

УДК 539.374

© 2005 г. М.Я. БРОВМАН

## О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ У ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОСТРИЕМ

При определении напряжений в задачах о разрезании, расклинивании твердых тел или о развитии в них трещин часто рассматривают напряженное состояние у поверхностей с острием, как вблизи выступов с угловыми точками, так и вблизи отверстий или вырезов [1–3].

Поверхности, образующие в вершине угла острый угол (либо угол, равный нулю, когда эти поверхности соприкасаются), используют в механике трещин [2]. В теории упругости в таких точках иногда получают бесконечные напряжения. В ряде задач учитывают возникновение небольших пластических зон у вершин трещин [2, 3].

Эти задачи важны для анализа расслоения металла при прокатке толстых листов [4]. Решение задачи обтекания угла, образованного двумя прямыми линиями, приведено в [5].

В данной работе рассмотрено течение жесткопластической среды вблизи поверхностей с острием, с использованием криволинейных координат.

Пусть в деформируемую среду вдавливается инструмент, (нож, пуансон, валок и т.д.), профиль которого можно описать некоторой дифференцируемой функцией  $y = \varphi(x)$ .

В некоторых случаях  $\varphi(x)$  может описывать конфигурацию инструмента с примыкающей к нему жесткой зоной [4, 5]. Возможно использование функции  $\varphi(x)$  и для описания формы трещины, возникающей при расклинивании твердого тела.

Далее будем считать, что поверхность инструмента  $\varphi(x)$  неподвижна, а жесткопластическая среда обтекает эту поверхность.

Поскольку в этом случае основное кинематическое краевое условие задано на поверхности  $\varphi(x)$ , то удобно ввести такие криволинейные координаты, в которых эта функция описывала бы одну из координатных линий.

Введем непрерывную однопараметрическую группу преобразований  $y = \Phi_0[\alpha, \varphi(x)]$ , где  $\alpha$  – вещественный параметр, изменяющийся непрерывно в определенном диапазоне.

Каждому значению  $\alpha = \text{const}$  соответствует определенная координатная линия, поэтому именно вещественный параметр группы  $\alpha$  примем за криволинейную координату.

Вторую же координату  $\beta$  выберем из условия ортогональности линий  $\alpha$  и  $\beta$  т.е.

$$y = \beta - \int \left[ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]^{-1} dx$$

В ряде случаев можно использовать группу растяжений вдоль оси  $y = \alpha\varphi(x)$ , что определяет непрерывную группу с оператором  $X = \varphi(x)\partial/\partial y$ , можно использовать и растяжение вдоль оси  $x$ , либо вдоль обеих осей  $x, y$  одновременно).

Эта одна из простых групп преобразований определяет координаты:

$$\alpha = \frac{y}{\varphi(x)}, \quad \beta = y^2 + 2 \int \varphi(x) \left[ \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]^{-1} dx \quad (1)$$

Эти координаты построены на основе функции  $\varphi(x)$ , важной для данной конкретной задачи. При  $\alpha = 1$  получаем тождественное преобразование; можно выбрать координату  $\alpha$  так, чтобы тождественное преобразование соответствовало значению  $\alpha = 0$  [6].

Для координатной системы (1) коэффициенты Ламе равны

$$H_1 = \frac{\varphi^2(x)}{\sqrt{d_0}}, \quad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{d_0}} \frac{d\varphi}{dx}$$

$$d_0 = \varphi^2(x) + y^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2$$

Для некоторых задач теории пластичности (а также гидродинамики) удобно искать решение именно в таких специальных криволинейных координатах.

Если в координатах  $\alpha, \beta$  компоненты вектора скорости  $v_\alpha$  и  $v_\beta$ , то краевое условие обтекания профиля  $\varphi(x)$  задано в виде  $v_\alpha = 0$  при  $\alpha = 1$ .

Видно, что это условие выполнено, если  $v_\alpha = 0$  всюду (в том числе и при  $\alpha = 1$ ), т.е. если  $\beta$  линии являются линиями тока. Кроме того, на некоторых поверхностях могут быть заданы краевые условия для компонент тензора напряжений  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$  и  $\tau_{\alpha\beta}$ .

Если трение на поверхности  $\varphi(x)$  равно нулю, то при  $\alpha = 1, \tau_{\alpha\beta} = 0$ , а при максимальных касательных напряжениях  $-\tau_{\alpha\beta} = k$ , где  $k$  – предел текучести при сдвиге. Можно построить решение плоской задачи, в котором напряжения зависят только от метрической функции [5]. В данном случае эта функция равна

$$\Phi = \arctg \left[ \frac{\varphi(x) \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^{-1}}{y} \right]$$

Тогда получаем точное решение системы уравнений теории пластичности при плоской деформации:

$$\tau_{\alpha\beta} = k \cos(2\Phi) = \frac{k}{d_0} \left[ y^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \varphi^2(x) \right]$$

$$\sigma_{\alpha, \beta} = C \pm k \sin(2\Phi) = C \pm \frac{2k\varphi(x)d\varphi}{d_0 dx} y \quad (2)$$

$$v_\alpha = 0, \quad v_\beta = -\frac{c\sqrt{d_0}}{\alpha\varphi^2(x)}$$

где  $C, c$  – постоянные, определяемые краевыми условиями;  $x, y$  – функции  $\alpha, \beta$ ; знак плюс в (2) относится к  $\sigma_\alpha$ , а минус – к  $\sigma_\beta$ .

Условие несжимаемости выполнено, если ввести функцию тока  $F(\alpha, \beta)$  согласно формулам

$$v_\alpha = \frac{1}{H_2} \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad v_\beta = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

и для решения (2) функция тока будет

$$F(\alpha, \beta) = c \ln \alpha, \quad \partial F / \partial \alpha = c / \alpha, \quad \partial F / \partial \beta = 0$$

Основное краевое условие выполнено и  $\beta$  линии, ( $\alpha = \text{const}, F = \text{const}$ ), являются линиями тока; решение (2) действительно описывает обтекание заданного профиля пластической средой. Существует и другое простое решение

$$F(\alpha, \beta) = c\beta, \quad \partial F / \partial \alpha = 0, \quad \partial F / \partial \beta = c$$

$$v_\alpha = 2c\sqrt{d_0} (d\varphi/dx)^{-1}, \quad v_\beta = 0$$

поэтому и  $\alpha$  – линии, где  $\beta = \text{const}$ , могут быть линиями тока. Фактически, при введении координат (1) использовалась непрерывная однопараметрическая группа преобразований и именно вещественный параметр этой группы принимался за новую координату.

Можно использовать и другие группы непрерывных преобразований, каждой из которых соответствует определенная система криволинейных координат и точное решение, зависящее от метрической функции [5].

Видимо, наиболее простыми являются группы преобразований растяжения вдоль одной из осей координат и сдвиги (смещения) вдоль одной из этих осей. Первая из этих групп определяет координаты (1), а вторая

$$\alpha = y - \varphi(x), \quad \beta = y + \int \left[ \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]^{-1} dx$$

для которых коэффициенты Ламе и метрическая функция равны:

$$H_1 = d_0^{-0.5}, \quad H_2 = d_0^{-0.5} \frac{d\varphi}{dx}, \quad d_0 = 1 + \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2, \quad \Phi = \text{arctg} \left[ \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]^{-1}$$

Решение с линиями тока, соответствующими координатным линиям  $\beta$ , определяется в виде

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{k}{d_0} \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - 1 \right], \quad \sigma_{\alpha, \beta} = C \pm \frac{2k}{d_0} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

$$v_\alpha = 0, \quad v_\beta = -c\sqrt{d_0}, \quad F = c\alpha$$

Возможны и другие непрерывные группы, не нарушающие условия однозначности, т.е. того, что через каждую точку должна проходить только одна линия данного семейства. Для дальнейшего рассмотрения примем координаты (1) с функцией

$$\varphi(x) = \left[ n \ln \left| \frac{x}{a} \right| \right]^{-1} \tag{3}$$

где  $a$  – постоянная, определяющая размеры зоны деформации,  $n$  – безразмерная постоянная. Функции (3) согласно (1) соответствуют координаты

$$\alpha = ny \ln \left| \frac{x}{a} \right|, \quad \beta = y^2 + 0.5x^2 - x^2 \ln \left| \frac{x}{a} \right| \tag{4}$$

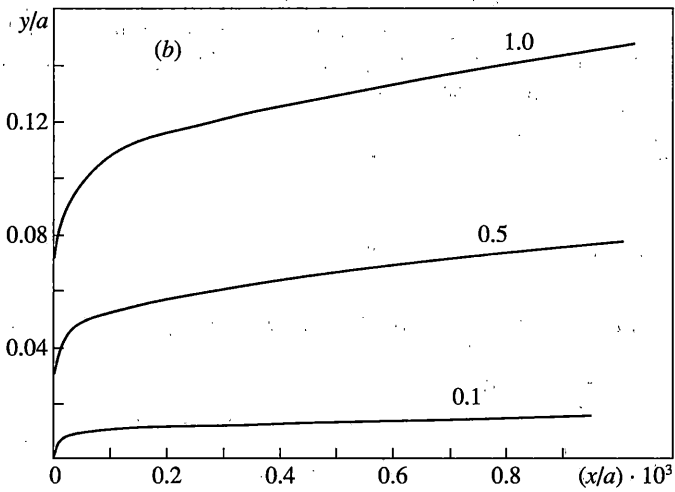
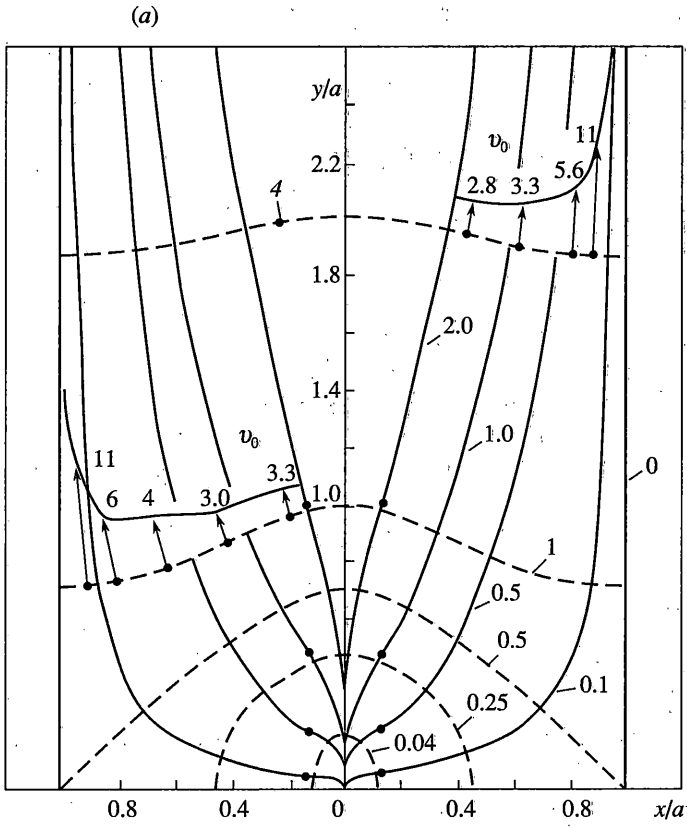
которым соответствуют координатные линии, показанные на фиг. 1, где сплошные кривые соответствуют  $\beta$  линиям. Видно, что все эти линии имеют “острие” в особой точке  $x = y = 0$ .

Представляется удобным для решения задач о течении сплошной среды вблизи “острия” использовать координатные линии с острием, например, координаты (4).

Для координат  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$  определенных формулами (4), частные производные будут

$$x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{ny^3}{d}, \quad x_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{0.5n\alpha xy}{d}$$

$$y_\alpha = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\alpha x^2 y}{d}, \quad y_\beta = \frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{0.5n^2 y^3}{d}, \quad d = n^2 y^4 + \alpha^2 x^2$$



Фиг. 1

а коэффициенты Ламе и метрическая функция равны:

$$H_1 = \frac{xy}{\sqrt{d}}, \quad H_2 = \frac{ny}{2\sqrt{d}}, \quad \Phi = \operatorname{arctg} \left[ \frac{x \ln|x/a|}{y} \right] = \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha x}{ny^2} \right) \quad (5)$$

При этом производные метрической функции согласно [5]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = -\frac{nxy^2}{d^2} (\alpha^2 x^2 - n^2 y^4 - \alpha n^2 y^3) = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = -\frac{\alpha n^2 xy^3}{2d^2} (\alpha + 2y) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha}$$

(их можно записать и как символы Кристоффеля).

Статически допустимое поле напряжений, зависящих только от функции  $\Phi$ , должно быть согласовано с полем скоростей. Поскольку в данном случае

$$\sin \Phi = \frac{\alpha x}{\sqrt{d}}, \quad \cos \Phi = \frac{ny^2}{\sqrt{d}}, \quad H_1 H_2 = \frac{nxy^2}{2d}$$

то будем иметь

$$\frac{\sin(2\Phi) \partial F}{H_1 H_2 \partial \alpha} = 4\alpha \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$

и, если принять [5]  $F = c \ln \alpha$ ,  $\partial F / \partial \beta = 0$ ,  $\partial F / \partial \alpha = c / \alpha$ , то получим поле скоростей

$$v_\alpha = 0, \quad v_\beta = -\frac{c\sqrt{d}}{\alpha xy} \quad (5)$$

Имеется и другое решение  $\partial F / \partial \alpha = 0$ ,  $\partial F / \partial \beta = c$ ,  $F = c\beta$ ,  $v_\alpha = 2c\sqrt{d}/(ny)$ ,  $v_\beta = 0$ .

Формула (5) определяет линии тока соответственно координатным  $\beta$  линиям, когда пластический материал обтекает клин с острием. При таком поле скоростей компоненты тензора скорости деформации равны

$$\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\beta = \frac{v_\beta}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \frac{c}{\alpha x d} (\alpha^2 x^2 - \alpha y^3 - y^4)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{c}{\alpha^2 x^2 y^2 d} (y^4 - \alpha^2 x^2) (\alpha^2 x^2 - \alpha y^3 - y^4)$$

а интенсивность этого тензора (его второй инвариант) определяется так

$$T_\varepsilon = \sqrt{4\varepsilon_\alpha^2 + \gamma_{\alpha\beta}^2} = \pm \frac{c}{\alpha^2 x^2 y^2} (\alpha^2 x^3 - \alpha y^3 - y^4)$$

Точное решение в координатах (4) имеет вид:

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{k}{T_\varepsilon} \gamma_{\alpha\beta} = k \cos(2\Phi) = \frac{k}{d} (n^2 y^4 - \alpha^2 x^2)$$

$$\sigma_{\alpha,\beta} = C \pm k \sin(2\Phi) = C \pm \frac{2k}{d} n \alpha x y^2 \quad (6)$$

$$v_{\alpha} = 0, \quad v_{\beta} = -c\sqrt{d}/(\alpha xy)$$

На фиг. 1 показаны координатные линии при  $n = 1$ ,  $a = 10^{-2}$  м, причем у  $\beta$ -линий индексами указаны величины  $(-\alpha \cdot 10^2)$  м, а у  $\alpha$ -линий – величина  $(\beta \cdot 10^4)$  м<sup>2</sup>.

Принято, что происходит обтекание профиля ножа в виде клина с острием при  $\alpha = -2 \cdot 10^{-2}$  м. Вдоль линий  $\beta = \text{const} = 4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> и  $\beta = 1 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> построены эпюры безразмерной величины скорости

$$v_0 = v_{\beta} 10^{-2}/c = v_{\beta} a/c.$$

Постоянная  $c$ , имеющая размерность м<sup>2</sup>/с, характеризует расход материала в единицу времени.

Координатные линии построены на фиг. 1, а в области  $|x/a| < 1$  (для ряда технологических задач эта система координат (4) может быть полезна и при  $|x/a| > 1$ , но здесь ограничимся рассмотрением деформации только при  $|x/a| < 1$ ).

Координатные  $\beta$ -линии имеют точки перегиба при  $|x/a| = 0.135$ ,  $y = -0.5\alpha$  (эти точки отмечены на фиг. 1–3). Все  $\beta$ -линии проходят через точку  $x = y = 0$ , где соприкасаются друг с другом и с осью  $y$ .

Для  $\beta$ -линий в точке  $x = y = 0$  первая и вторая производные (и производные более высокого порядка) обращаются в бесконечность, но кривизна этих линий в особой точке  $x = y = 0$  равна нулю.

Участок при малых величинах  $|\alpha|$  показан в увеличенном масштабе на фиг. 1,  $b$  (здесь также индексы у кривых равны величинам  $(-\alpha \cdot 10^2)$  м).

Чем меньше величина  $|\alpha|$ , тем меньше и размеры острия, а линии  $\beta$  имеют более закругленную форму, однако, все они имеют острие (хотя бы малых размеров) вблизи особой точки. Здесь поверхности имеют острие с соприкасающимися краями.

В [7] поверхности трещин такой конфигурации названы поверхностями “с бесконечно острым клювом” (наличие такого острия, хотя бы малых размеров, при упругой деформации имеет принципиальное значение).

Из фиг. 1 видно, что линии  $\alpha$  при  $\beta > 0.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> пересекают прямые  $|x/a| = 1$  под углом 90°, а при  $\beta < 0.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> они перпендикулярны оси  $x$  в точках пересечения с этой осью.

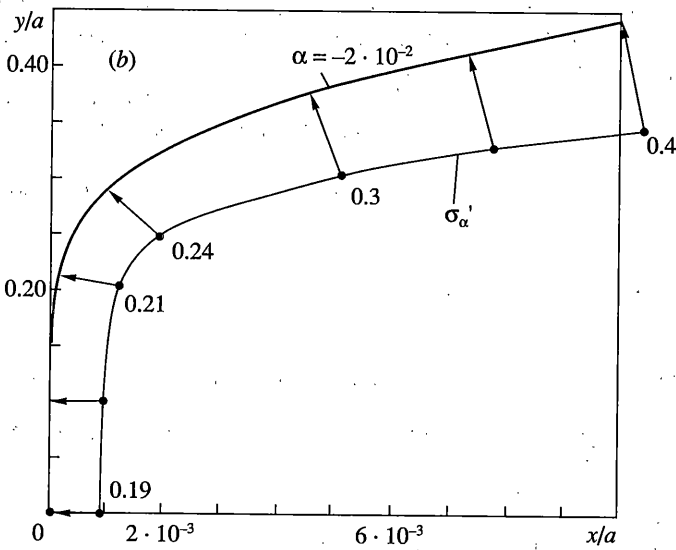
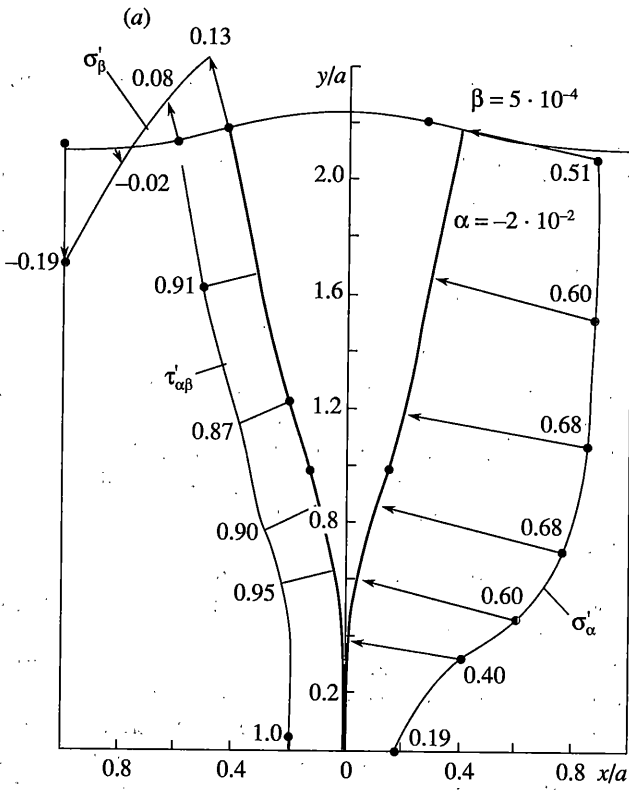
Линия  $\beta = 0.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> проходит через точки  $y = 0$ ,  $x = \pm a$  и производная уравнения этой линии

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \ln \left| \frac{x}{a} \right| = \frac{\alpha x}{y^2}$$

Можно показать, что предел этой производной при  $y \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow -a$  вдоль линии  $\beta = 0.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> равен  $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$ , а линии  $\beta = 0.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> в точке пересечения с осью  $x$  ( $x = -a$ ,  $y = 0$ ) составляет с этой осью угол 39°15'.

Такая своеобразная система координат может быть удобной для областей, ограниченных поверхностями с острием. В [8] такие координаты были использованы для расчета стационарных температурных полей у вершины трещины и вблизи острия на поверхности твердого тела.

Система координат (4) может быть полезной и при расчете зон сварных швов, поскольку сечение стыковых швов часто оказывается очень близким по конфигурации координатным линиям, показанным на фиг. 1.



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены результаты расчета напряжений при обтекании пластического материалом жесткого клина с острием. Поверхность клина при  $n = 1$ ,  $a = 10^{-2}$  м соответствует координате  $\alpha = -2 \cdot 10^{-2}$  м.

На фиг. 2, а представлены эпюры безразмерных величин  $\sigma'_\alpha = \sigma_\alpha/k$  и  $\tau'_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}/k$ . В решении (6) выполнить точно краевое условие  $\sigma_\beta = 0$  на граничной поверхности  $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> нельзя, поэтому постоянная  $C$  определена так, чтобы равнодействующая нормального давления на этой поверхности в интервале  $0.4 \leq |x/a| \leq 1.0$  была равна нулю (на фиг. 2, а показана эпюра величины  $\sigma'_\beta = \sigma_\beta/k$  на линии  $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>).

На фиг. 2, б показана эпюра давления на инструмент вблизи особой точки (в увеличенном масштабе).

Вблизи острия напряжения остаются конечными при  $x = y = 0$ :  $\tau_{\alpha\beta} = k$ ,  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = C = -0.19 k = -0.11 \sigma_T$ , где  $\sigma_T$  – предел текучести при одноосном растяжении – сжатии.

Давление на поверхность клина максимально не в его вершине у острия, а на расстоянии от нее  $|x/a| = 0.13$ , где оно достигает  $0.68 k = 0.39 \sigma_T$ . На фиг. 3 приведены аналогичные результаты расчетов при обтекании профиля, соответствующего величине  $\alpha = -0.1a = -10^{-3}$  м.

При такой величине  $\alpha$  профиль имеет округленную форму (но с малым острием в особой точке).

На фиг. 3, б построена эпюра величины  $\sigma'_\alpha$  эпюра  $\tau'_{\alpha\beta}$  (штриховая кривая), эпюра давления  $\sigma'_\alpha$  показана в увеличенном масштабе длины вблизи острия.

Нормальное давление по модулю максимально при  $|x/a| = 0.6$ ,  $|y/a| = 0.2$  и равно  $0.96 k = 0.56 \sigma_T$ . Величина  $\tau'_{\alpha\beta}$  при  $|x/a| < 10^{-3}$  положительна и близка к единице. Затем она убывает – до нуля при  $|x/a| = 3 \cdot 10^{-3}$  и изменяет знак. При  $3 \cdot 10^{-3} < |x/a| < 0.68$   $\tau'_{\alpha\beta} < 0$ , а при  $|x/a| > 0.68$   $\tau'_{\alpha\beta}$  вновь меняет знак и становится положительной величиной.

При различных величинах  $\tau'_{\alpha\beta}$  если  $x \rightarrow 0$  и  $|x| \rightarrow a$  напряжения  $\tau'_{\alpha\beta} \rightarrow -1$ ,  $\sigma'_\alpha = \sigma'_\beta \rightarrow C$ .

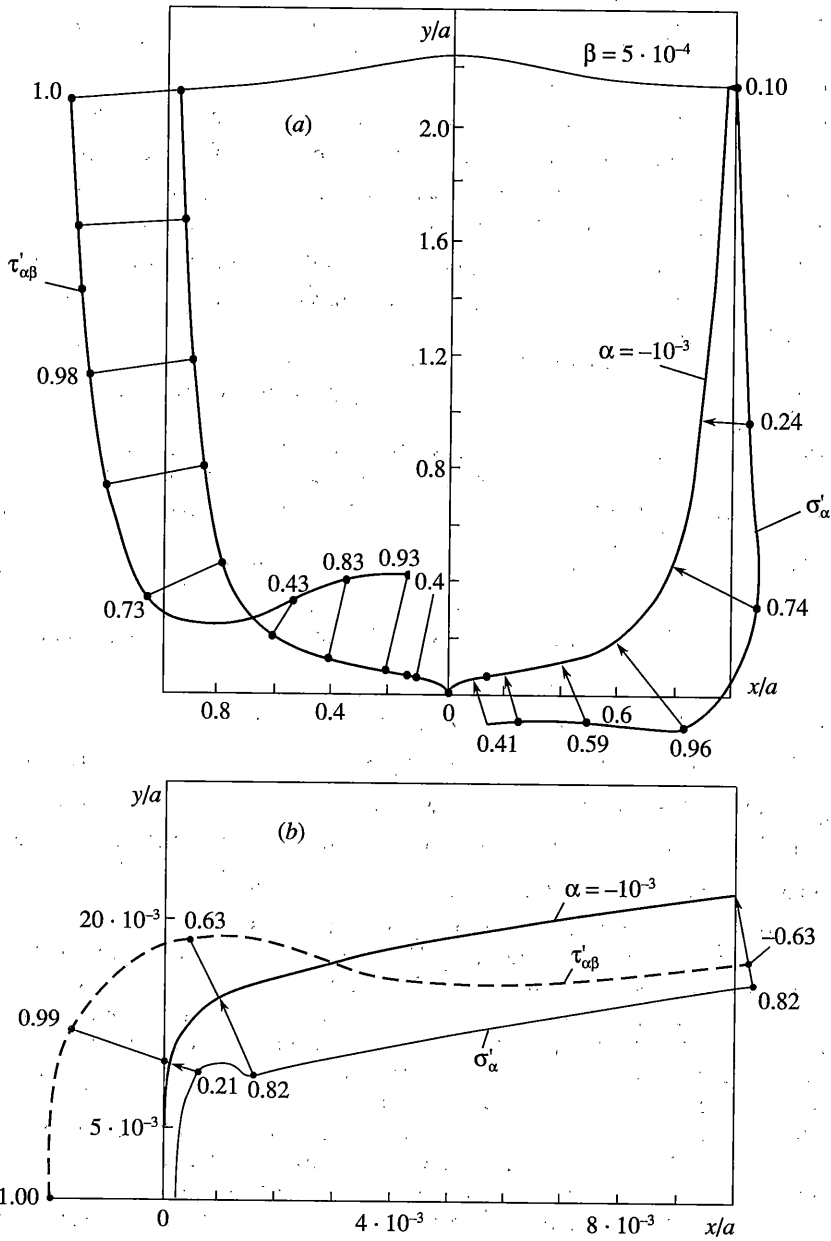
Равнодействующая напряжений на поверхности клина определяет усилие  $P$ , необходимое для его вдавливания на величину  $H$  в пластическую среду. При  $\alpha = -2 \cdot 10^{-3}$  м (фиг. 2)  $P = 5.4 ka = 1.2$  (2Нк), а при  $\alpha = -0.1 \cdot 10^{-3}$  м (фиг. 3)  $P = 4.9 ka = 1.08$  (2 Нк). Обычно  $P = (1.07-1.30)$  (2 Нк), но анализ результатов опытов по измерению усилий и деформации квадратных сеток, нанесенных на образцы из свинца и алюминия, показывает, что решение (4) можно использовать только при  $|\alpha/a| > 0.5$ , т.е. для относительно узких “острых” клиньев, когда погрешность менее 15%.

При  $|\alpha| < 0.5 a$ , вероятно, схема деформации существенно отличается от принятой и линии тока огибают клин, но не проходят все через одну точку.

Для закругленного инструмента, близкого по формуле к плоскому ножу, часть материала может быть неподвижной относительно ножа (как жесткое тело). При этом “острие” находится в жесткой зоне [4] и не оказывает существенного влияния на процесс деформации.

Выбирая группу непрерывных преобразований функции  $\varphi(x)$ , фактически выбираются и линии тока и получается по формулам вида (6) решение, т.е. систему напряжений и скоростей, удовлетворяющих уравнениям равновесия, соотношениям Сен-Венана и краевому условию для скоростей на поверхности  $\varphi(x)$  (условию “обтекания” этой поверхности). Но для многих задач заданы дополнительно и другие краевые условия. Если полученное решение противоречит известным (например, по экспериментальным данным) краевым условиям для напряжений (или скоростей), то полученное решение для данной задачи неприемлемо. Если же выбором двух постоянных в решении (6)



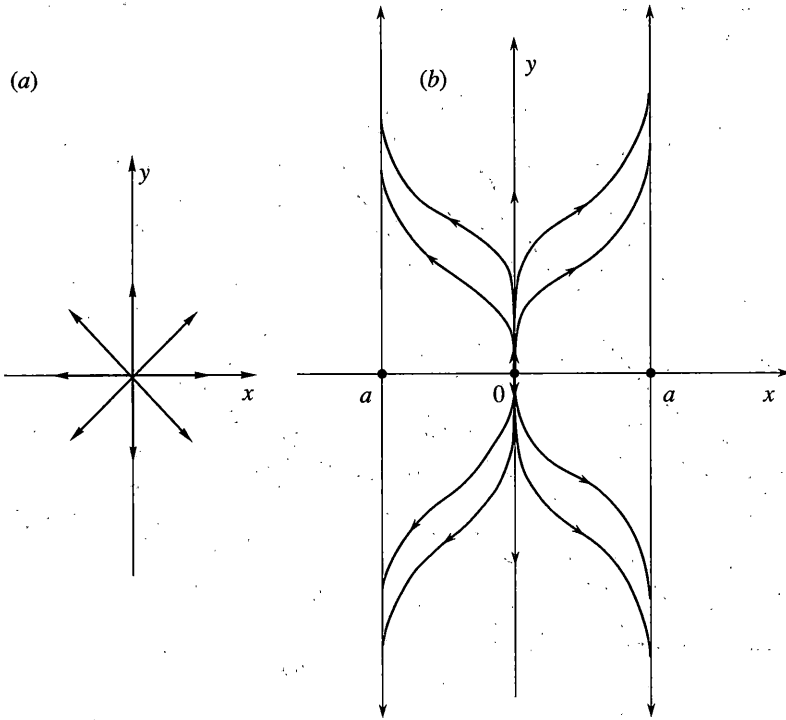


Фиг. 3

можно добиться удовлетворительного согласования полученного решения с крайними условиями, то только в этом случае решение приемлемо для анализа данной конкретной задачи.

Полученное решение может быть использовано и для задач о течении материала к особой точке (или от нее) по линиям  $\alpha = \text{const}$ .

Известно решение о течении по прямым, проходящим через особую точку [3]. Для решения (б) источник является существенно анизотропным. На фиг. 4 показаны сравнительные схемы изотропного течения (фиг. 4, а) и анизотропного (фиг. 4, б).



Фиг. 4

В первом случае (фиг. 4, *a*) расход материала в единицу времени на любом участке поверхности постоянного радиуса сферы с центром в особой точке не зависит от направления.

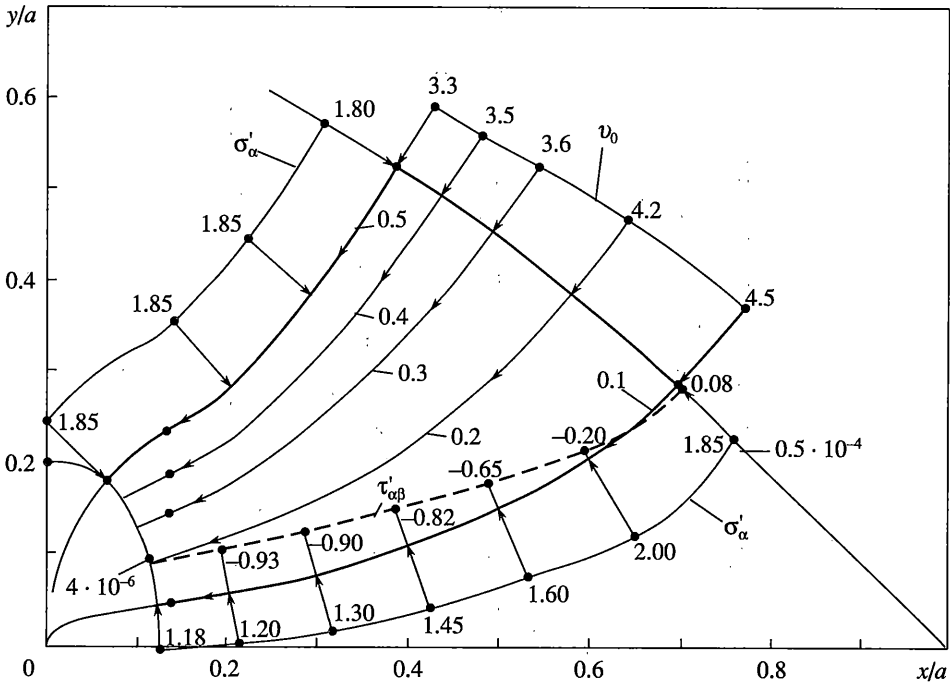
Во втором случае, (фиг. 4, *b*), материал при течении из точки  $x = y = 0$  ориентирован вдоль оси  $y$ , а затем происходит расщепление потока на две части, которые приближаются к плоскостям  $x = \pm a$  и поток концентрируется вблизи этих плоскостей. Из формулы (5) следует, что  $v_\beta \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$  и  $|x| \rightarrow a$  (на фиг. 4, *b*, ввиду симметрии, показано течение в направлении оси  $y$  и в противоположном направлении).

Такое поле скоростей аналогично силовому полю с такими особенностями: все поле находится в полосе шириной  $2a$ ; вблизи точки  $x = y = 0$  поле ориентировано вдоль оси  $y$ , а затем оно расщепляется на два потока, которые приближаются к плоскостям  $x = \pm a$ , вблизи плоскостей  $x = \pm a$  поле с увеличением расстояния до особой точки не ослабевает, поскольку происходит не рассеивание его в пространстве, а концентрация вблизи этих плоскостей.

На фиг. 5 показана схема течения материала к особой точке в полости, ограниченной линиями  $\alpha_1 = -0.1 \cdot 10^{-2}$  м и  $\alpha_2 = -0.5 \cdot 10^{-2}$  м. Здесь показана эпюра  $v_0$  на линии  $\beta = 0.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> (на линиях тока стрелками показаны направления течения).

Расход материала в единицу времени  $Q$  задан и позволяет определить постоянную  $C$ . Этот расход между линиями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  равен

$$Q = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v_\beta ds$$



Фиг. 5

где элемент дуги линии  $\beta = \text{const}$  равен  $ds = \dot{H}_1 d\alpha$ . После подстановки  $v_\beta$  и  $H_1$  получаем

$$Q = -c \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\alpha} = -c \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), \quad c = -Q \left[ \ln\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \right]^{-1}$$

а при  $\alpha_1 = -0.1 \cdot 10^{-2}$  м,  $\alpha_2 = -0.5 \cdot 10^{-2}$  м  $c = -0.622 Q$ .

На граничных линиях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  построены эпюры величин  $\sigma'_\alpha$  (фиг. 5), а штрихами на линии  $\alpha = -0.1 \cdot 10^{-2}$  м показана эпюра  $\tau'_{\alpha\beta}$ , причем при  $0.1a < |x| < 0.625a$ ,  $\tau'_{\alpha\beta} < 0$ , а при  $0.625a < |x| < 0.70a$ ,  $\tau'_{\alpha\beta} > 0$ . Постоянная  $C = -0.85k$  определена из условия равенства нулю равнодействующей нормальных напряжений на линии  $\beta = 0.04 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>.

Отметим, что формулы (1), (2) позволяют получать простые решения многих задач, имеющих значение для практики, за счет выбора функции  $\phi(x)$ .

Например, при  $\phi(x) = x$ ,  $\alpha = y/x$ ,  $\beta = x^2 + y^2$ :  $\Phi = \arctg\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ,  $H_1 = \sqrt{\beta} (\alpha^2 + 1)^{-1}$ ,  $H_2 =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \tau_{\alpha\beta} = k(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1)^{-1}, \quad \sigma_{\alpha, \beta} = C \pm 2k\alpha(\alpha^2 + 1)^{-1}$$

$$v_\beta = -\frac{c}{\sqrt{\beta}} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

Это решение отличается от известного решения Надаи [3], хотя для него, как и для решения Надаи,  $\tau_{\alpha\beta}$  зависит только от переменной  $\alpha$  и не зависит от  $\beta$ .

Формулы (6) применились при расчетах напряжений для волочения и прессования в матрицах различной конфигурации, используемых на практике, для парабол, дуг синусоид, логарифмических кривых.

Координаты (4) применились для расчета напряжений при разрезании заготовок ножами.

Такие системы с координатными линиями с острием могут быть полезными и при рассмотрении задач об упругой деформации и о течении вязкой жидкости.

С другой стороны, если известны линии тока для течения идеально вязкой жидкости, например в известных задачах гидродинамики, то, определив для них систему криволинейных координат и метрическую функцию, можно по формулам (6) определить, соответствующее этой системе координат, решение плоской задачи теории пластичности. Часто это оказывается удобным, позволяя выбрать для известного, кинематически допустимого, поля скоростей соответствующее, статически допустимое, поле напряжений.

В настоящее время известно немного точных решений уравнений плоской деформации теории пластичности (часть их приведена в [3, 4]). Приведенный метод позволяет получать точные решения для задач, связанных с обтеканием пластическим материалом любого профиля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партон Е.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 476 с.
2. *Нотт Д.* Основы механики разрушения. М.: Металлургия, 1978. 256 с.
3. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
4. *Бровман М.Я.* Применение теории пластичности в прокатке. М.: Металлургия, 1991. 265 с.
5. *Бровман М.Я.* О решении уравнений пластического течения в криволинейных координатах // Известия РАН. МТТ. 2004. № 4. С. 86–97.
6. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание, 1991. 47 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
8. *Бровман М.Я.* Расчет температурных режимов заготовок сложной формы // Изв. вузов. Черная металлургия. 2001. № 9. С. 28–31.

Тверь

Поступила в редакцию  
22.12.2003