

УДК 539.374

© 2005 г. Р.И. НЕПЕРШИН

## ДАВЛЕНИЕ ПЛОСКОГО КРУГЛОГО ШТАМПА НА ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ

Приведено численное решение задачи о давлении плоского круглого штампа на идеально пластическое полупространство при условии полной пластичности с учетом контактного трения, моделируемого по Прандтлю и Кулону. Показано образование жесткой области в центре штампа, размеры которой зависят от контактного трения. Вне жесткой области на границе контакта штампа с пластической областью происходит скольжение. Вычислены предельные значения коэффициентов трения, при которых жесткая область распространяется на всю границу контакта штампа с пластическим полупространством, и приведены зависимости давления на штамп от коэффициентов трения.

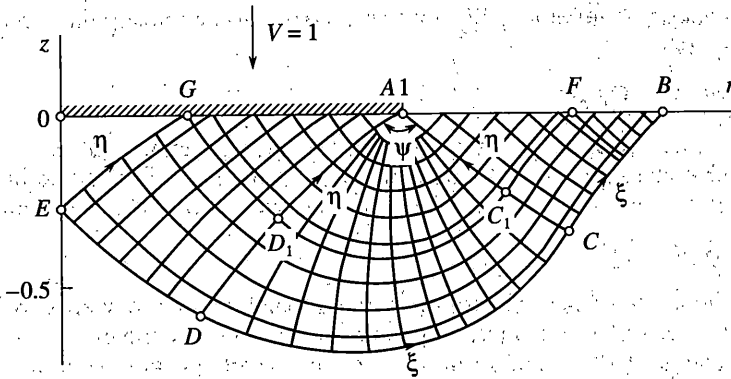
В [1, 2] приведено решение задачи о начальном пластическом течении идеально пластического полупространства при давлении гладкого плоского и сферического штампов. В [3] приведено решение задачи о давлении на идеально пластическое полупространство плоского круглого шероховатого штампа с центральной жесткой областью, перемещающейся вместе со штампом при отсутствии скольжения материала по границе контакта. Это решение дает значительно большую предельную нагрузку по сравнению с идеально гладким штампом и реализуется при значительных напряжениях контактного трения. Ниже приведено численное решение задачи о давлении плоского круглого в плане штампа на идеально пластическое полупространство с учетом напряжений контактного трения изменяющихся от нуля до предельного значения, при котором центральная жесткая область распространяется по всей контактной границе штампа.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим задачу о начальном пластическом течении при давлении плоского круглого в плане штампа на несжимаемое идеально пластическое полупространство по нормали к его границе с учетом контактного трения (фиг. 1). Введем цилиндрическую систему координат  $\{r, z, \theta\}$  с началом в центре штампа  $O$ . За единицу длины принимаем радиус штампа  $R$ , за единицу напряжения – предел текучести материала при одноосном сжатии  $\sigma_y$  и за единицу скорости – скорость вдавливания штампа по нормали к границе полупространства  $V$ .

При вдавливании штампа в пластической области возникает трехмерная пластическая деформация, сдвиговый механизм которой по двум плоскостям скольжения соответствует условию полной пластичности, которое приводит к статически определенным дифференциальным уравнениям гиперболического типа [4]. В рассматриваемой задаче радиальная скорость течения положительна, и условие полной пластичности для главных напряжений имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 - 1 \quad (1.1)$$

где направления главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  находятся в плоскости  $\{r, z\}$  и  $\sigma_2 = \sigma_\theta$ . При условии (1.1) уравнения равновесия для напряжений и условия несжимаемости и



Фиг. 1

изотропии для скоростей перемещений приводятся к уравнениям гиперболического типа [1, 2] с характеристиками, совпадающими с линиями скольжения  $\xi$  и  $\eta$  на плоскости  $\{r, z\}$ :

$$dz/dr = \operatorname{tg} \varphi \text{ для } \xi; \quad dz/dr = -\operatorname{ctg} \varphi \text{ для } \eta \quad (1.2)$$

где  $\varphi$  – угол между касательной к линии скольжения  $\xi$  и осью  $r$ . Вдоль линий скольжения выполняются дифференциальные соотношения для среднего напряжения в плоскости течения  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  и угла  $\varphi$ :

$$d\sigma - d\varphi = (dr + dz)/2r \text{ вдоль } \xi \quad (1.3)$$

$$d\sigma + d\varphi = (dr - dz)/2r \text{ вдоль } \eta \quad (1.4)$$

и для проекций вектора скорости перемещения на линии скольжения

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = -(V_\xi dr - V_\eta dz)/2r \text{ вдоль } \xi \quad (1.5)$$

$$dV_\eta + V_\xi d\varphi = -(V_\xi dz + V_\eta dr)/2r \text{ вдоль } \eta \quad (1.6)$$

Напряжения и скорости перемещений в цилиндрических координатах связаны с  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $V_\xi$  и  $V_\eta$  соотношениями

$$\sigma_r = \sigma - 1/2 \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + 1/2 \sin 2\varphi \quad (1.7)$$

$$\tau_{rz} = 1/2 \cos 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma + 1/2 \quad (1.8)$$

$$V_r = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_z = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi \quad (1.9)$$

$$V_\xi = V_r \cos \varphi + V_z \sin \varphi, \quad V_\eta = V_z \cos \varphi - V_r \sin \varphi \quad (1.10)$$

Система уравнений (1.2)–(1.4) является статически определимой, так как при задании граничных условий для напряжений из соотношений (1.7) и (1.8) определяются граничные условия для  $\sigma$  и  $\varphi$ , и из совместного решения уравнений (1.2)–(1.4) находятся линии скольжения и поле напряжений. Затем из соотношений (1.9) и (1.10) определяются граничные условия для скоростей перемещений, и по уравнениям (1.5) и (1.6) вычисляется поле скоростей перемещений в пластической области. Поля напряжений

и скоростей перемещений должны удовлетворять условию неотрицательности диссипативной функции

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \geq 0 \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – главные скорости деформаций. Из (1.1) и условия несжимаемости при  $D \geq 0$  следует неравенство  $\varepsilon_3 \leq 0$ , которое в ортогональных криволинейных координатах, связанных с направлениями главных напряжений  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$ , имеет вид

$$\varepsilon_3 = dV_3 - V_1 d\varphi \leq 0 \quad (1.12)$$

где  $V_3$  и  $V_1$  – проекции вектора скорости на направления напряжений  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$  и  $d\varphi$  – угол поворота касательной к элементу дуги траектории напряжения  $\sigma_3$  на плоскости  $\{r, z\}$ . Неравенство (1.12) удобно проверять при графическом изображении линий скольжения на физической плоскости  $\{r, z\}$  и соответствующего поля скоростей перемещений на плоскости годографа  $\{V_r, V_z\}$ .

**2. Граничные условия.** На фиг. 1 показано поле линий скольжения в пластической области при вдавливании штампа в полупространство с учетом контактного трения. Граница  $AB$  полупространства около штампа свободна от внешних нормальных и касательных напряжений. Из первого соотношения (1.8) и второго соотношения (1.7) находим

$$\sigma = -1/2, \quad \varphi = \pi/4 \quad \text{на } AB \quad (2.1)$$

Из (1.7), (1.8), (1.1) и (2.1) на границе  $AB$  получаем соотношения

$$\sigma_z = \sigma_\theta = \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_r = \sigma_3 = -1$$

которые показывают, что эта граница нагружена до пластического состояния сжатием по оси  $r$ , совпадающей с направлением  $\sigma_3$ .

Напряжения контактного трения приводят к образованию жесткой области  $OEG$  в центральной части границы контакта, движущейся вместе со штампом. Образование жесткой области в центральной части штампа при внедрении в пластическую среду подтверждается экспериментами и используется для приближенной оценки коэффициента пластического трения [6]. Длина границы контакта жесткой области со штампом изменяются от нуля для идеально гладкого штампа [1, 2] до единицы для шероховатого штампа с предельным коэффициентом трения [3]. На границе контакта  $AG$  происходит скольжение пластического материала относительно штампа.

В технологических задачах теории пластичности [5, 6] при больших контактных давлениях напряжение контактного трения обычно задается по Прандтлю постоянной величиной  $\mu$ , которая трактуется как сопротивление сдвигу пограничного слоя. В этом случае из первого соотношения (1.8) при  $\tau_{rz} = -\mu$  на границе  $AG$  находим угол наклона  $\xi$  линий скольжения

$$\varphi = 1/2 \arccos(-2\mu), \quad 0 < \mu < 1/2 \quad \text{на } AG \quad (2.2)$$

При моделировании контактного трения по Кулону с коэффициентом трения  $f$  линейная зависимость между  $\tau_{rz}$  и  $\sigma_z$  на границе скольжения и соотношения (1.7) и (1.8) приводят к соотношению между  $\sigma$  и  $\varphi$ :

$$f(2\sigma + \sin 2\varphi) = \cos 2\varphi \quad \text{на } AG \quad (2.3)$$

Угловая точка  $A$  штампа является вырожденной  $\xi$  линией скольжения, в которой угол  $\varphi$  изменяется от значения  $\pi/4$  на свободной границе до значения  $\varphi_A$  на границе штампа, определяемого граничными условиями (2.2) или (2.3). Угол  $\psi$  централизованного веера  $\eta$  линий скольжения, сходящихся в точке  $A$ , равен

$$\psi = \pi/4 - \varphi_A \quad (2.4)$$

При моделировании контактного трения по Прандтлю величина угла  $\varphi_A$  постоянна на всей границе скольжения  $AG$  и определяется из соотношения (2.2) по заданному коэффициенту пластического трения  $\mu$ . При моделировании контактного трения по Кулону из однородного дифференциального соотношения (1.3) в точке  $A$  и граничных условий (2.1) и (2.4) находим выражение для напряжения  $\sigma_A$  в точке  $A$  принадлежащей границе контакта

$$\sigma_A = -(1/2 + \pi/4 - \varphi_A) \quad (2.5)$$

и из соотношения (2.3) получаем нелинейное уравнение для угла  $\varphi_A$ :

$$\cos 2\varphi_A - f(1 + \pi/2 + \sin 2\varphi_A - 2\varphi_A) = 0 \quad (2.6)$$

которое решается методом Ньютона для заданного коэффициента трения  $f$ . Затем из однородного соотношения (1.3) находим  $\sigma$  и  $\varphi$  в особой точке  $A$  с известным из (2.4) углом веера  $\psi$ :

$$\sigma = -(1/2 + \zeta), \quad \varphi = \pi/4 - \zeta, \quad 0 \leq \zeta \leq \psi \quad (2.7)$$

Предельные значения коэффициентов контактного трения  $\mu^*$  и  $f^*$  находим расчетом линий скольжения для шероховатого штампа при отсутствии скольжения материала по его границе. В этом случае граница  $EG$  центральной жесткой области совпадает с линией скольжения  $AD$ , проходящей через точку  $A$  (фиг. 1). Точка  $D$  находится на оси симметрии, где  $r = 0$  и  $\varphi = -\pi/4$ . Координаты точки  $D$  и угол  $\varphi$  в этой точке являются непрерывными функциями двух параметров поля линий скольжения: длины свободной границы  $AB$  и угла  $\psi$  центрированного веера в точке  $A$ , так как при заданной координате  $r_B$  поле линий скольжения в области  $ABC$  определяется из решения задачи Коши для уравнений (1.2)–(1.4) с граничными условиями (2.1), и при заданном угле  $\psi$  определяется поле линий скольжения в области  $ACD$  из решения задачи Гурса по известным из (2.7) значениям  $\sigma$  и  $\varphi$  на вырожденной  $\xi$  линии скольжения в точке  $A$  и на  $\eta$  линии скольжения  $AC$ . Поэтому условие попадания точки  $D$  на ось симметрии дает два функциональных уравнения для определения параметров  $r_B$  и  $\psi$ :

$$r_D(r_B, \psi) = 0, \quad \varphi_D(r_B, \psi) + \pi/4 = 0 \quad (2.8)$$

Из решения системы уравнений (2.8) определяем угол  $\psi$ , затем из (2.4) находим угол  $\varphi_A$  в точке  $A$  на границе штампа и из соотношений (2.2) и (2.6) находим предельные коэффициенты трения  $\mu^*$  и  $f^*$ .

Если коэффициенты трения удовлетворяют неравенствам

$$0 < \mu < \mu^* \quad \text{или} \quad 0 < f < f^* \quad (2.9)$$

то на границе контакта штампа  $AG$  появляется скольжение и возникает задача определения границы  $EG$  центральной жесткой области для поля линий скольжения, показанного на фиг. 1, которое зависит от двух параметров: координат  $r_F$  и  $r_B$  точек  $F$  и  $B$  границы  $AB$ . Линии скольжения в областях  $ABC$  и  $ACD$  определяются координатой  $r_B$  и углом  $\psi$ , который находим из (2.4) и соотношения (2.2) при заданном  $\mu$ , или из уравнения (2.6) при заданном  $f$ . В области  $AD_1G$  линии скольжения определяются решением смешанной задачи для соотношений (1.2)–(1.4) по известным значениям  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $\eta$  линии скольжения  $AD_1$  и условиям (2.2) и (2.3) на  $AG$ . Линия скольжения  $GD_1C_1F$  и точка  $G$  определяются координатой  $r_F$  точки  $F$ . Затем вычисляем линии скольжения в области  $GD_1DE$  решением задачи Гурса по известным значениям  $\sigma$  и  $\varphi$  на линии скольже-

ния  $GD_1$ , зависящей от  $r_F$ , и на линии скольжения  $DD_1$ , зависящей от  $r_B$ . В результате находим точку  $E$ , которая попадает на ось симметрии при условиях

$$r_E(r_B, r_F) = 0, \quad \varphi_E(r_B, r_F) + \pi/4 = 0 \quad (2.10)$$

Решение системы уравнений (2.10) определяет линии скольжения и поле напряжений в пластической области с жесткопластическими границами  $EG$  и  $EDCB$ .

Поле скоростей перемещений в пластической области определяется решением дифференциальных соотношений (1.5) и (1.6) с граничными условиями на жесткопластических границах и на границе скольжения  $AG$ . Так как пластическая область распространяется до оси симметрии, то скорости перемещений вдоль жесткопластических границ, совпадающих с линиями скольжения, непрерывны [7]. Из соотношений (1.10) и условия непрерывности скоростей перемещений на жесткопластических границах находим

$$V_\xi = V_\eta = 0 \quad \text{на } EDCB \quad (2.11)$$

$$V_\xi = -\sin\varphi, \quad V_\eta = -\cos\varphi \quad \text{на } EG \quad (2.12)$$

Вдоль контактной границы скольжения  $AG$  непрерывна нормальная к этой границе скорость перемещения  $V_z = -1$ . Из второго соотношения (1.9) находим

$$V_\eta \cos\varphi = -(1 + V_\xi \sin\varphi) \quad \text{на } AG \quad (2.13)$$

Поле скоростей перемещений в области  $EGD_1FBCDE$  определяется решением задачи Гурса для соотношений (1.5) и (1.6) с граничными условиями (2.11) и (2.12) на жесткопластических границах. Поле скоростей перемещений в области  $AGD_1$  определяется решением смешанной задачи для тех же дифференциальных соотношений от линии скольжения  $GD_1$  с граничным условием (2.13) на границе скольжения, и в области  $AD_1C_1F$  поле скоростей перемещений определяется решением задачи Гурса от линии скольжения  $AD_1$  и  $D_1C_1F$ .

**3. Численное решение.** Расчеты линий скольжения, полей напряжений и скоростей перемещений выполнены численным методом с использованием алгоритмов решения краевых задач Коши, Гурса и смешанного типа приведенных в [7]. В регулярных узлах сетки линий скольжения, не принадлежащих границам, координаты узлов и значения функций  $\sigma$  и  $\varphi$  вычисляли итерационным методом, приведенным в [7].

При решении задач смешанного типа вычисляем последовательность узловых точек на границе скольжения  $AG$ . На фиг. 2 показана регулярная точка 1 на  $\xi$  линии скольжения, в которой  $\sigma$  и  $\varphi$  известны, и точка  $P$  на границе  $AG$ , в которой  $\sigma$  и  $\varphi$  нужно найти. Обозначим нижним индексом 1 известные величины в точке 1 и запишем уравнение (1.2) для  $\xi$  линии скольжения и соотношение (1.3) в конечно-разностной форме между точками 1 и  $P$ .

При моделировании контактного трения по Прандтлю угол  $\varphi$  в точке  $P$  определяется из соотношения (2.2) при заданном  $\mu$ . В этом случае координаты точки  $P$  и  $\sigma$  находим по уравнениям

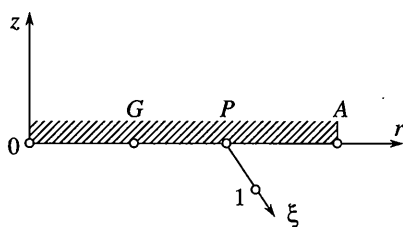
$$r = r_1 - z_1 \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}, \quad z = 0, \quad \tilde{\varphi} = 1/2(\varphi + \varphi_1) \quad (3.1)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \varphi - \varphi_1 - (r_1 - r + z_1)/(r + r_1) \quad (3.2)$$

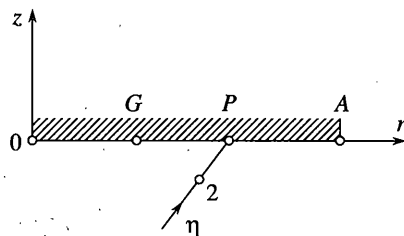
При моделировании контактного трения по Кулону при конечно-разностной аппроксимации соотношений (1.2) и (1.3) из граничного условия (2.3) получаем нелинейное уравнение для угла  $\varphi$  в точке  $P$ :

$$f[2(\varphi + \sigma_1 - \varphi_1 + \zeta(\varphi)) + \sin 2\varphi] - \cos 2\varphi = 0 \quad (3.3)$$

$$\zeta(\varphi) = \frac{z_1(1 + \operatorname{ctg} \tilde{\varphi})}{z_1 \operatorname{ctg} \tilde{\varphi} - 2r_1}, \quad \tilde{\varphi} = 1/2(\varphi + \varphi_1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнение (3.3) решаем методом Ньютона с точностью  $10^{-4}$  при начальном значении  $\varphi = \varphi_1$ . Затем по уравнениям (3.1) и (3.2) находим  $r$  и  $\sigma$  в точке  $P$ .

Применение стандартных численных процедур для решения функциональных уравнений (2.8) при максимальном контактном трении затруднено, так как соотношения (1.2)–(1.4) определены только при условии  $r > 0$ , и функциональная матрица системы (2.8) в окрестности оси симметрии оказывается плохо определенной. Решение уравнений (2.8) найдено путем вариации значений  $r_B$  во входных данных вычислительной программы и вычисления  $\psi$  из второго уравнения (2.8) методом Ньютона. В результате получены значения  $r_B = 1.8805$  и  $\psi = 2.0292$  при которых  $r_D = 4.502 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varphi_D + \pi/4 = 1.524 \cdot 10^{-4}$  и  $z_D = -0.5642$ . Из соотношений (2.4), (2.5), (1.7) и (1.8) находим  $\varphi_A = -1.2441$ ,  $\sigma_A = -2.5292$ ,  $\tau_{rz} = -0.3969$  и  $\sigma_z = -2.8331$  в точке  $A$ . Напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\sigma_z$  в точке  $A$  определяют максимальные значения коэффициентов трения по Прандтлю  $\mu^*$  и Кулону  $f^*$ , при которых отсутствует скольжение по границе штампа

$$\mu^* = 0.3969, \quad f^* = 0.1401 \quad (3.4)$$

При значениях коэффициентов трения удовлетворяющих неравенствам (2.9) линии скольжения и поле напряжений в пластической области определяются координатами  $r_B$  и  $r_F$  точек  $B$  и  $F$ , которые находятся из решения системы уравнений (2.10) с точностью  $\sim 10^{-4}$  методом вариации их значений во входных данных вычислительной программы.

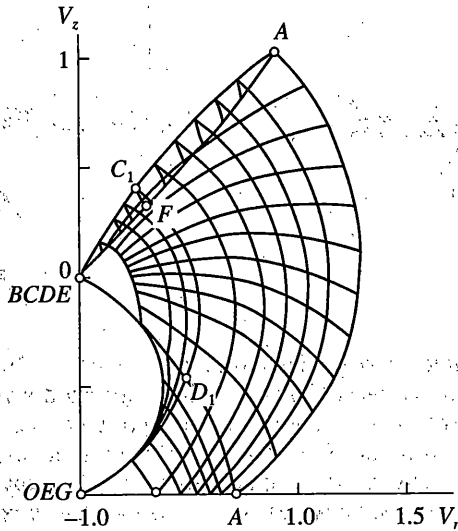
После вычисления линий скольжения находим поле скоростей перемещений в пластической области численным интегрированием соотношений (1.5) и (1.6), аппроксимируемых конечными разностями. В области  $BCDEGD_1C_1F$  граничные условия (2.11), (2.12) определяют поле скоростей из решения задачи Гурса в регулярных узлах сетки линий скольжения по конечно-разностным уравнениям, приведенным в [7].

Поле скоростей в области  $AGD_1$  находится из решения смешанной задачи по известным скоростям на линии скольжения  $GD_1$  и граничному условию (2.13) для последовательности узловых точек на границе скольжения  $AG$ . На фиг. 3 показана точка 2 на  $\eta$  линии скольжения и точка  $P$  на границе  $AG$ . Известные координаты, скорости и угол  $\varphi$  в точке 2 обозначим нижним индексом 2. В точке  $P$  координаты и угол  $\varphi$  также известны после вычисления поля линий скольжения. Скорости в точке  $P$  находим из конечно-разностной аппроксимации соотношения (1.6) и граничного условия (2.13):

$$V_\xi = \frac{(1 - \zeta_1)V_{\eta 2} - (\Delta\varphi + \zeta_2)V_{\xi 2} + (1 + \zeta_1)/\cos\varphi}{\Delta\varphi - (1 + \zeta_1)\operatorname{tg}\varphi + \zeta_2} \quad (3.5)$$

$$V_\eta = -(1 + V_\xi \sin\varphi)/\cos\varphi \quad (3.6)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_2), \quad \zeta_1 = \frac{1r - r_2}{2r + r_2}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{2} \frac{z_2}{r + r_2}$$



Фиг. 4

В области  $AD_1C_1F$  поле скоростей находим численным решением задачи Гурса в регулярных узлах сетки линий скольжения по конечноразностным уравнениям, приведенным в [7].

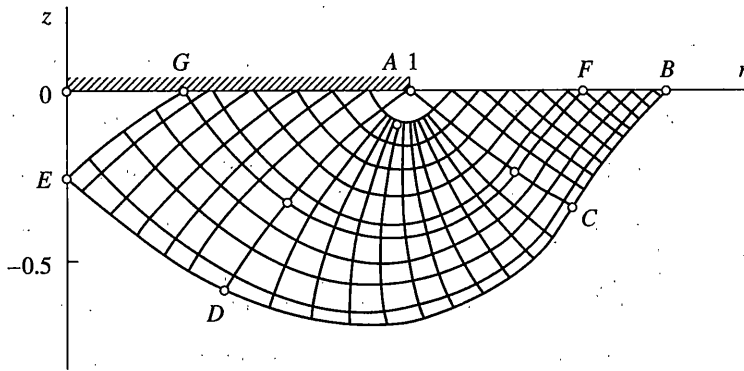
Среднее давление на штамп находим численным интегрированием распределения напряжений по границе штампа  $AG$  и по жесткопластической границе  $EG$ :

$$q = 2 \int_E^G r \left( \frac{1}{2} dz - \sigma dr \right) - \int_G^A \left( \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) r dr \quad (3.7)$$

**4. Численные результаты.** На фиг. 1 показан пример поля линий скольжения на плоскости  $\{r, z\}$ , а на фиг. 4 – поле скоростей перемещений  $V_r, V_z$  на плоскости годографа для штампа с коэффициентом контактного трения  $\mu = 0.2$  по Прандтлю. Вследствие скачкообразного изменения скорости от  $V_z = -1$  до 0 в точке  $E$  вдоль линий скольжения, ближайших к жесткопластическим границам  $B-E$  и  $EG$ , получаем почти разрывное изменение скорости, определяемое интегрированием соотношений (1.5) и (1.6). Вдоль  $\xi$  линий скольжения в окрестности точки  $G$  вследствие условия (2.13) также имеет место почти скачкообразное изменение скорости.

Пластическая область  $ABC$  отображается на плоскости годографа скоростей узким сегментом с уменьшением скорости  $V_3$  вдоль траектории главного напряжения  $\sigma_3$ , с которой совпадает прямолинейная граница  $AB$  при  $d\varphi = 0$  в неравенстве (1.12). Траектории напряжения  $\sigma_3$  в остальной части области  $ABC$  также почти прямолинейны с уменьшением скорости  $V_3$  от границы  $AC$  к границе  $BC$ . Неравенство (1.12) в области  $ABC$  выполняется и диссипативная функция положительна. В остальной части пластической области (фиг. 1) кривизна траекторий  $\sigma_3$  положительна,  $d\varphi > 0$ , проекция вектора скорости  $V_3$  и  $V_1$  положительны, скорость  $V_3$  уменьшается вдоль этих траекторий, как видно из фиг. 4, и неравенство (1.12) выполняется. Несущая способность жесткой области полупространства проверяется статически допустимым продолжением поля напряжений аналогично задаче для гладкого штампа [2, 7].

На фиг. 5 показан пример поля линий скольжения для штампа с контактным трением  $f = 0.06$  по Кулону. В этом случае контактные напряжения на границе скольже-



Фиг. 5

ния  $AG$  переменны, но близки к значению  $-0.2$ . Поэтому поля линий скольжения при моделировании контактного трения по Прандтлю (фиг. 1) и по Кулону (фиг. 5) различаются незначительно, и соответствующие им поля скоростей перемещений также близки между собой.

В табл. 1, 2 приведены значения среднего давления на штамп  $q$  и координат  $r_B$ ,  $r_G$  и  $z_E$  точек  $B$ ,  $G$  и  $E$ , определяющие размеры пластической области и центральной жесткой зоны под штампом для нескольких значений коэффициентов контактного трения  $\mu$  и  $f$  из интервала (2.9). Для  $\mu = 0$  и  $\mu = 0.3969$  давление на штамп и поля линий скольжения совпадают с результатами [1, 2] и [3] соответственно. Разработанная вычислительная программа дает детальную информацию по распределению напряжений и скоростей перемещений в пластической области, на границе скольжения штампа и на границе центральной жесткой области под штампом.

Таблица 1

$\mu$	0	0.1	0.2	0.3	0.397
$q$	2.840	2.929	2.989	3.019	3.026
$r_B$	1.544	1.656	1.763	1.846	1.880
$r_G$	0.000	0.095	0.378	0.710	1.000
$-z_E$	0.000	0.084	0.285	0.465	0.564

Таблица 2

$f$	0	0.04	0.06	0.08	0.1	0.14
$q$	2.840	2.937	2.971	2.996	3.013	3.026
$r_B$	1.544	1.682	1.747	1.802	1.844	1.880
$r_G$	0.000	0.167	0.343	0.533	0.716	1.000
$-z_E$	0.000	0.139	0.261	0.374	0.466	0.564



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметрическая задача теории пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
2. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
3. *Eason G., Shield R.T.* The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // *Z. Angew. Math. Phys.* 1960. V. 11. № 1. P. 33–43.
4. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю.* Полная пластичность в теории идеально-пластического тела // ДАН. 1999. Т. 368. № 3. С. 333–334.
5. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
6. *Томленов А.Д.* Теория пластического деформирования металлов. М.: Металлургия, 1972. 408 с.
7. *Друянов Б.А., Непершин Р.И.* Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию  
3.12.2003