

УДК 533.6.013.42

© 2005 г. Л.Н. РАБИНСКИЙ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ТОНКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассматривается плоская задача дифракции нестационарной плоской косящей волны давления на тонкой упругой эллиптической оболочке, помещенной в акустическую среду. Для определения гидродинамического давления, действующего на оболочку, используется переходная функция, построенная на основании модифицированной гипотезы тонкого слоя для оболочек переменной кривизны [1–4]. Интегрирование уравнений движения оболочек типа Тимошенко осуществляется методом конечных разностей средствами Matlab 6.5. [5].

1. Постановка задачи. Задача о взаимодействии плоской волны давления с упругой оболочкой сводится к совместному решению уравнений, описывающих движение акустической среды и эллиптической оболочки [1, 6]:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = \sum_{j=1}^3 L_{ij} u_j + (p_* + p) \delta_{i3} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$\partial^2 \varphi / \partial \tau^2 = \Delta \varphi, \quad p = -\partial \varphi / \partial \tau, \quad \mathbf{v} = \text{grad} \varphi \quad (1.2)$$

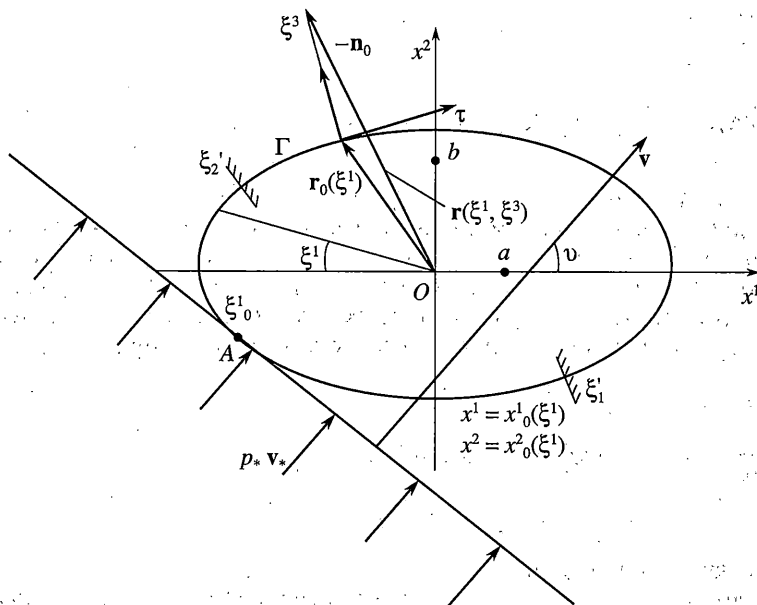
$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = 0 \quad (1.3)$$

$$u_i|_{\tau=0} = \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (1.4)$$

$$N_{\xi}^{(m)}(u_1, u_2, u_3) \Big|_{\xi^1 = \xi_k^1} = 0 \quad (k = 1, 2; m = 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

Здесь φ – потенциал скоростей акустической среды, p_* – давление в падающей волне, p – давление в отраженной и излученной волнах, \mathbf{v} – вектор скорости акустической среды, u_i – перемещения срединной поверхности оболочки, $u_1 = u$ – тангенциальное перемещение, $u_2 = w$ – прогиб оболочки, $u_3 = \chi$ – поворот нормали оболочки, L_{ij} – известные дифференциальные операторы, определяемые геометрией оболочки, δ_{ij} – символы Кронекера. Соотношения (1.5) определяют с помощью операторов $N_{\xi}^{(m)}$ граничные условия, зависящие от формы оболочки Γ и ее закрепления в пространстве, (ξ^1, ξ^3) – криволинейная система координат (фиг. 1), ξ_k^1 ($k = 1, 2$) – координаты границ панели в эллиптическом экране.

Задача решается в безразмерном виде. При этом все линейные размеры отнесены к длине большой полуоси эллиптической оболочки a , скорости – к скорости звука в акустической среде c_0 , величины, имеющие размерность давления – к комплексу $\rho_0 c_0^2$ (время $\tau = tc_0/a$).



Фиг. 1

В начальный момент времени $\tau = 0$ оболочка и среда находятся в невозмущенном состоянии, что соответствует однородным начальным условиям (1.3) и (1.4).

Плоская акустическая волна с фронтом, составляющим угол ϑ с осью Ox^1 , в начальный момент времени $\tau = 0$ касается поверхности оболочки (a, b – полуоси эллипса) с направляющей Γ в точке A (фиг. 1).

Из условий совместного движения оболочки и прилегающих к ней частиц акустической среды следуют условия непротекания

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (1.6)$$

где φ_* – потенциал скорости падающей на оболочку волны, $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к оболочке.

Давления p_1 и p_2 в отраженной и излученной волнах могут быть найдены с помощью переходной функции $G(x^i, \tau)$, построенной в рамках гипотезы тонкого слоя (звездочкой обозначена операция свертки по времени τ):

$$p_1(\xi^1, \tau) = \frac{\partial \varphi_*(\xi^1, 0, \tau)}{\partial n} * G_p(\xi^1, \tau) \quad (1.7)$$

$$p_2(\xi^1, \tau) = \frac{\partial w(\xi^1, \tau)}{\partial \tau} * G_p(\xi^1, \tau) \quad (1.8)$$

$$p = p_1 + p_2, \quad G_p(\xi^1, \tau) = - \frac{\partial G(x^i, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} \quad (1.9)$$

При этом функция влияния $G(x^i, \tau)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче:

$$\partial^2 G / \partial \tau^2 = \Delta_{\xi} G \quad (1.10)$$

$$G|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \delta(\tau), \quad G(r, \tau) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (1.12)$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

2. Определение гидродинамического давления, действующего на оболочку. Введем криволинейную систему координат (ξ^1, ξ^3) , связанную с кривой Γ . Пусть $\mathbf{r}_0(\xi^1)$ – радиус вектор кривой Γ ; $\mathbf{n}_0(\xi^1)$ – вектор единичной нормали (фиг. 1). Тогда криволинейная система координат (ξ^1, ξ^3) определяется следующим образом (нижним индексом обозначена частная производная по соответствующей координате):

$$\mathbf{r}(\xi^1, \xi^3) = \mathbf{r}_0(\xi^1) - \xi^3 \mathbf{n}_0(\xi^1) \quad (2.1)$$

Компоненты метрического тензора примут вид

$$g_{11} = H_1^2 = \tau^2 [1 + 2\xi^3 k + (\xi^3 k)^2], \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = H_2^2 = 1 \quad (2.2)$$

где $k = k(\xi^1)$ – кривизна кривой Γ .

В первом приближении можно считать, что основной вклад в гидродинамическую нагрузку дает движение среды по нормали к поверхности [1–4]. Движением среды вдоль кривой Γ также пренебрегаем. Поэтому производные по координате ξ^1 в (1.2) можно положить тождественно равными нулю, а оператор Лапласа вычислить на поверхности цилиндра ($\xi^3 = 0$).

Следовательно, начально-краевая задача (1.10)–(1.12) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = \frac{1}{H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(H_3 \frac{\partial G}{\partial \xi^3} \right) \right] \Big|_{\xi^3=0} \quad (2.3)$$

$$G|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi^3=0} = \delta(\tau), \quad G(r, t) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Переходная функция влияния $G_0(\xi^1, \tau)$ на поверхности препятствия Γ находится операционным методом и имеет вид [3, 4]:

$$G_0(\xi^1, \tau) = -H(\tau)R(z) \quad (2.6)$$

$$R(z) = -z + {}_1F_2 \left(\left[\begin{matrix} - \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \right], -\frac{z^2}{4} \right), \quad z = \frac{k(\xi^1)}{2} \tau$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда, ${}_1F_2([a], [b, c], z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

В этом случае выражения для давления в отраженной и излученной волнах с учетом (1.7), (1.8) представляются в виде:

$$p_1(\xi^1, \tau) = - \int_0^{\tau} \frac{\partial \varphi_*(\xi^1, 0, \tau - \tau_1)}{\partial \xi^3} \frac{\partial G_0(\xi^1, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1 \quad (2.7)$$

$$p_2(\xi^1, \tau) = -\int_0^\tau \frac{\partial w(\xi^1, \tau - \tau_1)}{\partial \tau_1} \frac{\partial G_0(\xi^1, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1 \quad (2.8)$$

$$\partial G_0(\xi^1, \tau) / \partial \tau = -[\delta(\tau) + R'(z)] \quad (2.9)$$

$$R'(z) = -1 + z_1 F_2([1/2], [3/2, 2], -z^2/4)$$

3. Дифракция плоской косой волны на упругой эллиптической оболочке. В этом случае давление за фронтом волны в системе координат Ox^1x^2 задается следующим соотношением:

$$p_*(x^j, \tau) = p_0 H(\tau - f(x^j, \vartheta)) \quad (j = 1, 2) \quad (3.1)$$

$$f(x^j, \vartheta) = x^1 \cos \vartheta + x^2 \sin \vartheta + C \quad (3.2)$$

где константа C определяет положение фронта волны в начальный момент времени $\tau = 0$ и вычисляется с помощью системы уравнений

$$\begin{aligned} x_0^1(\xi_0^1) \cos \vartheta + x_0^2(\xi_0^1) \sin \vartheta + C &= 0 \\ x_0^1(\xi_0^1)' \cos \vartheta + x_0^2(\xi_0^1)' \sin \vartheta &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где ξ_0^1 – параметр, соответствующий точки касания A .

Давлению (3.1) соответствует потенциал скорости падающей волны $\varphi_*(x^j, \tau)$:

$$\varphi_*(x^j, \tau) = -p_0(\tau - f(x^j, \vartheta)) H(\tau - f(x^j, \vartheta)) \quad (3.4)$$

Давление p_1 в отраженной волне определяется соотношением (2.7) с соответствующей переходной функцией $\partial G_0(\xi^1, \tau) / \partial \tau$ (2.9), при этом из (1.6) в силу неподвижности препятствия следуют граничные условия

$$\left. \frac{\partial \varphi(\xi^j, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi^3=0} = -v_{*n}(\xi^1, \tau) \quad (3.5)$$

$$v_{*n}(\xi^1, \tau) = -(\mathbf{v}_*, \mathbf{n})|_{\xi^3=0} = \left. \frac{\partial \varphi_*(\xi^j, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi^3=0} \quad (3.6)$$

где $v_{*n}(\xi^1, \tau)$ – нормальная компонента вектора скорости в падающей волне на поверхности цилиндра:

Для нормальной компоненты $v_{*n}(\xi^1, \tau)$ из (3.4), (3.6) и (3.2) получим

$$v_{*n}(\xi^1, \tau) = p_0 \left. \frac{\partial f(x^j, \vartheta)}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^3} H(\tau - f(x^j, \vartheta)) \right|_{\xi^3=0} = \quad (3.7)$$

$$= p_0(n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta) H(\tau - f_0(\xi^1, \vartheta))$$

$$f_0(\xi^1, \vartheta) = f(x^i(\xi^j), \vartheta)|_{\xi^3=0} \quad (3.8)$$

С учетом (3.7) и (2.7) давление в отраженной волне определится следующим образом:

$$p_1(\xi^1, \tau) = -p_0(n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta) \int_0^{\tau - f_0(\xi^1, \vartheta)} \frac{\partial G_0(\xi^1, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1 = \quad (3.9)$$

$$= -p_0(n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta) G_0(\xi^1, \tau - f_0(\xi^1, \vartheta))$$

Давление в излученной волне p_2 будет определяться выражением:

$$p_2(\xi^1, \tau) = \frac{\partial w(\xi^1, \tau)}{\partial \tau} + \frac{k(\xi^1)}{2} \left[w(\xi^1, \tau) R'(0) + \int_0^\tau w(\xi^1, \tau_1) R''(z(\tau - \tau_1)) d\tau_1 \right] =$$

$$= \frac{\partial w(\xi^1, \tau)}{\partial \tau} + \frac{k(\xi^1)}{2} \left[\int_0^\tau w(\xi^1, \tau_1) R''(z(\tau - \tau_1)) d\tau_1 - w(\xi^1, \tau) \right]$$
(3.10)

$$R''(z) = J_1(z)/z$$
(3.11)

где $J_n(z)$ – функции Бесселя I рода порядка n .

Направляющая эллиптической оболочки Γ определяется соотношением

$$\Gamma: x_0^1(\xi) = -\cos \xi, \quad x_0^2(\xi) = \beta \sin \xi, \quad \xi \in [-\pi, \pi], \quad \xi = \xi^1$$
(3.12)

Кривизна $k(\xi)$, компоненты вектора единичной нормали $\mathbf{n}_0(\xi^1)$ и константа C , определяющая точку касания в (3.2), имеют вид

$$k(\xi) = \frac{\beta}{(\sin^2 \xi + \beta^2 \cos^2 \xi)^{3/2}}, \quad n_0^1(\xi) = \frac{\beta \cos \xi}{\sqrt{\sin^2 \xi + \beta^2 \cos^2 \xi}}$$

$$n_0^2(\xi) = \frac{\sin \xi}{\sqrt{\sin^2 \xi + \beta^2 \cos^2 \xi}}, \quad C = \frac{\cos \vartheta + \beta^2 \operatorname{tg} \vartheta \sin \vartheta}{\sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}}$$
(3.13)

Уравнения движения оболочки в операторной форме записываются следующим образом, наиболее пригодным для численного решения дискретного аналога задачи:

$$\partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2 = \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{p}$$
(3.14)

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} \frac{d}{d\xi^2} + \mathbf{B} \frac{d}{d\xi} + \mathbf{A}$$
(3.15)

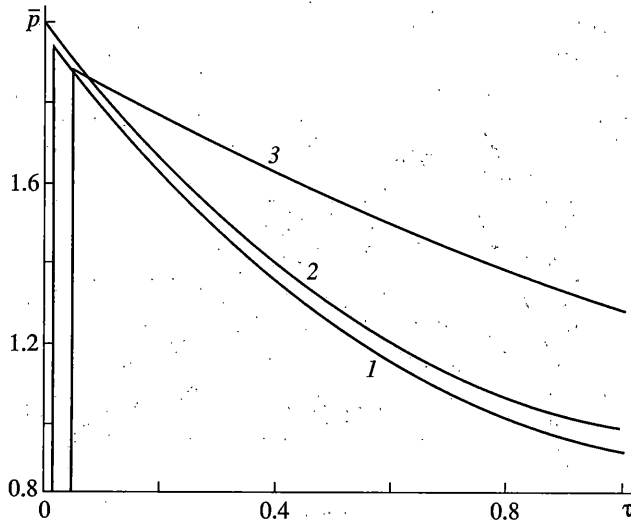
где \mathbf{u} – вектор перемещений оболочки, \mathbf{L} – линейный оператор задачи, \mathbf{p} – вектор-функция правых частей.

В общем случае построение разрешающих уравнений (3.14), (3.15) в криволинейных координатах, связанных с поверхностью произвольной формы, весьма затруднительно. В то же время использование систем компьютерной алгебры, поддерживающих основные операции тензорного анализа, позволяет автоматизировать процесс перехода от общей постановки задачи к ее операторной записи (3.14), (3.15) в конкретной системе координат [4]. В данном случае использовалась система компьютерной алгебры Maple 9.0 с пакетом расширения Tensor [7].

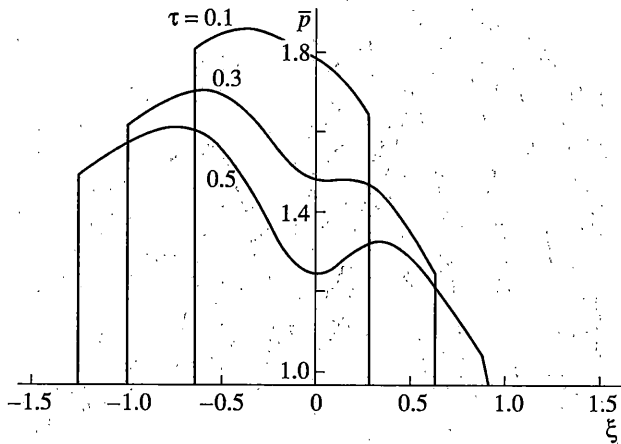
Задача (3.14), (3.15) аппроксимируется решаемым численно дискретным аналогом. Для уравнения гиперболического типа используем явную конечно-разностную схему на пятиточечном шаблоне "крест". Область построения решения аппроксимируется множеством $\omega = \omega_\tau^K \times \omega_x^N$, где ω_τ^K – дискретизация временной области, ω_x^N – дискретизация пространственной области:

$$\omega_\tau^K = \{ \tau_k = kh_\tau | h_\tau = (\tau_K - \tau_0)/K \ (k = 0, \dots, K) \}$$

$$\omega_x^N = \{ \xi_l = lh_\xi | h_\xi = (\xi_N - \xi_0)/N \ (l = 0, \dots, N) \}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

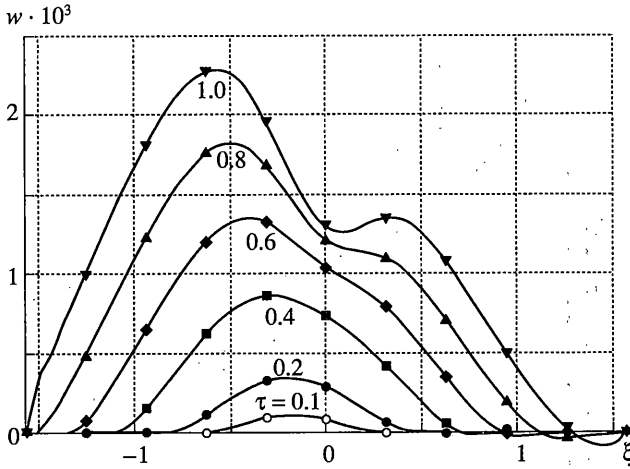
Производные первого и второго порядка аппроксимируются конечно-разностными соотношениями порядка точности $o(h^2)$ [8, 9]

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} \approx \frac{(u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}))}{h_\tau^2}, \quad \frac{du}{d\xi} \approx \frac{(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k)}{2h_\xi}, \quad \frac{d^2 u}{d\xi^2} \approx \frac{(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)}{h_\xi^2} \quad (3.16)$$

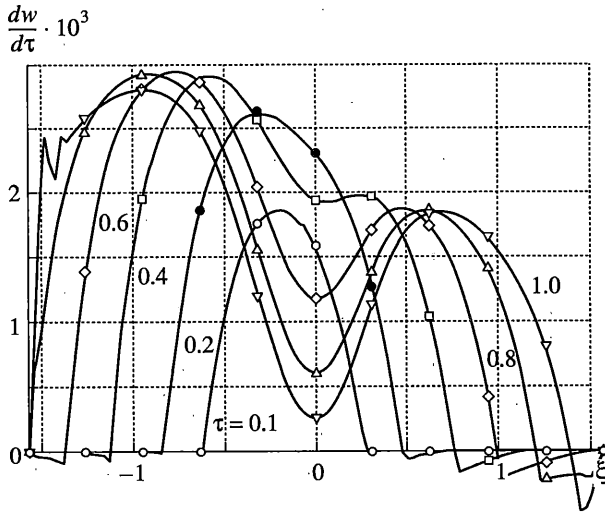
Конечно-разностный аналог задачи (3.14), (3.15) с учетом (3.16) имеет вид

$$\mathbf{u}^{k+1} = (2\mathbf{I} + h_\tau^2 \mathbf{L}) \mathbf{u}^k + \mathbf{p}^k - \mathbf{u}^k$$

$$\mathbf{u}^k = (u_1^k, \dots, u_N^k, w_1^k, \dots, w_N^k, \chi_1^k, \dots, \chi_N^k)^T \quad (3.17)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\mathbf{p}^k = \frac{h_\tau^2}{m\rho_0 h} (0, \dots, 0, p_1^k, \dots, p_N^k, 0, \dots, 0)^T, \quad m = \frac{\rho}{\rho_0}$$

где \mathbf{u}^k – неизвестная сеточная вектор-функция, \mathbf{L} – матрица дискретного аналога дифференциального оператора (3.15), \mathbf{p}^k – вектор правых частей, ρ – плотность материала оболочки, \mathbf{I} – единичная матрица.

Результаты решения представлены на фиг. 2–5 для стальной эллиптической оболочки (плотность $\rho = 7800$ кг/м³, модуль упругости $E = 2.1 \cdot 10^6$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, толщина оболочки $h = 0.02$ м, соотношение между полуосями $\beta = b/a = 0.5$, $a = 1$ м), помещенной в воду (плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м³, скорость звука $c_0 = 1500$ м/с). Интенсивность давления на фронте падающей волны в начальный момент времени $p_0 = 10^5$ Па, угол падения плоской косо́й волны давления $\vartheta = 20^\circ$.

На фиг. 2, 3 представлены эпюры суммарного давления $\bar{p} = p_*(\xi, \tau) + p_1(\xi, \tau)$ на жестком неподвижном эллиптическом цилиндре в зависимости от времени τ и криволинейной координаты ξ (кривые 1, 2, 3 на фиг. 2 соответствуют $\xi = 0, -0.18, -0.5$). На фиг. 4, 5 показана зависимость прогиба оболочки $w(\xi, \tau)$ и нормальной скорости $\partial w(\xi, \tau)/\partial \tau$ в различные моменты времени от криволинейной координаты ξ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев В.И., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек – Киев: Наук. думка, 1982. Т. 5. 400 с.
3. Горшков А.Г., Егорова О.В., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Плоская задача дифракции акустической волны давления на криволинейном препятствии // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 148–154.
4. Горшков А.Г., Жаворонок С.И., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Плоская задача дифракции акустической волны давления на тонкой ортотропной панели, помещенной в жесткий экран // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 209–220.
5. Потемкин В.Г. Matlab 6 : Среда проектирования инженерных приложений М.: Диалог – МИФИ, 2003. 448 с.
6. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 467 с.
7. Дьяконов В. Maple 6: Учебный курс: СПб Питер, 2001. 608 с.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.04.2005 г.