

УДК 539.374

© 2005 г. А.В. ГОРСКИЙ, П.В. ГОРСКИЙ

О ВНЕДРЕНИИ ЖЕСТКОЙ ПИРАМИДЫ В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

А.Ю. Ишлинский [1] рассмотрел предельное состояние идеально пластического пространства при вдавлении сферического жесткого штампа – проба Бринелля. Ниже рассматривается автоматическое решение задачи о наклонном внедрении жесткой правильной n -угольной пирамиды в идеально пластическое полупространство при условии полной пластичности с учетом контактного трения на гранях пирамиды. Задача моделирует испытание материалов на твердость внедрением жесткой пирамиды. Автоматическое решение задачи о перпендикулярном внедрении жесткой треугольной и квадратной пирамиды с учетом контактного трения на гранях пирамиды приведены в [2, 3].

1. Рассмотрим процесс внедрения правильной жесткой n -угольной пирамиды в идеально пластическое полупространство под углом δ к нормали его границы в декартовых координатах $\{x, y, z\}$. Начало координат поместим на ось внедрения. Ось z направим по нормали к границе полупространства. Ось x направим через одну из вершин основания пирамиды. Угол отклонения грани пирамиды от оси внедрения обозначим через ζ , угол между смежными радиусами описанной около основания пирамиды окружности обозначим через $\alpha = 2\pi/n$ (где n – число боковых граней пирамиды). Высота пирамиды равна $h = \cos(\alpha/2) \operatorname{ctg} \zeta$, где ζ – угол отклонения грани пирамиды от оси внедрения.

Координаты напряжения будем считать безразмерными величинами, принимая радиус описанной около основания пирамиды окружности за характерную длину, напряжение текучести материала при одноосном сжатии за характерное напряжение.

Вершины основания пирамиды, согласно введенным обозначениям, имеют следующие координаты: $M_k(\cos k\alpha, \sin k\alpha, 0)$, где $k = \overline{0, n-1}$, вершина пирамиды $H(0, 0, -h)$.

Повернем пирамиду на угол ξ вокруг оси Oz , тогда координаты вершин основания пирамиды примут вид

$$M'_k(\cos(k\alpha + \xi), \sin(k\alpha + \xi), 0) \quad (1.1)$$

затем повернем пирамиду вокруг оси Oy на угол δ . В результате получим: координаты вершин основания пирамиды

$$M''_k(\cos(k\alpha + \xi) \cos \delta, \sin(k\alpha + \xi), \cos(k\alpha + \xi) \sin \delta) \quad (1.2)$$

координаты вершины пирамиды

$$H''(h \sin \delta, 0, -h \cos \delta) \quad (1.3)$$

Далее для вершины H'' вернемся к первоначальному обозначению H (без штриха).

Векторы нормалей \bar{n}_k к граням пирамиды $HM''_k M''_{k+1}$ примут вид

$$\bar{n}_k = \overline{HM''_k} \times \overline{HM''_{k+1}} = \{n_1^k, n_2^k, n_3^k\} \quad (1.4)$$

Уравнения плоскостей граней пирамиды $HM_k''M_{k+1}''$ имеют вид

$$n_1^k(x - h_1) + n_2^k(y - h_2) + n_3^k(x - h_3) = 0 \quad (1.5)$$

Пирамида в сечении плоскостью $z = 0$ образует многоугольник с вершинами N_k , координаты которых находятся из системы

$$\begin{cases} n_1^k(x - h \sin \delta) + n_2^k y + n_3^k h \cos \delta = 0 \\ n_1^{k+1}(x - h \sin \delta) + n_2^{k+1} y + n_3^{k+1} h \cos \delta = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Координаты вершин N_k определяются по формулам:

$$\begin{aligned} N_1^k &= \frac{h \cos((k+1)\alpha + \xi)}{\cos((k+1)\alpha + \xi) \sin \delta + h \cos \delta} \\ N_2^k &= \frac{h \sin((k+1)\alpha + \xi) \cos \delta}{\cos((k+1)\alpha + \xi) \sin \delta + h \cos \delta} \\ N_3^k &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Координаты середин отрезков $M_k'M_{k+1}'$ имеют вид

$$C_k \left(\frac{\cos(k\alpha + \xi) + \cos[(k+1)\alpha + \xi]}{2}, \frac{\sin(k\alpha + \xi) + \sin[(k+1)\alpha + \xi]}{2}, 0 \right) \quad (1.8)$$

Для определения координат точек C_k'' , а затем G_k (точек пересечения k -ой грани пирамиды с плоскостью, содержащую прямую OH и проходящую через середину отрезка $M_k'M_{k+1}'$) в выше приведенных формулах следует сделать замену

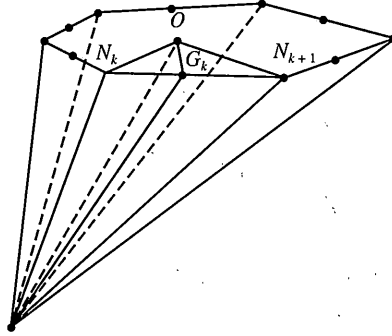
$$\begin{aligned} \cos(k\alpha + \xi) &\rightarrow 1/2(\cos(k\alpha + \xi) + \cos[(k+1)\alpha + \xi]) \\ \sin(k\alpha + \xi) &\rightarrow 1/2(\sin(k\alpha + \xi) + \sin[(k+1)\alpha + \xi]) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Координаты точек G_k определяются по формулам:

$$\begin{aligned} G_1^k &= \frac{h(\cos((k+1)\alpha + \xi) + \cos((k+2)\alpha + \xi))}{\sin \delta (\cos((k+1)\alpha + \xi) + \cos((k+2)\alpha + \xi)) + 2h \cos \delta} \\ G_2^k &= \frac{h \cos \delta (\sin((k+1)\alpha + \xi) + \sin((k+2)\alpha + \xi))}{\sin \delta (\cos((k+1)\alpha + \xi) + \cos((k+2)\alpha + \xi)) + 2h \cos \delta} \\ G_3^k &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

В итоге будем иметь координаты всех необходимых узловых точек искомой пирамиды (фиг. 1). Аналогично можно рассматривать процесс внедрения произвольной пирамиды (исключив случаи, приводящие к ее вращению), при этом предлагаемое далее решение не изменится.

Принимаем, что при внедрении пирамиды вектор скорости пластического течения находится в плоскостях, содержащих ось внедрения пирамиды, и ортогональных к ее граням. Во введенных выше обозначениях этими плоскостями являются OHG_k . Для каждой плоскости пластического течения введем свою систему координат. Начало координат оставим на месте, ось x направим через точки G_k , ось z проведем в плоскости OHG_k в направлении, обратном внедрению пирамиды.



Фиг. 1

Тогда соответствующие углы треугольников OHG_k плоскостей пластического течения находятся из соотношений:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2S_{\Delta OG_k H}}{OG_k G_k H}\right), \quad \delta = \arccos\left(\frac{2S_{\Delta OG_k H}}{OG_k OH}\right) \quad (1.11)$$

где α – угол наклона грани пирамиды к оси Oz , δ – угол наклона оси внедрения пирамиды к оси Oz .

2. Условия полной пластичности в пространстве главных напряжений для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 - 1, \quad \sigma = \sigma_1 - 1/3 \quad (2.1)$$

где σ – среднее напряжение.

Направляющие косинусы напряжений σ_3 с осями координат x, y, z имеют вид

$$n_1 = \cos\theta, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \sin\theta$$

где θ – угол между направлением напряжений σ_3 и осью x . Ненулевые компоненты тензора напряжений при условии (2.1) определяются выражениями

$$\sigma_x = \sigma + 1/3 - \cos^2\theta, \quad \sigma_y = \sigma + 1/3, \quad \sigma_z = \sigma + 1/3 - \sin^2\theta \quad (2.2)$$

$$\tau_{xz} = -\sin\theta \cos\theta \quad (2.3)$$

Главное напряжение σ_2 направлено по оси y . Ортогональные характеристики в плоскостях $y = \text{const}$ совпадают с линиями скольжения ξ и η , которые определяются дифференциальными уравнениями

$$dz/dx = \text{tg}\varphi \text{ для } \xi, \quad dz/dx = -\text{ctg}\varphi \text{ для } \eta \quad (2.4)$$

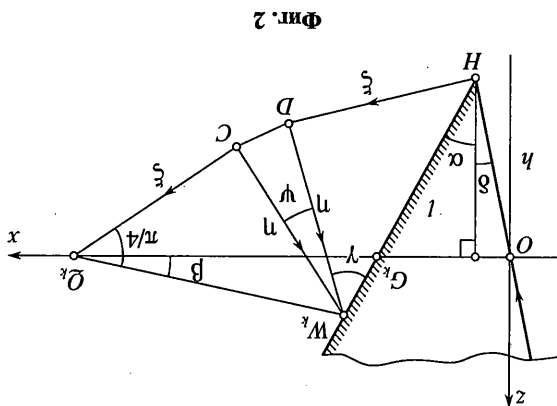
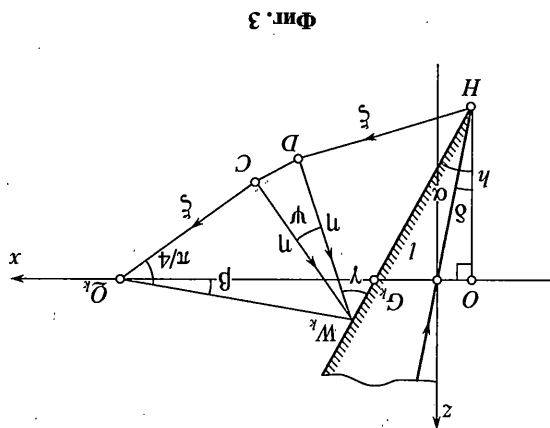
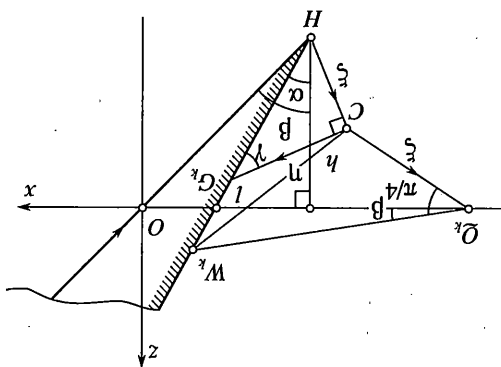
с дифференциальными соотношениями для напряжений и скоростей перемещений, совпадающими с уравнениями Генки [4]:

$$d\sigma - d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta \quad (2.5)$$

где φ – угол между касательной к линии скольжения ξ и осью x . Углы φ и θ связаны соотношением $\theta = \varphi - \pi/4$.

3. При такой конфигурации, зависящей от пяти параметров n, ζ, ξ, δ и μ – задающего напряжение контактного трения на границе контакта NW_k возможны **три случая**.

- Критерия определения реализуемого случая:
1. $\overline{OG_k} \cdot \overline{OH} > 0$ и $-\overline{OG_k} \cdot \overline{G^k H} \geq 0$ (Фиг. 2);
 2. $\overline{OG_k} \cdot \overline{OH} \leq 0$ (Фиг. 3);
 3. $\overline{OG_k} \cdot \overline{OH} > 0$ и $-\overline{OG_k} \cdot \overline{G^k H} < 0$ (Фиг. 4).



Рассмотрим первые два случая. Для **первого случая** $\alpha < \pi/2$, $\delta < \pi/2$; для **второго** – $\delta < \alpha < \pi/2$. Расстояние от точки H до оси Ox определяется формулой

$$h = 2S/OG_k \quad (3.1)$$

где S – площадь ΔOHG_k .

Нормальные и касательные напряжения на границе контакта HW_k постоянны. В области DHW_k линии скольжения прямолинейны и напряженное состояние однородно. В области DCW_k прямолинейные линии скольжения η образуют центрированный веер с особой точкой W_k . В области CW_kQ_k напряженное состояние также однородно и граница W_kQ_k свободна от внешних напряжений (фиг. 2, 3).

При условии полной пластичности материал пластической области CW_kQ_k находится в состоянии одноосного сжатия параллельно границе W_kQ_k :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -1, \quad \sigma = -1/3 \text{ на } W_kQ_k \quad (3.2)$$

На границе контакта HW_k напряжение контактного трения μ определяет угол наклона линии скольжения η к этой границе

$$\gamma = 1/2 \arccos 2\mu, \quad 0 \leq \mu \leq 1/2 \quad (3.3)$$

Углы β и ψ связаны соотношением

$$\beta + \psi = \pi/4 + \alpha - \gamma \quad (3.4)$$

Угол α и μ в случае симметрии пластического течения относительно оси Oz должны удовлетворять неравенству, соответствующему предельному значению $\pi/2$ угла при вершине жесткой области в точке H :

$$\alpha \leq 1/4\pi + 1/2 \arccos 2\mu \quad (3.5)$$

Для идеально гладкой пирамиды ($\mu = 0$) $\alpha \leq \pi/2$, и для абсолютно шероховатой пирамиды ($\mu = 1/2$) $\alpha \leq \pi/4$.

Из условия несжимаемости следует равенство площадей треугольников $W_kQ_kG_k$ и OHG_k , которое с использованием соотношения

$$h/l = \cos \alpha - \sqrt{2} \cos \gamma \sin \beta \quad (3.6)$$

где l – длина границы контакта HW_k , приводит к нелинейным уравнениям относительно угла β (фиг. 2, 3):

$$\frac{h^2}{l^2} (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \delta) = \frac{(\cos \alpha - h/l)^2}{\cos \alpha \sin \beta} \cos(\alpha - \beta) \quad (3.7)$$

где α , δ , γ известны, знаки (\pm) берутся для 1-го и 2-го случаев соответственно.

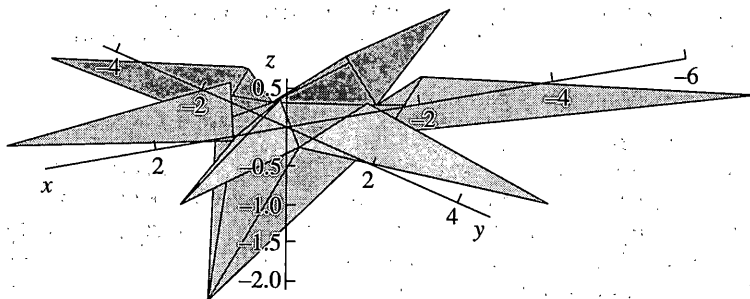
Среднее напряжение в области DHW_k находим интегрированием соотношений (2.5) вдоль линии скольжения ξ с использованием угла ψ , определяемого из уравнения (3.4), и граничного условия (3.2) [2, 3]:

$$\sigma = -(1/3 + \pi/4 + \alpha - \gamma - \beta) \quad (3.8)$$

Нормальное давление на грань пирамиды определяется из соотношения [2, 3]:

$$p = 1/2(1 + \sin 2\gamma) + \pi/4 + \alpha - \gamma - \beta \quad (3.9)$$

Для **третьего случая** ($\alpha < \delta < \pi/2$) непрерывное поле напряжений невозможно, и решение характеризуется разрывным полем. Справа и слева от линии разрыва имеют по-прежнему равномерные напряженные состояния (фиг. 4).



Фиг. 5

Среднее напряжение в области CW_kQ_k : $\sigma^- = -1/3$; в области CHW_k : $\sigma^+ = -p + 2/3$. Согласно [5]:

$$[\sigma] = p - 1 = \cos 2\theta^-, \quad \theta^- = 1/2(\alpha + \beta + \gamma) - 7/8\pi \quad (3.10)$$

где $[\sigma]$ – величина разрыва среднего напряжения σ при переходе через поверхность разрыва CW_k .

Отсюда нормальное давление на грань пирамиды определяется из соотношения

$$p = 1 + \cos(\pi/4 + \alpha + \beta + \gamma) \quad (3.11)$$

где угол β требует дополнительного определения.

Аналогично первым двум случаям, из условия несжимаемости выводится уравнение для нахождения угла β :

$$\frac{h^2}{l^2}(\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \alpha) = \left(1 - \frac{hl}{\cos \alpha}\right) \sqrt{2} \cos \gamma \cos(\alpha + \beta) \quad (3.12)$$

где α, δ, γ – известные величины.

Давление в направлении оси Oz :

$$p_z = - \left[\left(\frac{HN_{k+1} \times HN_k}{2S_{\Delta HN_k N_{k+1}}} p \right) e_3 \right] \quad (3.13)$$

Общее давление на грань в направлении оси Oz :

$$P_z = p_z(S_{\Delta HN_k N_{k+1}} + S_{\Delta N_k N_{k+1} W_k}) \quad (3.14)$$

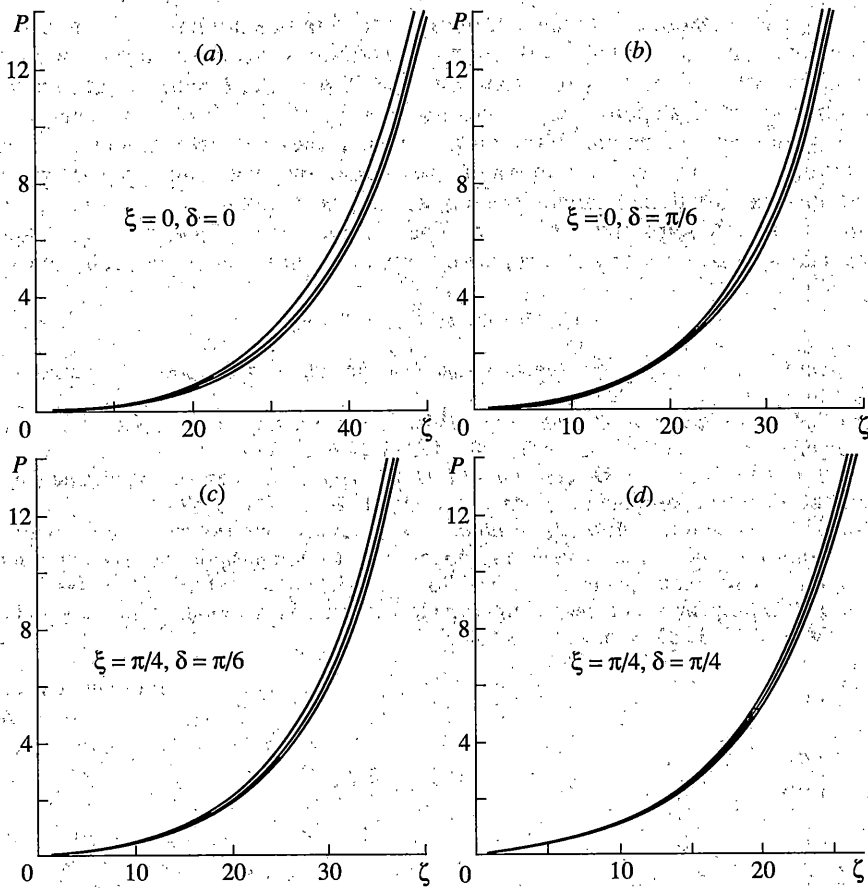
Общее давление в направлении оси Oz на грань пирамиды, внедренной на глубину $h = 1$:

$$P_z = p_z(S_{\Delta HN_k N_{k+1}} + S_{\Delta N_k N_{k+1} W_k}) / H^2 [3]$$

где $H[3]$ – третья координата точки H .

Для определения высот поднятия пластических областей над плоскостью $z = 0$ и расстояний OQ_k , найдем (фиг. 5):

$$1, 2 \text{ случай } G_k Q_k = \frac{l \cos \alpha - h}{\cos \alpha \sin \beta} \cos(\alpha - \beta) \quad (3.15)$$



Фиг. 6

$$\text{3 случай } G_k Q_k = \frac{l\sqrt{2}\cos\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \quad (3.16)$$

$$l = HW_k = \frac{h}{\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\gamma\sin\beta}, \quad h = \frac{2S_{\Delta OHG_k}}{OG_k}$$

В результате будем иметь

$$\chi_{pl} = |\overline{OQ_k}|, \quad \text{где } \overline{OQ_k} = \overline{OG_k} \left(1 + \frac{G_k Q_k}{OG_k} \right) \quad (3.17)$$

$$h_{pl} = \overline{OW_k} e_3, \quad \overline{OW_k} = \overline{OH} + \frac{\overline{HG_k}}{\overline{HG_k}} l \quad (3.18)$$

На фиг. 6 приведены графики зависимостей общего вертикального давления на квадратную пирамиду от угла, ζ наклона грани к оси пирамиды. Глубина внедрения пирамиды фиксирована и равна $h = 1$.

Графики, изображенные на фиг. 6, построены для различных углов поворота пирамиды вокруг оси внедрения $\xi = 0$, $\xi = \pi/4$, различных углов наклона оси внедрения пирамиды от нормали к полупространству $\delta = 0$, $\delta = \pi/6$, $\delta = \pi/4$ и для различного контактного трения на гранях пирамиды $\mu = 0$, $\mu = 0.1$, $\mu = 0.5$. Из этих графиков видно, что вертикальное давление на пирамиду возрастает с ростом угла ζ наклона грани к оси пирамиды, а угол ξ поворота пирамиды вокруг оси ее внедрения существенного влияния на изменение давления не оказывает (влияние уменьшается с увеличением числа граней пирамиды N), в то время как угол δ наклона оси внедрения пирамиды от нормали к полупространству вертикальное давление увеличивает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
2. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю., Непершин Р.И.* Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 6. С. 766–769.
3. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю., Непершин Р.И.* О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Изв. РАН. МГТ. 2002. № 4. С. 57–62.
4. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю., Непершин Р.И.* О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеальнопластического тела при условии полной пластичности // Докл. РАН. 2001. Т.381. № 5. С. 616–622.
5. *Ивлев Д.Д.* О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 4. С. 480–486.

Чебоксары

Поступила в редакцию
3.04.2003