

УДК 531.391:521.93

© 2005 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.А. КУМАКШЕВ, Ю.Г. МАРКОВ

## ВОЗМУЩЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ ЗЕМЛИ

Исследованы вращательно-колебательные движения Земли относительно центра масс в рамках квазистационарной модели вязкоупругого осесимметричного тела, находящегося под действием возмущающих моментов гравитационных сил от Солнца и Луны. Основное внимание уделено анализу колебаний полюсов, т.е. вектора угловой скорости вращения в связанной системе координат (референц-системе). Выявлен приливной механизм возбуждения колебаний, обусловленный вращательно-поступательным движением барицентра "двойной планеты" Земля-Луна вокруг Солнца и наклоном оси вращения Земли к плоскости орбиты.

Установлено, что основные характеристики колебаний остаются весьма стабильными и практически не изменяются на интервалах времени наблюдения. С помощью методов небесной механики построена простая математическая модель колебаний, содержащая две частоты ("собственную" и годичную) и адекватная точности астрометрических данных Международной Службы Вращения Земли (МСВЗ). С учетом спектрального анализа измерений МСВЗ проведена идентификация параметров модели методом наименьших квадратов. Получена статистически и визуально убедительная интерполяция данных измерений на значительных интервалах времени. Приводится качественный прогноз на 1–5 лет, подтверждаемый наблюдениями в течение нескольких последних лет. Результаты представляют естественнонаучный теоретический интерес, а также важны для приложений к проблемам навигации и геофизики.

**1. Введение.** В основе многих астрометрических исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно центра масс [1–5]. Известно из астрономических наблюдений (со второй половины 19 в., а, возможно, существенно раньше), что ось вращения Земли с течением времени изменяет свою ориентацию как по отношению к связанной, так и инерциальной системам координат. Это означает, что полюса и широты эволюционируют в заметных пределах в течение года.

Измерения свидетельствуют, что в весьма сложном колебательном процессе содержатся составляющие с сильно различающимися частотными и амплитудными характеристиками. Так малые колебания вектора угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат (референц-системе) содержат основную составляющую, амплитуда которой достигает величины  $0.20''$ – $0.25''$ , а период равен приблизительно 430–440 звездных суток [1–4]. Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемой классической теорией твердого тела (от периода прецессии Эйлера 305 суток для недеформируемой фигуры Земли) потребовало объяснения. Оно было частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях В. Томсона, С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденко и др. [4]. Исторически принято называть указанное движение свободной нутацией деформируемой Земли или чандлеровским колебанием полюса (для определенности Северного полюса).

Было установлено также существование заметной составляющей с амплитудой  $0.07''-0.08''$  и резко выраженным периодом, равным одному году (около 365.25 звездных суток). Наблюдаемые колебания полюса имеют характер биений. Траектория движения полюса на поверхности Земли представляет собой свертывающуюся и развертывающуюся спираль с периодом, близким к 6-ти годам.

Анализ траектории полюса и прогноз его движения представляют значительный интерес в естественнонаучном и прикладном аспектах. Построение высокоточной теоретической модели вращения деформируемой Земли, идентификация ее параметров на основе данных измерений МСВЗ и надежный прогноз движения полюса весьма важны при решении задач инерциальной навигации [6] на достаточно длительных для практических целей интервалах времени и при исследованиях ряда астрометрических и геофизических проблем [1-5].

Приведем ряд предварительных замечаний, относящихся к постановке задачи. Для описания вращательного движения деформируемой Земли и колебаний ее полюса рассматривается механическая модель вязкоупругого твердого тела [7]. Планета представляется двухслойной, состоящей из абсолютно твердого ядра (шара) и вязкоупругой мантии. Какое-либо усложнение модели фигуры Земли не представляется оправданным, поскольку в этом случае определение требуемых физико-механических характеристик планеты на основе измерений не может быть проведено с требуемой точностью. Авторы придерживаются очевидного положения, что сложность модели на всех этапах ее построения должна строго соответствовать решаемой задаче и уровню точности данных наблюдений.

С позиций теоретической механики проблема анализа процесса колебаний полюса Земли аналогичен задаче исследования движений оси гироскопа под действием возмущающих моментов сил и с учетом вязкоупругих деформаций в квазистатическом приближении.

На начальном этапе исследования движения полюса и его эволюции под действием возмущающих моментов рассматривается пространственный вариант задачи двух тел [7, 8]. Считается, что центр масс деформированной планеты (Земли) и точечный спутник (Луна) совершают известное взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца.

На основе асимптотического анализа уравнений движения в оскулирующих переменных действие-угол ниже определяются стабильные характеристики вращательно-колебательного движения деформируемой Земли относительно центра масс в квазистатическом приближении. Сперва находят уточненные периоды (частоты) осевого вращения и чандлеровского колебания и проводятся сопоставление с данными спектрального анализа [1-3]. Даются оценки амплитуд свободных колебаний вектора угловой скорости в связанной системе координат и сравниваются с наблюдаемыми значениями.

С помощью кинематических и динамических уравнений Эйлера строится математическая модель первого приближения чандлеровского колебания полюса. В заключение излагаются результаты численного определения параметров движения методом наименьших квадратов на основе ежедневных данных измерений МСВЗ [2], даются построение траектории и прогноз движения полюса Земли в сопоставлении с экспериментальными данными МСВЗ.

**2. Оценки параметров движения в задаче о “свободной нутации” полюса Земли.** Основное внимание уделяется определению колебаний вектора угловой скорости вращения деформируемой Земли относительно связанной с некоторой “замороженной” системой координат [1-4]. Для исследования “свободной нутации” (чандлеровской компоненты движения полюса) удобно перейти от переменных Андуайе к переменным типа действие-угол  $I_j, w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), см. [7]. Переменные действие-угол задают гамильто-

нову систему переменных. Следующие основные динамические параметры  $\kappa$  и  $\lambda$  характеризуют вращательные движения Земли:

$$\kappa^2 = \frac{C^*(A^* - B^*)}{A^*(B^* - C^*)}, \quad \lambda^2 = \kappa^2 \frac{2EC^* - I_2^2}{I_2^2 - 2EA^*} \quad (2.1)$$

Здесь  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  – эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций “замороженной” Земли, обусловленных сложным движением – собственным вращением и движением относительно барицентра системы Земля–Луна. Постоянная  $E$  имеет смысл интеграла кинетической энергии промежуточного движения (вращений) деформируемой Земли,  $I_2 = G$  – модуль кинетического момента Земли. Связь между переменными действие-угол  $I_j$ ,  $w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и каноническими переменными Андуайе  $L$ ,  $G$ ,  $G_{\xi_3}$ ,  $\varphi_j$  выражается через эллиптические функции Якоби и интегралы. Для случая, соответствующего вращению Земли, имеют место соотношения [7]:

$$I_1 = \frac{2I_2 \kappa_*}{\pi \kappa} \chi \left[ \chi^2 \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right) - \lambda^2 \mathbf{K}(\lambda) \right]$$

$$\kappa_* = \sqrt{1 + \kappa^2}, \quad \chi = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad I_2 = G, \quad I_3 = G_{\xi_3}$$

$$w_1 = \pm \frac{\pi F(\zeta, \lambda)}{2 \mathbf{K}(\lambda)}, \quad \operatorname{tg} \zeta = -\kappa_*^{-1} \operatorname{ctg} \varphi_1 \quad (2.2)$$

$$w_2 = \varphi_2 \pm \frac{\kappa_* \lambda}{\kappa} \left[ \Pi(\zeta, \kappa^2, \lambda) - \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right) \frac{F(\zeta, \lambda)}{\mathbf{K}(\lambda)} \right]$$

$$\zeta = \pm \operatorname{am}(\eta, \lambda), \quad \eta = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(\lambda) w_1, \quad w_3 = \varphi_3$$

Здесь  $F(\zeta, \lambda)$  и  $\Pi(\zeta, \kappa^2, \lambda)$  – неполные эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно,  $\mathbf{K}(\lambda)$  и  $\Pi(\pi/2, \kappa^2, \lambda)$  – отвечающие им полные эллиптические интегралы.

С помощью введенных согласно (2.1), (2.2) переменных действие-угол может быть выписан функционал Рауса промежуточной модельной задачи и построены траектории в фазовом пространстве  $I_j$ ,  $w_j$ . В частности, усредненный по быстрым переменным  $\varphi_2$  и  $\vartheta$ , отвечающим собственному вращению и орбитальному движению, функционал Рауса  $R_0$  имеет вид

$$R_0 = \frac{1}{2A^*} I_2^2 \left( 1 - \frac{(C^* - A^*) \kappa^2}{C^* \chi^2} \right) \quad (2.3)$$

Общее решение рассматриваемой на предварительном этапе усредненной задачи равно

$$I_i(t) = I_i^0 = \operatorname{const}, \quad w_3(t) = w_3^0, \quad w_{1,2}(t) = n_{1,2}t + w_{1,2}^0$$

$$n_1 = -\frac{\pi}{2} I_2 \frac{C^* - A^*}{A^* C^*} \kappa \kappa_*^{-1} \chi^{-1} \mathbf{K}^{-1}(\lambda) \quad (2.4)$$

$$n_2 = \frac{I_2}{C^*} \left( 1 + \frac{(C^* - A^*)}{A^*} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2, \lambda\right) \mathbf{K}^{-1}(\lambda) \right)$$

где  $I_j^0$ ,  $w_j^0$  – начальные значения, определяемые через переменные Андуайе в некоторый момент времени  $t = t_0$  посредством выражений (2.2). Фазы  $w_1$ ,  $w_2$  и частоты  $n_1$ ,  $n_2$  отвечают, соответственно, чандлеровскому движению полюсов и суточному вращению деформируемой Земли.

Таким образом, в “промежуточном движении” деформируемая Земля равномерно вращается в поле центробежных сил инерции и гравитационного поля Луны. Для модели абсолютно твердой планеты имеет место регулярная прецессия Эйлера – Пуансо. В рассматриваемом случае деформируемой Земли выражения (2.4) также описывают регулярную прецессию, но угловые скорости прецессии и собственного вращения изменяются на некоторую относительно малую величину, обусловленную возмущающими факторами.

При возмущенном движении с учетом диссипативных свойств вязкоупругой мантии Земли имеет место регулярная прецессия с медленно изменяющимися во времени параметрами, т.е. возникает эволюция медленных переменных, подлежащая изучению на основе асимптотических методов нелинейной механики. Полученное решение (2.4) является порождающим для использования метода усреднения при учете возмущающих моментов сил различной физической природы как внешних (гравитационных), так и внутренних (геофизических).

Оценка величины  $\lambda$  для системы Земля – Луна свидетельствует, что  $\lambda \ll 1$  ( $\lambda^2 \sim 10^{-14}$ ), т.е. мало отношение  $(I_2 - I_1)/I_2$ . Это позволяет существенно упростить выражения (2.1)–(2.4). В первом приближении из первого соотношения (2.2) находим

$$\lambda^2 = \frac{2\kappa_*^2(I_2 - I_1)}{I_2\kappa_*} \quad (2.5)$$

После подстановки  $\lambda^2$  (2.5) выражения для частот  $n_1, n_2$  (2.4) “промежуточного движения” получают выражения

$$\dot{w}_1 = n_1 = -\frac{I_2 C^* - A^*}{\kappa_* A^* C^*} \left( 1 - \frac{2 + \kappa_*^2 I_2 - I_1}{2\kappa_* I_2} \right) \quad (2.6)$$

$$\dot{w}_2 = n_2 = -\frac{I_2}{C^*} \left( 1 + \frac{C^* - A^*}{\kappa_* A^*} \left[ 1 + \frac{I_2 - I_1}{2\kappa_* I_2} (2\kappa_* - 2 - \kappa_*^2) \right] \right)$$

Посредством формулы (2.6) для  $n_1$  находим теоретическое значение угловой скорости и периода колебаний  $T_1^* = 2\pi/n_1 \approx 430$  суток. Полученное значение находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными измерений периода колебаний  $T_1 \approx 420\text{--}440$  звездных суток, известного как чандлеровский период колебаний полюса Земли [1–5].

Движение полюса определяется как угловое смещение оси вращения в теле планеты относительно связанной системы координат (референц-системы [4]). Компоненты вектора угловой скорости представимы через фазу  $w_1$  в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon = \lambda\kappa^{-1} \sim 10^{-6}$ . С относительной погрешностью  $O(\varepsilon^4) \sim 10^{-24}$  составляющие вектора угловой скорости равны [7]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\lambda I_2}{\chi A^*} \operatorname{cn}(u, \lambda) = \varepsilon \frac{I_2}{A^*} \left( \cos w_1 + \frac{\varepsilon^2}{16} [-(\kappa^2 + 8) \cos w_1 + \kappa^2 \cos 3w_1] \right) + O(\varepsilon^5) \\ \omega_2 &= \frac{\lambda I_2}{\chi B^*} \operatorname{sn}(u, \lambda) = \varepsilon \sqrt{1 + \kappa^2} \frac{I_2}{B^*} \left( \sin w_1 + \frac{\varepsilon^2}{16} [(\kappa^2 - 8) \sin w_1 + \kappa^2 \sin 3w_1] \right) + O(\varepsilon^5) \\ \omega_3 &= \frac{\kappa I_2}{\chi C^*} \operatorname{dn}(u, \lambda) = \frac{I_2}{C^*} + \frac{\varepsilon^2 I_2}{4 C^*} (-2 - \kappa^2 + \kappa^2 \cos 2w_1) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$u = 2/\pi \mathbf{K}(\lambda) w_1, \quad \varepsilon = 1.2 \cdot 10^{-6}$$

Угловые координаты, отвечающие свободной нутации (чандлеровской компоненты движения)  $(x_c, y_c)$ , соответствующий угол  $\alpha$  между осью фигуры и осью вращения и линейные координаты  $X_c, Y_c$  на касательной к геоиду плоскости с учетом главных членов разложений (2.7) определяются выражениями

$$x_p = \frac{\omega_x}{\omega} \approx \frac{C^* \lambda}{A^* \kappa} \cos w_1, \quad y_p = -\frac{\omega_y}{\omega} \approx \frac{C^* \lambda}{B^* \kappa} \kappa_* \sin w_1$$

$$X_c = R x_c, \quad Y_c = R y_c$$

$$\cos \alpha = \frac{\omega_3}{\omega} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{C^{*2}}{A^{*2}} \cos^2 w_1 + (1 + \kappa^2) \frac{C^{*2}}{B^{*2}} \sin^2 w_1 \right) \quad (2.8)$$

$$\max |X_c|, |Y_c| \approx 7.5 \text{ м}, \quad R = 6.38 \cdot 10^6 \text{ м}$$

В первом приближении по  $\varepsilon$  полюдия, отвечающая свободной нутации с периодом Чандлера, есть эллипс с весьма малым эксцентриситетом  $e \approx 0.005$ . Данные МСВЗ [2] подтверждают теоретические оценки (2.8). Период и амплитуда колебаний, как показывает анализ влияния приливных моментов диссипативных сил, несущественно изменяются на значительных интервалах времени. Этот вопрос требует дополнительного обсуждения.

**3. Математическая модель колебаний полюса первого приближения.** Для построения модели вращательного движения относительно центра масс представим уравнения в форме классических динамических уравнений Эйлера с переменным тензором инерции  $J$  [1, 3–5, 7–9]:

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = M, \quad \omega = (p, q, r)^T, \quad J = J^* + \delta J, \quad J^* = \text{const} \quad (3.1)$$

$$J^* = \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \quad \delta J = \delta J(t), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|$$

Здесь  $\omega$  – вектор угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат (референц-системе [4]), которая приближенно совпадает с главными центральными осями инерции  $J^*$  “замороженной” Земли с учетом “экваториального выступа” [1–5, 7]. Дополнительные возмущающие члены, получающиеся при дифференцировании вектора кинетического момента деформируемой Земли (см. [8, 9]), отнесены к вектору возмущающего момента сил  $M$  весьма сложной структуры. Считается, что малые вариации тензора инерции  $\delta J$  могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные влиянием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно, другие (годовые, полугодовые, месячные, полусуточные). В качестве основных факторов возмущающих внешних моментов сил  $M$ , вызывающих нутационные колебания, принимаются гравитационные воздействия. Возможное наличие слагаемого типа  $J\dot{\omega}$  не приводит к уточнению модели первого приближения. Попытка строгой оценки этих членов путем учета геофизических факторов затруднительна и не приводит к удовлетворительным результатам. Анализ их влияния в известной литературе часто носит сугубо спекулятивный и схоластический характер, поскольку не связан с определением моментов сил (их амплитудой, направлением, частотными и фазовыми характеристиками).

Кинематические уравнения Эйлера, задающие ориентацию связанных осей относительно орбитальной системы координат, имеют вид [10]:

$$\theta = p \cos \varphi - q \sin \varphi - \omega_0(v) \sin \psi, \quad \dot{v} = \omega_0(v) = \omega_* (1 + e \cos v)^2$$

$$\psi = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} - \omega_0(v) \operatorname{ctg} \theta \cos \psi, \quad e = 0.0167 \quad (3.2)$$

$$\dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta + \omega_0(v) \frac{\cos \psi}{\sin \theta}$$

Здесь  $v(t)$  – истинная аномалия,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\omega_*$  – постоянная, определяемая гравитационным и фокальным параметрами. При исследовании системы (3.1), (3.2) в ситуации, отвечающей движению полюса, пропорциональные  $\omega_0$  члены уравнений (3.2) оказываются существенно большими по сравнению с  $p, q$  (приблизительно в 300 раз) и определяющими для  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ . В научной литературе это важное свойство не отмечено, а указанные выше члены не учитывались без должного обоснования (орбитальное и вращательное движения разделялись) [1–5].

**4. Годичная компонента вынужденных колебаний полюса Земли.** Структура выражений для компонент момента сил гравитации от Солнца имеет вид [9]:

$$M_q = 3\omega^2 [(A^* + \delta A - (C^* + \delta C)) \gamma_r \gamma_p + \delta J_{pq} \gamma_r \gamma_q + \delta J_{pr} (\gamma_r^2 - \gamma_p^2) - \delta J_{rq} \gamma_p \gamma_q], \quad \omega = \omega_* (1 + e \cos v)^{3/2} \quad (4.1)$$

$$\gamma_p = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_q = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_r = \cos \theta$$

Для вычисления  $M_{p,r}$  в (4.1) делается циклическая перестановка индексов  $p, q, r$ . Из анализа (4.1) следует, что годичная компонента колебаний полюса может быть обусловлена слагаемым, содержащим произведения направляющих косинусов  $\gamma_p \gamma_r$  и  $\gamma_q \gamma_r$ . Для их вычисления в первом приближении интегрируются уравнения (4.1):

$$r = r^0, \quad \varphi \approx rt + \varphi^0, \quad v \approx \omega_* t + v^0, \quad \cos \theta(v) = a(\theta^0, \psi^0) \cos v$$

$$\theta(0) = \theta^0 = 66^\circ 33', \quad 0.4 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq \psi^0 \leq 2\pi \quad (4.2)$$

$$\cos \theta \sin \theta = b(\theta^0, \psi^0) \cos v + d \cos 3v + \dots, \quad 0.4 \leq b \leq \frac{4}{3\pi}, \quad |d| \ll 1$$

Вторая и более высокие гармоники по  $v$  приводят к величинам, меньшим основных в  $10^2$ – $10^3$  раз и поэтому не учитываются. Величина  $B^* - A^*$  также существенно меньше, чем  $C^* - A^*$  (приблизительно в 160 раз). Оценка членов уравнений (3.1) для  $p, q$  приводит с учетом выражений (4.2) после усреднения по быстрой фазе  $\varphi$  к упрощенной аналитической модели вида

$$\dot{p} + N_p q = \kappa_p r^2 + 3b\omega_*^2 \chi_p \cos v, \quad N_{p,q} \approx N = 2\pi/T_1 \approx (0.84-0.85)\omega_* \quad (4.3)$$

$$\dot{q} - N_q p = -\kappa_p r^2 - 3b\omega_*^2 \chi_q \cos v, \quad p(0) = p^0, \quad q(0) = q^0$$

Здесь  $\kappa_p, \kappa_q$  – средние значения  $\delta J_{pr}/B^*, \delta J_{qr}/A^*$ , которые могут быть медленными функциями. Величины  $\chi_p, \chi_q$  получаются в результате усреднения по  $\varphi$  коэффициентов при  $\cos v$  в компонентах момента гравитационных сил от Солнца, причем  $\chi_p = \chi_q$ . Они обусловлены, как отмечалось, суточными приливами. Моменты сил гравитации от Луны не учитываются из-за относительной малости их влияния на нутационные колебания вследствие значительного различия частот. Правые части уравнений (4.3) содержат в явной форме гармоническое воздействие с годичным периодом, объясня-

общее механизм нутационных колебаний, регистрируемых наблюдениями МСВЗ. Хотя чувствительность коэффициентов  $\kappa_{p,q}$  на 5 порядков выше, чем  $\chi_{p,q}$ , однако явный регулярный механизм годичного (силомоментного) воздействия с требуемой согласно оценкам амплитудой  $M_h \sim 10^2 \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-2}$  посредством внутренних геофизических факторов (атмосферных, океанических, сезонных) представляется несостоятельным в механическом аспекте. Частотный анализ годичной компоненты колебаний также свидетельствует о несостоятельности геофизической интерпретации [1].

Проблема построения гравитационно-приливного механизма колебаний с периодом, весьма близким к чандлеровскому, требует отдельного исследования.

**5. Интерполяция и прогноз движения полюса.** Величины коэффициентов  $\kappa_{p,q}$ ,  $\chi_{p,q}$  и начальные значения  $p^0$ ,  $q^0$  в (4.3) неизвестны. Они подлежат определению на основе данных наблюдений МСВЗ [2]. Вводя переменные  $x(\tau) = p(t)$ ,  $y(\tau) = q(t)$ , где  $\tau = t/T_h$  – время, измеряемое годами, получим структуру решения системы (4.3) вида [9]:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= c_x^0 + c_x^1 \tau - a_x^c \cos 2\pi\Omega\tau + a_x^s \sin 2\pi\Omega\tau - \\ &- \frac{\Omega}{1 - \Omega^2} d_x^c \cos 2\pi\tau - \frac{1}{1 - \Omega^2} d_x^s \sin 2\pi\tau \\ y(\tau) &= c_y^0 + c_y^1 \tau + a_y^c \cos 2\pi\Omega\tau + a_y^s \sin 2\pi\Omega\tau - \\ &- \frac{\Omega}{1 - \Omega^2} d_y^c \cos 2\pi\tau + \frac{1}{1 - \Omega^2} d_y^s \sin 2\pi\tau \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\Omega = 0.840 - 0.845$$

Здесь  $a_{x,y}^{c,s}$ ,  $c_{x,y}^{0,1}$ ,  $d_{x,y}^{c,s}$  – величины, подлежащие вычислению с помощью метода наименьших квадратов [11] по данным измерений МСВЗ [2]. Эти коэффициенты однозначно связаны с неизвестными, содержащимися в системе (4.3) При этом следует иметь в виду равенства

$$a_x^{c,x} = a_y^{s,c}, \quad d_x^{c,s} = d_y^{s,c} \quad (5.2)$$

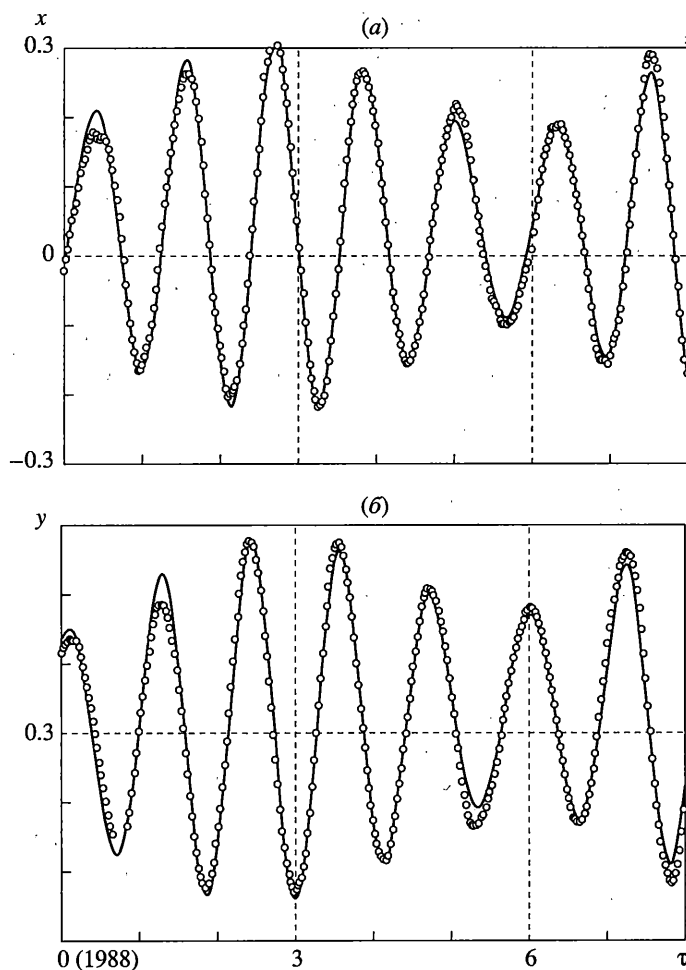
являющиеся структурным свойством модели. При вычислениях они должны выполняться с достаточно наглядной точностью.

Введенные параметры могут на достаточно длительном интервале  $0 \leq \tau \leq \Theta$  (где, например,  $\Theta \sim 10-20$  лет) подвергаться коррекции вида:  $c_{x,y} = c_{x,y}^0 + c_{x,y}^1 \tau + \dots$ , и аналогично  $a_{x,y}^{c,s}$ ,  $d_{x,y}^{c,s}$ . Вековые члены должны учитывать эволюцию параметров системы (3.1), (4.1), (4.3) для улучшения интерполяции процесса колебаний. Теоретическая модель (5.1) может быть уточнена посредством учета второстепенных факторов, что на данном этапе исследований не представляется целесообразным и оправданным вследствие недостаточно высокой точности измерений.

Ниже излагаются результаты расчетов на основе упрощенной процедуры метода наименьших квадратов [11], который применялся независимо к переменным  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  в виде шестимерной аппроксимации согласно модели (5.1):

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (\xi, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\eta, f(\tau)) \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_6)^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_6)^T \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$f(\tau) = (1, \tau, \cos 2\pi\Omega\tau, \sin 2\pi\Omega\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T, \quad \Omega = 0.845$$

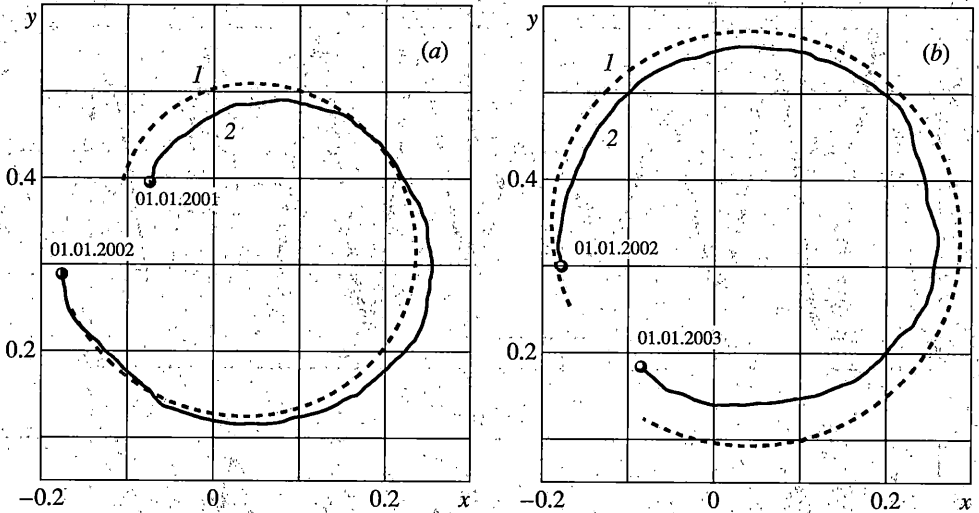


Фиг. 1

**6. Результаты численного моделирования задач интерполяции и прогноза.** Представляет интерес исследование эффективности интерполяции и прогноза движения полюса с помощью весьма простой математической модели (5.3) на основе известных ежедневных данных измерений МСВЗ [2]. На фиг. 1 приводятся теоретические кривые  $x^*(\tau)$ ,  $y^*(\tau)$  интерполяции ежедневных измерений на 8-летнем промежутке времени  $0 \leq \tau \leq 8$ , начиная с 1988 г. по конец 1995 г.; светлыми точками обозначены данные измерений. Среднеквадратические отклонения равны  $\sigma_x = 0.014$ ,  $\sigma_y = 0.017$ , что свидетельствует об удовлетворительной точности построенной модели (5.1), (5.2) отвечающей оптимальным значениям  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ :

$$\begin{aligned} \xi^* &= (-0.041, -0.0004, -0.034, 0.194, -0.023, -0.065)^T \\ \eta^* &= (0.300, 0.005, 0.193, 0.033, -0.060, 0.020)^T \end{aligned} \quad (6.1)$$





Фиг. 2

Сравнение коэффициентов  $\xi_3^*$  и  $\eta_4^*$ ,  $\xi_4^*$  и  $\eta_3^*$ , определяющих чандлеровские составляющие колебаний, а также  $\xi_5^*$  и  $\eta_6^*$ ,  $\xi_6^*$  и  $\eta_5^*$ , (с учетом множителя  $\Omega = 0.845$ ), отвечающих годичной компоненте в (6.1) подтверждает указанное выше структурное свойство (5.2) модели (5.1), (5.3).

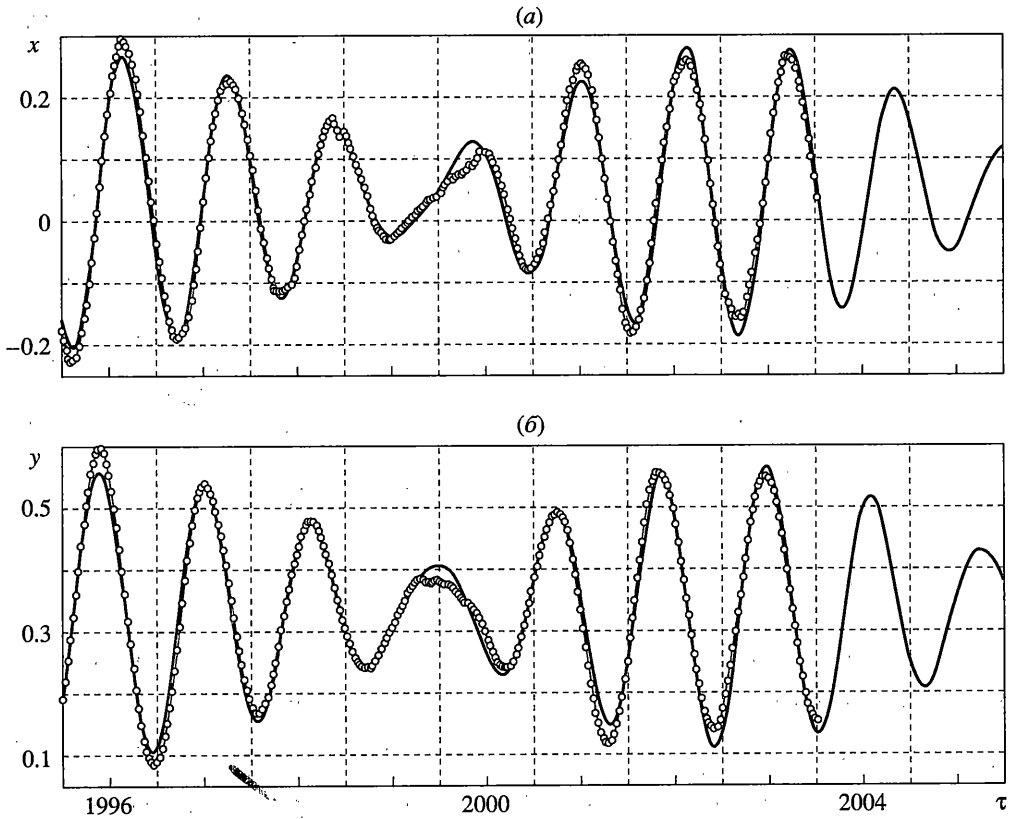
В 2001 г. авторами была проведена интерполяция данных наблюдений на 7-летнем интервале времени (1994–2000 гг.). Вычисленные оптимальные значения параметров  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  модели (5.3) и среднеквадратические отклонения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  равны соответственно

$$\begin{aligned} \xi^* &= (0.039, 0.0001, 0.015, 0.161, -0.046, -0.076)^T, \quad \sigma_x = 0.024 \\ \eta^* &= (0.334, 0.0005, 0.162, -0.0139, -0.068, 0.043)^T, \quad \sigma_y = 0.025 \end{aligned} \quad (6.2)$$

По результатам интерполяции на основе величин (6.2) был дан двухлетний прогноз движения полюса (на 2001–2002 гг.). На фиг. 2 штриховой линией 1 представлена теоретическая кривая  $(x^*, y^*)$ , которая для удобства изображена двумя отрезками длиной по одному году (2001 г. и 2003 г. соответственно). Сплошными линиями 2 представлены соответствующие по времени части экспериментальной кривой, построенной по данным измерений МСВЗ. Сравнение “реальной” и теоретически полученной траектории движения полюса свидетельствует об адекватности построенной модели данным наблюдений.

В ежегодных отчетах [2] и на основе оперативных данных МСВЗ предпринимает попытки построить прогноз движения полюса на 100–150 суток вперед (IERS, EOP Product Center, <http://hpiers.obspm.fr/eoprc/eop/eopc04/eopc04-xy.gif>). Принятые МСВЗ собственные модель и методика приводят к весьма неточному и неустойчивому прогнозу, требующему еженедельной коррекции. Разница в прогнозах может составлять величину, сравнимую с максимальным отклонением полюса.

На фиг. 3 авторами представлены интерполяция наблюдаемого процесса колебаний полюса на 8-летнем интервале ежедневных данных наблюдений МСВЗ (1996–



Фиг. 3

2003 г.). Соответствующие оптимальные значения  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  и среднеквадратические отклонения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  равны

$$\begin{aligned} \xi^* &= (0.0314, 0.0027, -0.1347, -0.0596, -0.0494, -0.0741)^T, \quad \sigma_x = 0.0175 \\ \eta^* &= (0.3315, 0.0010, -0.0613, 0.1341, -0.0679, 0.0426)^T, \quad \sigma_y = 0.0175 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Сравнение компонент векторов  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  (6.3) свидетельствует о выполнении равенств (5.2), характеризующих свойства модели.

Начиная с 2004 г. представлен прогноз движения полюса на 2 года (до конца 2005 г.). Его качество (*sine ira et studio*) можно оценить к концу 2004 г. (*qui vivit verita*).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 05-01-00043, 05-01-00563, 04-02-16303) и Программы НШ-1627.2003.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Munk W.H., Macdonald G.J.F. The Rotation of the Earth. Cambridge: Univ. Press, 1960. 323 p.
2. IERS Annual Reports, 1990 July 1991 bis 2000 July 2001. Central Bureau of IERS. Observatoire de Paris.

3. *Moritz H., Mueller I.I.* Earth Rotation: Theory and Observation. N.-Y.: Ungar, 1987. 617 p.
4. *Авсюк Ю.Н.* Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН, 1996. 188 с.
5. *Сидоренков Н.С.* Физика неустойчивостей вращения Земли. М.: Наука, Физматлит, 2002. 384 с.
6. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
7. *Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В.* Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным // Астрон. ж. 2002. Т. 79. № 1. С. 81–89.
8. *Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В.* Прогноз движения полюса деформируемой Земли // Астрон. ж. 2002. Т. 79. № 10. С. 952–960.
9. *Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г.* Движение полюса Земли // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 2. С. 199–205.
10. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
11. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.04.2004