

## ОБ ЭВОЛЮЦИИ РЕШЕНИЯ ПРАНДТЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ

Показано, как под действием точечных симметрий преобразуется известное решение Прандтля уравнений идеальной теории пластичности в двумерном случае. В результате преобразований получены новые классы точных решений этих же уравнений. Подробно рассмотрены те решения, которые могут быть использованы для описания плоских течений возникающих при сжатии пластического слоя жесткими плитами. Для них построены линии скольжения. Эти линии скольжения отличны от циклоид, полученных Прандтлем. Приведены некоторые новые свойства характеристик плоской задачи идеальной пластичности.

Теория симметрий широко используется для изучения и решения дифференциальных уравнений. Отметим лишь возможность поиска точных решений дифференциальных уравнений и их классификацию по группам симметрий. Эти и другие результаты можно найти в [1].

Симметрии, допускаемые системами дифференциальных уравнений, обладают следующим свойством: под их действием решения системы снова переходят в решение этой же системы. Это свойство позволяет строить новые решения не интегрируя исходную систему уравнений, а просто подвергая некоторые известные решения системы групповым преобразованиям. Таким способом получены многие интересные результаты для различных дифференциальных уравнений. Отметим, что этот способ эффективен только тогда, когда имеется достаточно богатая группа симметрий. В публикуемой работе преобразованиями симметрий подверглось известное решение Прандтля. В результате получено достаточно много точных решений, которые еще ждут своего исследования. Здесь были выделены только те решения, которые ограничены по оси  $OY$  и в силу этого могут служить для описания пластических течений возникающих при сжатии материала жесткими параллельными плитами.

1. Рассмотрим уравнения теории идеальной пластичности в плоском случае:

$$\begin{aligned}\sigma_x - 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta) &= 0 \\ \sigma_y - 2k(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $\sigma$  – гидростатическое давление,  $\theta$  – угол между осью  $Ox$  и первым главным направлением тензора напряжений,  $k$  – постоянная пластичности, индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Отметим, что система (1.1) имеет две характеристики, которые в пластичности часто называют линиями скольжения. Уравнения характеристик и соотношения на них таковы:

$$dy/dx = \operatorname{tg} \theta, \quad \sigma/(2k) - \theta = C_1$$

$$dy/dx = -\operatorname{ctg} \theta, \quad \sigma/(2k) + \theta = C_2$$

Система уравнений (1.1) допускает бесконечную группу симметрий [1]. Ее точечная подгруппа порождается следующими операторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= x\partial_x + y\partial_y \\ X_4 &= -x\partial_y + y\partial_x + \partial_\theta, & X_5 &= \partial_\sigma, & X &= \xi\partial_x + \eta\partial_y \\ X_4 &= \xi_1\partial_x + \xi_2\partial_y - 2k\theta - \sigma/k\partial_\theta \\ \xi_1 &= -x\cos 2\theta - y\sin 2\theta - y\sigma/k, & \xi_2 &= y\cos 2\theta - x\sin 2\theta + x\sigma/k \end{aligned} \quad (1.2)$$

где функции  $(\xi, \eta)$  есть произвольное решение следующей линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_\sigma - 2k(\xi_\sigma \cos 2\theta + \eta_\sigma \sin 2\theta) &= 0 \\ \eta_\sigma - 2k(\xi_\sigma \sin 2\theta + \eta_\sigma \cos 2\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Каждому оператору из (1.2) соответствуют некоторые преобразования симметрии, которые преобразуют систему (1.2) снова в систему того же вида. Так оператору  $X$  соответствуют преобразования независимых переменных вида:

$$x' = x + a\xi, \quad y' = y + a\eta \quad (1.4)$$

где  $a$  – произвольный параметр,  $(\xi, \eta)$  – произвольное решение системы (1.3). Поскольку оператор  $X$  допускается системой уравнений (1.1), то преобразования независимых переменных вида (4), не изменяют вид системы (1.1).

*Замечание.* Здесь приведены только те переменные, которые изменяются, при этом преобразовании. Остальные переменные для краткости опущены.

Под действием преобразований группы симметрий все решения системы (1.1) снова преобразуются в решения этой же системы. Более того, имеет место, следующее утверждение.

*Утверждение.* Под действием преобразований группы симметрий, порождаемой операторами (1.2), линии скольжения (характеристики) системы (1.1) преобразуются снова в линии скольжения (характеристики) этой же системы.

2. Система уравнений (1.1) изучается уже более 100 лет, но точных решений ее известно совсем немного, хотя каждое из них несет очень важную информацию о самой системе и ее технических приложениях. Несомненно, одним из наиболее известных решений системы (1.1) является решение, построенное Прандтлем. Это решение описывает пластическое течение тонкого слоя сжимаемого жесткими и шероховатыми плитами. Приведем здесь это решение:

$$\sigma = -kx + k(1 - y^2)^{1/2}, \quad 2\theta = \arccos y \quad (2.1)$$

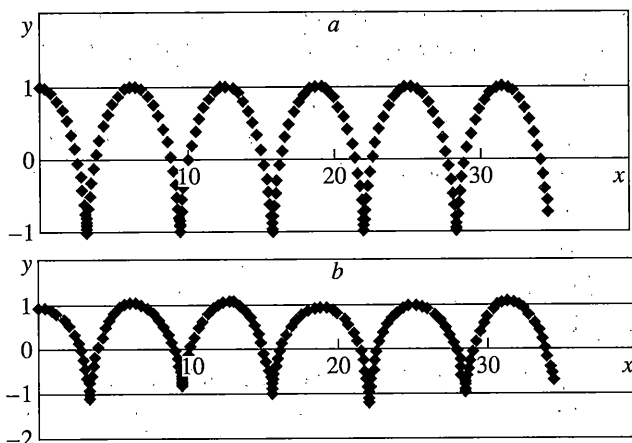
Из сформулированного выше утверждения, в частности, следует, что для построения линий скольжения следует подставить соотношение на характеристике в решение. Подставим в решение (5) соотношения на первой характеристике  $\sigma/(2k) - \theta = C_1$ . Получаем уравнение первого семейства линий скольжения:

$$x = -2\theta + \sin 2\theta + C_1, \quad y = \cos 2\theta$$

Аналогично получаем второе семейство линий скольжения:

$$x = 2\theta + \sin 2\theta + C_2, \quad y = \cos 2\theta$$

График этой линии скольжения приведен на фиг. 1, а.



Фиг. 1

3. Под действием преобразований (1.4) решение Прандтля перейдет в следующее:

$$\sigma = -kx + ak\xi + k\sin 2\theta, \quad y = \cos 2\theta + a\eta \quad (3.1)$$

а линии скольжения будут выглядеть так:

$$x = \pm 2\theta + a\xi + \sin 2\theta + C_i, \quad y = \cos 2\theta + a\eta \quad (i = 1, 2)$$

Поэтому для нахождения новых решений следует найти некоторые решения системы уравнений (1.3). Эта система является системой уравнений в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами. Поэтому можно искать ее решение в виде бесконечных рядов:

$$\xi = \sum [b_i(\sigma)\cos(i\theta) + c_i(\sigma)\sin(i\theta)], \quad \eta = \sum [B_i(\sigma)\cos(i\theta) + C_i(\sigma)\sin(i\theta)]$$

где  $b_i(\sigma)$ ,  $c_i(\sigma)$ ,  $B_i(\sigma)$ ,  $C_i(\sigma)$  – функции, определяемые из систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Этот путь ведет к успеху, но полученные выражения слишком сложно использовать для практических нужд и анализа результатов. Поэтому, приведем несколько более простых решений системы (1.3), которые можно использовать на практике. Решения системы (1.3) можно искать в следующих формах:

$$\xi = \alpha\sigma + f(\theta), \quad \eta = \beta\sigma + g(\theta) \quad (3.2)$$

$$\xi = f(\theta)\exp(\sigma/(2k)), \quad \eta = g(\theta)\exp(\sigma/(2k)) \quad (3.3)$$

$$\xi = [a(\theta)\sin(\sigma/(2k)) + b(\theta)\cos(\sigma/(2k))] \quad (3.4)$$

$$\eta = [A(\theta)\sin(\sigma/(2k)) + B(\theta)\cos(\sigma/(2k))]$$

$$\xi = [a(\theta)\text{sh}(\sigma/(2k)) + b(\theta)\text{ch}(\sigma/(2k))] \quad (3.5)$$

$$\eta = [A(\theta)\text{sh}(\sigma/(2k)) + B(\theta)\text{ch}(\sigma/(2k))]$$

Здесь функции  $f$ ,  $g$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $B$  можно определить из решения соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Видно, что под действием преобразований (3.2) решение Прандтля перейдет в решение практически такого же вида, поэтому его рассматривать здесь не будем.

Под действием преобразований (3.3), (3.5) решение Прандтля перейдет в решения, которые не могут быть использованы для описания пластического слоя сжимаемого

жесткими параллельными плитами. Это видно из того, что переменная  $u$  в этом случае уже не будет ограничена. Поэтому здесь такого типа преобразования мы рассматривать не будем.

4. Рассмотрим, как действует оставшееся преобразование (3.4) на линии скольжения. Подставим (3.4) в систему уравнений (1.3). В результате получим систему уравнений для определения функций  $a, b, A, B$ :

$$\begin{aligned} a' + b \cos 2\theta + B \sin 2\theta &= 0 \\ b' - a \cos 2\theta - A \sin 2\theta &= 0 \\ A' + b \sin 2\theta - B \cos 2\theta &= 0 \\ B' - a \sin 2\theta + A \cos 2\theta &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Сделаем следующие преобразования: продифференцируем каждое из уравнений (4.1) по  $\theta$ , тогда с учетом уравнений (4.1) получим следующие уравнения.

$$\begin{aligned} a'' + a + 2A' &= 0, \quad A'' + A - 2a' = 0 \\ b'' + b + 2B' &= 0, \quad B'' + B - 2b' = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Будем искать решение первой системы (4.2) в виде:

$$a = C \exp \lambda \theta, \quad A = D \exp \lambda \theta, \quad C, D - \text{const}$$

Тогда для определения  $\lambda, C, D$  получим следующие алгебраические уравнения

$$C\lambda^2 + C + 2D\lambda = 0, \quad D\lambda^2 + D - 2C\lambda = 0$$

Из этих уравнений следует

$$C = \pm iD, \quad \lambda_{1,2} = i(1 \pm \sqrt{2}), \quad i^2 = -1$$

В силу этого окончательное (действительное) решение первой системы (4.2) имеет вид:

$$a = C_1 \cos(1 \pm \sqrt{2})\theta - C_2 \sin(1 \pm \sqrt{2})\theta$$

$$A = C_1 \sin(1 \pm \sqrt{2})\theta + C_2 \cos(1 \pm \sqrt{2})\theta$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Тогда согласованное с ним решение системы второй из (4.2), с учетом (4.1)  $b = (1 \pm \sqrt{2})(C_2 \cos(1 \mp \sqrt{2})\theta - C_1 \sin(1 \mp \sqrt{2})\theta)$  запишется так:

$$B = (1 \pm \sqrt{2})(C_2 \sin(1 \mp \sqrt{2})\theta + C_1 \cos(1 \mp \sqrt{2})\theta)$$

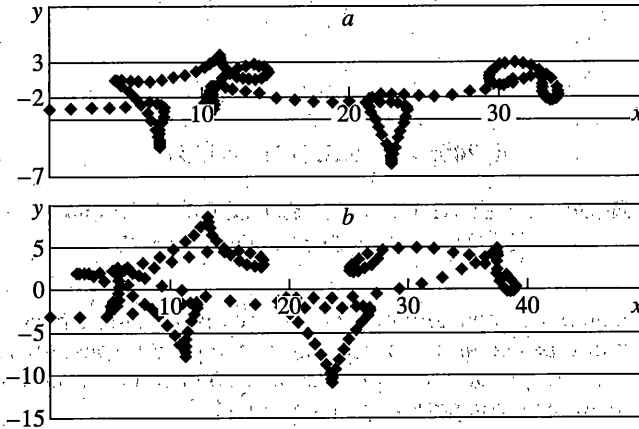
Для наглядности рассмотрим случай, когда  $C_2 = 0$ , выбираем также всюду верхний знак, тогда (3.4) запишется так:

$$\xi = [\cos(1 - \sqrt{2})\theta \sin(\sigma/(2k)) - (1 - \sqrt{2}) \sin(1 + \sqrt{2})\theta \cos(\sigma/(2k))]$$

$$\eta = [\sin(1 - \sqrt{2})\theta \sin(\sigma/(2k)) + (1 - \sqrt{2}) \cos(1 + \sqrt{2})\theta \cos(\sigma/(2k))]$$

Далее выписываем преобразованные уравнения линий скольжения

$$\begin{aligned} x &= \pm 2\theta + a[\cos(1 - \sqrt{2})\theta \sin(\pm \theta + C_i) - (1 - \sqrt{2}) \sin(1 + \sqrt{2})\theta \cos(\pm \theta + C_i)] + \sin 2\theta + C \\ y &= \cos 2\theta + a[\sin(1 - \sqrt{2})\theta \sin(\pm \theta + C_i) + (1 - \sqrt{2}) \cos(1 + \sqrt{2})\theta \cos(\pm \theta + C_i)] \end{aligned} \tag{4.3}$$



Фиг. 2

Из соотношений (4.3) видно, что у нового решения линии скольжения также будут ограничены по оси  $y$ , поэтому его можно использовать для описания пластических течений между двумя жесткими и шероховатыми плитами.

На фиг. 1, 2 приведены графики линий скольжения для различных значений параметра  $a$ . Графики построены с шагом 0.1 в координатах  $(x, y)$ . На фиг. 1,  $a$  построены линии скольжения для решения Прандтля при  $a = 0$ . На фиг. 1,  $b$  построены линии скольжения для  $a = 0.2$ . Из них видно, что при малых значениях этого параметра построенное решение мало отличается от решения Прандтля и описывает пластическое течение тонкого слоя. С увеличением параметра толщина слоя увеличивается и становится равной примерно  $2(h + a)$ , где  $h$  толщина первоначального слоя,  $a > 0$ . При больших значениях параметра решение уже существенно отличается от решения Прандтля. Оно может быть использовано для анализа пластических течений уже не только тонких слоев материала. На фиг. 2 построены линии скольжения для  $a = 5$  (фиг. 2,  $a$ ) и  $a = 10$  (фиг. 2,  $b$ ). При этих значениях параметра частицы пластического материала перемещаются уже по более сложным траекториям, отличным от циклоид решения Прандтля.

В заключение приведем вид построенного нового решения, которое можно назвать  $S$ -решением Прандтля, т.е. полученного из решения Прандтля преобразованиями симметрии

$$\sigma = -kx + a[\cos(1 - \sqrt{2})\theta \sin(\sigma/(2k)) - (1 - \sqrt{2})\sin(1 + \sqrt{2})\cos(\sigma/(2k))] + k \sin 2\theta$$

$$y = \cos 2\theta + a[\sin(1 - \sqrt{2})\theta \sin(\sigma/(2k)) + (1 - \sqrt{2})\cos(1 + \sqrt{2})\theta \cos(\sigma/(2k))]$$

где  $a$  – произвольный параметр (при  $a = 0$ , получаем исходное решение Прандтля).

Аналогично можно построить и другие  $S$ -решения из этой серии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирыков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск, Из-во СО РАН, 2001. 190 с.
2. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 230 с.