ПЛОСКАЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассмотрены плоская и осесимметричная контактные задачи для трехслойного упругого полупространства. Плоская задача сведена к сингулярному интегральному уравнению первого рода, приближенное решение которого получено с помощью модифицированного метода коллокации Мультопа – Каландия. Осесимметричная задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, приближенное решение которого получено специально разработанным методом коллокации по узлам полинома Лежандра. Приведены примеры вычисления характерных интегральных величин задач.

1. Вспомогательная задача. Рассмотрим задачу о равновесии упругой полуплоскости с двухполосным упругим покрытием (фигура). Вся эта конструкция находится в условиях плоской деформации. Между полосами $H - h \le y \le H$ и $0 \le y \le h$, а также между нижней полосой $0 \le y \le h$ и полуплоскостью $y \le 0$ осуществлено полное сцепление. Верхняя полоса нагружена распределенным нормальным давлением $q(x)$. Механические характеристики (модули сдвига и коэффициенты Пуассона) полос и полуплоскости равны G_j и ν_j ($j = 1, 2, 3$).

Граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_y^{(1)} = -\tilde{q}(x), \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0$$
$$\tilde{q}(x) = q(x), \quad |x| \le a, \quad \tilde{q}(x) = 0, \quad |x| > a \quad \text{при} \quad y = H \tag{1.1}$$

$$u_1 = u_2, \quad \upsilon_1 = \upsilon_2, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} \quad \text{при} \quad y = h \tag{1.2}$$

$$u_2 = u_3, \quad \upsilon_2 = \upsilon_3, \quad \sigma_y^{(2)} = \sigma_y^{(3)}, \quad \tau_{xy}^{(2)} = \tau_{xy}^{(3)} \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{1.3}$$

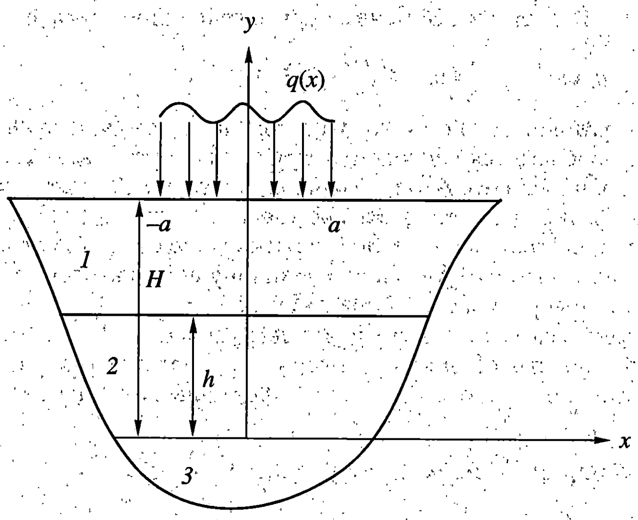
где u и υ – перемещения по осям x и y соответственно, σ_y – нормальное, а τ_{xy} – касательное напряжения. К граничным условиям (1.1)–(1.3) следует еще добавить условие отсутствия напряжений в конструкции при $|x| \to \infty$ и $|y| \to \infty$.

Для решения задачи воспользуемся общим представлением решения уравнений Ламе через бигармоническую функцию перемещений χ. Тогда будем иметь

$$u = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}, \quad \upsilon = \left[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\chi \tag{1.4}$$

где Δ – оператор Лапласа. Представляя в (1.4) бигармонические функции χ_j ($j = 1, 2, 3$) в форме интегралов Фурье

$$\chi_j(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_j(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \tag{1.5}$$



получим для трансформант $X_j(\alpha, y)$, входящих в (1.5), выражения

$$\begin{aligned} X_1(\alpha, y) &= [a_1(\alpha) + |\alpha| y a_2(\alpha)]e^{|\alpha|y} + [b_1(\alpha) + |\alpha| y b_2(\alpha)]e^{-|\alpha|y} \\ X_2(\alpha, y) &= [c_1(\alpha) + |\alpha| y c_2(\alpha)]e^{|\alpha|y} + [d_1(\alpha) + |\alpha| y d_2(\alpha)]e^{-|\alpha|y} \\ X_3(\alpha, y) &= [e_1(\alpha) + |\alpha| y e_2(\alpha)]e^{|\alpha|y} \end{aligned} \tag{1.6}$$

где десять функций a_l, b_l, c_l, d_l, e_l ($l = 1, 2$) должны быть найдены из десяти граничных условий (1.1)–(1.3).

Чтобы отыскать указанные функции, выразим граничные условия (1.1)–(1.3) (с помощью формул Коши, связывающих перемещения с деформациями, и формул закона Гука, связывающих деформации с напряжениями) через функции χ_j ($j = 1, 2, 3$). Затем представим разрывную функцию $\tilde{q}(x)$ вида (1.1) в форме интеграла Фурье

$$\tilde{q}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{1.7}$$

и запишем граничные условия (1.1)–(1.3) в трансформантах Фурье. Воспользовавшись теперь формулами (1.6), получим систему десяти алгебраических уравнений для определения десяти функций a_l, b_l, c_l, d_l, e_l ($l = 1, 2$). Решим эту систему.

Подставив найденные значения $a_l(\alpha)$ и $b_l(\alpha)$ ($l = 1, 2$) в первую формулу (1.6), построим затем по второй формуле (1.4) выражение для $v'_x(x, H)$, необходимое далее для постановки контактной задачи

$$v'_x(x, H) = \frac{i}{2\pi\theta_1}\int_{\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\alpha) L(|\alpha| H) Q(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad \theta_1 = \frac{G_1}{1-\nu_1} \tag{1.8}$$

Выражение для функции $L(u)$ весьма громоздкое и поэтому здесь не приводится. Заметим только, что функция $L(u)$ непрерывна и обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$\begin{aligned} L(u) &= 1 + O(e^{-2u\delta}), \quad |u| \to \infty, \quad \delta = \inf(\varepsilon, 1-\varepsilon) \\ L(u) &= n + O(u), \quad |u| \to 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Плоская контактная задача. Заменим первое граничное условие (1) следующими:

$$v_x'(x, H) = -[\beta - f'(x)], \quad |x| \le a; \quad \sigma_y^{(1)}(x, H) = 0, \quad |x| > a \tag{2.1}$$

Первое граничное условие (2.1) есть условие контакта между жестким штампом, основание которого описывается функцией $y = f(x)$, и поверхностью двухполосного покрытия упругой полуплоскости. Второе граничное условие (2.1) есть условие отсутствия нормальной нагрузки на поверхности вне зоны контакта $|x| \le a$. Будем считать, что штамп вдавливается без трения в трехслойное основание силой P, под действием которой он перемещается на некоторую малую величину поступательно в отрицательном направлении оси y и поворачивается на малый угол β.

Принимая неизменными остальные граничные условия (1.1)–(1.3) и условие отсутствия напряжений в конструкции на бесконечности, видим, что первое граничное условие (2.1) будет удовлетворено, если с учетом формулы (1.8) записать соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(\alpha) L(|\alpha| H) Q(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = 2\pi i \theta_1 [\beta - f'(x)], \quad |x| \le a \tag{2.2}$$

Второму граничному условию (2.1) удовлетворим, если обращение формулы (1.7) запишем в виде

$$Q(\alpha) = \int_{-a}^{a} q(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \tag{2.3}$$

где $q(x)$ – неизвестное контактное давление.

Подставляя (2.3) в (2.2), после несложных преобразований получим интегральное уравнение для определения $q(x)$:

$$\int_{-a}^{a} q(\xi) d\xi \int_{0}^{\infty} L(u) \sin\left(u \frac{\xi - x}{H}\right) du = \pi \theta_1 H[\beta - f'(x)], \quad |x| \le a \tag{2.4}$$

К этому уравнению добавим условия равновесия штампа

$$P = \int_{-a}^{a} q(\xi) d\xi, \quad Pe = \int_{-a}^{a} \xi q(\xi) d\xi \tag{2.5}$$

где e – расстояние от оси y до оси приложения к штампу силы P. Второе условие (2.5) служит для определения угла поворота штампа β. Если полудлина линии контакта a не фиксируется углами штампа, то к уравнению (2.4) следует добавить условия

$$q(\pm a) = 0 \tag{2.6}$$

необходимые при заданной силе P для определения величин a и e.

3. Метод решения плоской задачи. Используя интеграл

$$\int_{0}^{\infty} \sin(uz) du = \frac{1}{z} \tag{3.1}$$

понимаемый в обобщенном смысле, придадим интегральному уравнению (2.4) вид

$$\int_{-a}^{a} q(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x} = \pi\theta_1[\beta - f'(x)] + \frac{1}{H}\int_{-a}^{a} q(\xi)G\left(\frac{\xi - x}{H}\right)d\xi$$
$$G(z) = \int_0^\infty [1 - L(u)]\sin(uz)du \tag{3.2}$$

Заметим, что в левой части уравнения (3.2) стоит сингулярный оператор с ядром Коши. В правой части стоит регулярный оператор, ибо функция $G(t)$ непрерывна, в чем можно убедиться на основании формул (1.9).

Для построения приближенного решения интегрального уравнения (3.2) предлагается использовать модифицированный метод Мультопа – Каландия [1, 2]. Кратко изложим его схему. Можно показать [3], что общее решение уравнения (3.2) имеет форму

$$q(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{3.3}$$

Подставим (3.3) в (3.2) и перейдем к новым переменным $\xi = a\cos(\tau)$, $x = a\cos(t)$. В результате получим

$$\int_0^\pi \frac{\Omega(\tau)d\tau}{\cos(\tau) - \cos(t)} = \pi g(t) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \Omega(\tau)G\left(\frac{\cos(\tau) - \cos(t)}{\lambda}\right)d\tau$$
$$\Omega(t) = \frac{\omega(a\cos(t))}{a\theta_1}, \quad g(t) = \beta - f'(a\cos(t)), \quad \lambda = \frac{H}{a} \tag{3.4}$$

Введем в рассмотрение для функции $\omega(x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам

$$x_l = a\cos(t_l), \quad t_l = \pi(2l - 1)/(2N) \ (l = 1, 2, \ldots, N) \tag{3.5}$$

которые являются нулями полинома Чебышева первого рода $T_N(x/a)$. В частных случаях, когда $\omega(x)$ – четная или нечетная функция и $N = 2r + 1$ $(r \geq 1)$, такие многочлены соответственно имеют вид

$$\Omega(t) \simeq \frac{1}{r + 1/2}\sum_{l=1}^{r+1}\Omega(t_l)\delta_l\left(1 + 2\sum_{m=1}^{r}\cos(2mt_l)\cos(2mt)\right)$$
$$\Omega(t) \simeq \frac{2}{r + 1/2}\sum_{l=1}^{r}\Omega(t_l)\left(\sum_{m=1}^{r}\cos((2m-1)t_l)\cos((2m-1)t)\right) \tag{3.6}$$
$$\delta_l = 1 \ (l \neq r + 1), \quad \delta_l = 1/2 \ (l = r + 1)$$

Подставив в уравнение (3.4) приближенные выражения $\Omega(t)$ в одной из форм (3.6) и использовав соотношение (7.344(1) [4]):

$$\int_0^\pi \frac{\cos(j\tau)d\tau}{\cos(\tau) - \cos(t)} = \pi\frac{\sin(jt)}{\sin(t)}, \quad 0 \leq t \leq \pi \ (j = 0, 1, \ldots) \tag{3.7}$$

вычислим точно интеграл в левой части уравнения (3.4). Чтобы приближенно вычислить интеграл в правой части этого уравнения, используем квадратурную формулу Гаусса

$$\int_0^{\pi} p(\tau)d\tau = \frac{\pi}{N}\sum_{l=1}^{N} p(t_l) \tag{3.8}$$

Вычислив интегралы в (3.4), в полученном соотношении положим $t = t_s$ и придем к системе r линейных алгебраических уравнений относительно значений $\Omega(t_l)$:

$$-\sum_{l=1}^{r+1-p} \Omega(t_l)\delta_l\left\{\frac{1}{\sin(t_s)}\chi_r^{(p)}(t_l, t_s) + \frac{1}{2\lambda}\left[G\left(\frac{\cos(t_l) - \cos(t_s)}{\lambda}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(-1)^p G\left(\frac{\cos(t_l) + \cos(t_s)}{\lambda}\right)\right]\right\} = \left(r + \frac{1}{2}\right)g(t_s) \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{3.9}$$

$$\chi_r^{(p)}(\tau, t) = -2\sum_{m=1}^{r} \cos((2m-p)\tau)\sin((2m-p)t)$$

где $p = 0$ для четного варианта, $p = 1$ для нечетного варианта.

Чтобы замкнуть систему уравнений (3.9) для четного варианта, необходимо добавить уравнение, получаемое из первого условия (2.5) с помощью формулы (3.3) и первой формулы (3.6):

$$\frac{P}{a\theta_1} = \frac{\pi}{r + 1/2}\sum_{l=1}^{r+1} \Omega(t_l)\delta_l \tag{3.10}$$

После того, как решена система (3.9), (3.10) для четного варианта и система (3.9) для нечетного варианта относительно $\Omega(t_l)$, по формулам (3.6) могут быть найдены приближенные выражения функций $\Omega(t)$, а следовательно, и функций $\omega(x)$ и $q(x)$. Далее нетрудно воспользоваться, если необходимо, вторым условием (2.5) и условиями (2.6) для определения величин β, a и e.

Рассмотрим пример параболического штампа с гладкими краями под действием центрально расположенной силы. Функция формы основания штампа имеет вид $f(x) = x^2/(2R)$, где R – радиус кривизны в вершине параболы. Используя следующие значения параметров: $G_2 = 3/2G_1$, $G_3 = 2G_1$, $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.35$, $\nu_3 = 1/3$, $H/h = 2$, найдем зависимость коэффициента связи $PR/(\theta_1 a)$ и a/R от λ. Ниже даны значения величины $c_0 = PR/(\theta_1 a^2)$, подсчитанные при различных значениях параметра λ:

λ	1/4	1/2	1	2	4
c_0	2.72	2.48	2.11	1.93	1.65

4. Осесимметричная контактная задача. Рассмотрим осесимметричную контактную задачу о вдавливании жесткого штампа в трехслойное основание, состоящее из двух упругих слоев, лежащих на упругом полупространстве. Слои полностью сцеплены друг с другом и с полупространством. Толщины верхнего и нижнего слоев $H - h$ и h соответственно. Согласно [5], данная контактная задача посредством преобразования Ханкеля сводится к интегральному уравнению 1-го рода относительно контактного давления $q(r)$ с симметричным ядром

$$\int_0^a q(\rho)K\left(\frac{\rho}{H}, \frac{r}{H}\right)\rho d\rho = \theta_1 H[\delta - f(r)], \quad 0 \le r \le a$$
$$K(\sigma, \tau) = \int_0^\infty L(u)J_0(\sigma u)J_0(\tau u)du, \quad \theta_1 = \frac{G_1}{1-\nu_1} \tag{4.1}$$

где a – радиус области контакта, δ – поступательное перемещение штампа по оси ортогональной поверхности основания, $f(r)$ – функция формы основания штампа, H – толщина двухслойной плиты, G_1 и ν_1 – механические характеристики верхнего слоя. Функция $L(u)$ совпадает [6] с найденной во вспомогательной задаче.

К интегральному уравнению (4.1) добавим условие равновесия штампа

$$P = 2\pi\int_0^a q(\rho)\rho d\rho \tag{4.2}$$

служащее для определения связи между вдавливающей силой P и внедрением штампа δ. Если радиус области контакта a не задан формой штампа в постановке задачи, то он устанавливается исходя из следующего условия

$$q(a) = 0 \tag{4.3}$$

5. Метод решения осесимметричной задачи. Интегральное уравнение первого рода (4.1) может быть сведено [6, 7] к следующему интегральному уравнению второго рода с разностным ядром:

$$p(x) - \frac{1}{\pi H}\int_{-a}^{a} p(\xi)M\left(\frac{\xi - x}{H}\right)d\xi = \theta_1 g(x), \quad |x| \le a$$
$$M(y) = \int_0^\infty [1 - L(u)]\cos(uy)du \tag{5.1}$$

причем функции $p(x)$ и $g(x)$ – четные и связаны с функциями $q(r)$ и $\delta(r) = \delta - f(r)$ соотношениями

$$q(r) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{p(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{p'(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\right]$$
$$g(x) = \delta(0) + |x|\int_0^{|x|} \frac{\delta'(\rho)d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \tag{5.2}$$

Введем следующие безразмерные комплексы:

$$x' = \frac{x}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}, \quad \varphi(x') = \frac{p(ax')}{\theta_1 a}, \quad \psi(x') = \frac{g(ax')}{a}, \quad \lambda = \frac{H}{a} \tag{5.3}$$

и перепишем интегральное уравнение (5.1) следующим образом:

$$\varphi(x)-\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\left[M\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)+M\left(\frac{\xi+x}{\lambda}\right)\right]d\xi = \psi(x),\quad |x|\le 1 \tag{5.4}$$

Здесь и далее штрихи у x' и ξ' для упрощения записи опускаем.

Для приближенного решения интегрального уравнения (5.4) применим метод коллокации, изложенной в [8, 9]. Построим для функции $\varphi(x)$ четный интерполяционный полином Лагранжа по нулям полинома Лежандра

$$P_{2N+1}(x) = \frac{1}{2^{2N+1}(2N+1)!}\cdot\frac{d^{2N+1}(x^2-1)^{2N+1}}{dx^{2N+1}} \tag{5.5}$$

Он будет иметь вид

$$\varphi(x)\approx\frac{\varphi(0)P_{2N+1}(x)}{xP'_{2N+1}(0)}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)xP_{2N+1}(x)}{(x^2-x_n^2)P'_{2N+1}(x_n)} \tag{5.6}$$

$$(P_{2N+1}(x_n)=0,\ n=0,1,2,\ldots,N,\ x_0=0)$$

Заметим, что возможно перейти к полиномам четных степеней, так как

$$\frac{xP_{2N+1}(x)-x_nP_{2N+1}(x_n)}{x^2-x_n^2}=\sum_{i=0}^{N}a_{in}P_{2i}(x) \tag{5.7}$$

Тогда формула (5.6) примет вид

$$\varphi(x)\approx\sum_{i=0}^{N}P_{2i}(x)\left[\frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)}a_{i0}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)}a_{in}\right] \tag{5.8}$$

Воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получим, используя (5.8), следующую квадратурную формулу типа Гаусса:

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)d\xi\approx 2\left[\frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)}a_{00}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)}a_{0n}\right] \tag{5.9}$$

Применив (5.9) для приближенного вычисления интеграла в уравнении (5.4) и положив $x=x_m$, где x_m – нули полинома $P_{2N+1}(x)$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно значений $\varphi(x_m)$:

$$\varphi(x_m)-\frac{1}{\pi\lambda}\left\{\frac{\varphi(0)a_{00}}{P'_{2N+1}(0)}\left[M\left(-\frac{x_m}{\lambda}\right)+M\left(\frac{x_m}{\lambda}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)}a_{0n}\left[M\left(\frac{x_n-x_m}{\lambda}\right)+M\left(\frac{x_n+x_m}{\lambda}\right)\right]\right\}=\psi(x_m) \tag{5.10}$$

$$(m=0,1,\ldots,N)$$

Решив эту систему, найдем приближенное выражение для функции $p(x)$:

$$p(x) = \theta_1 a \sum_{i=0}^{N} a_i P_{2i}\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$a_i = \frac{\varphi(0)}{P'_{2N+1}(0)} a_{i0} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(x_n)}{P'_{2N+1}(x_n)} a_{in} \tag{5.11}$$

Подставив (5.11) в (5.2), найдем выражение для функции $q(r)$

$$q(r) = \frac{2\theta_1 a}{\pi} \sum_{i=0}^{N} a_i \left[\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{i-1}(-1)^{i-m-1} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(4i-4m-1)(2i-2m-2)!!}{(2i-2m-1)!!} P_{2i-2m-1}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)\right] \tag{5.12}$$

Соотношении (4.2), (4.3) в силу (5.12) получат следующий вид:

$$P = 4\theta_1 a^2 a_0; \quad \sum_{i=0}^{N} a_i = 0 \tag{5.13}$$

В качестве примера возьмем штамп параболического профиля под действием центрально расположенной силы. Функция формы основания штампа имеет вид $f(r) = r^2/(2R)$, где R – радиус кривизны в вершине параболы. Используя следующие значения параметров: $G_2 = 3/2G_1$, $G_3 = 2G_1$, $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.35$, $\nu_3 = 1/3$, $H/h = 2$, найдем зависимость коэффициентов связи $P/(\theta_1 a^2)$ и δ/a, а также между $P/(\theta_1 a^2)$ и a/R от λ. Ниже приведены значения величин $c_1 = P/(\theta_1 a\delta)$ и $c_2 = PR/(\theta_1 a^3)$, вычисленные при различных значениях параметра λ:

λ	1/4	1/2	1	2	4
c_1	5.227	4.568	3.926	3.363	3.01
c_2	2.298	1.927	1.624	1.429	1.353

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00002), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (грант 03-01-96551), программы "Университеты России" (грант УР 04.02.527).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 175 с.
2. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
3. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 335 с.

4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Александров В.М.* Асимптотические методы в задачах механики сплошной среды со смешанными граничными условиями // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 102–108.
7. *Уфлянд Я.С.* Интеральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
8. *Александров В.М., Клиндухов В.В.* Контактные задачи для двухслойного упругого основания с неидеальной механической связью между слоями // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 84–92.
9. *Александров В.М., Клиндухов В.В.* Модифицированный метод Мультоппа – Каландия в осесимметричных контактных задачах // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦВШ, 2001. Т. 2. С. 13–16.

Москва

Поступила в редакцию
13.07.2004