**МЕХАНИКА**
**ТВЕРДОГО ТЕЛА**
**№ 5 • 2005**

УДК 539.214

**© 2005 г. Л.А. МАКСИМОВА**

# О СООТНОШЕНИЯХ ИЗОТРОПНОГО ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Рассматриваются соотношения теории изотропного идеально пластического тела. Условие пластичности формулируется в инвариантах тензора напряжений [1–3]. Используются условия изотропии, введенные в теорию изотропного идеально пластического тела А.Ю. Ишлинским [4]. Рассмотрены случаи гладких и кусочно-гладких условий текучести.

**1.** Напряженное состояние тела может быть определено значениями главных напряжений $\sigma_i$, причем

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{1.1}$$

Следуя [1], введем инвариантные характеристики напряженного состояния

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad T = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$
$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_n}{T} \tag{1.2}$$

Согласно (1.2), величина $T$ определяет максимальное касательное напряжение. Величины максимальных касательных напряжений по другим площадкам скольжения, ориентированных относительно главных направлений, можно обозначить аналогично

$$T_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \quad T_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2 \tag{1.3}$$

Из (1.2), (1.3) имеем

$$T - T_{12} - T_{23} = 0 \tag{1.4}$$

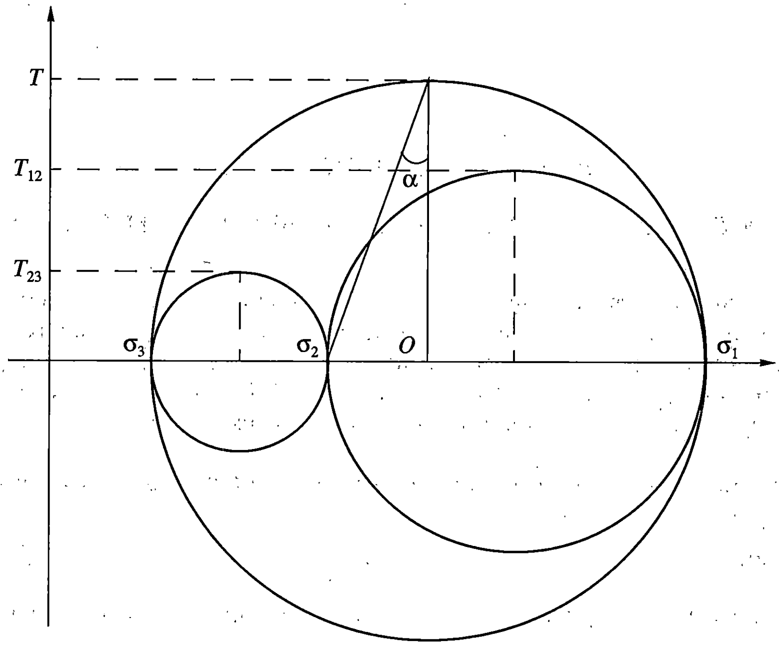
Напряженное состояние, определяемое зависимостями (1.2) наглядно иллюстрируется на диаграмме Мора (фигура). Из фигуры очевидно, что величина $\mu_\sigma$ может быть представлена в виде

$$\mu_\sigma = \operatorname{tg}\alpha, \quad -1 \leq \mu_\sigma \leq 1 \tag{1.5}$$

где угол $\alpha$ определяет взаимное расположение большого круга Мора, соответствующего главной площадке скольжения, и двух других малых кругов Мора, характеризующихся расположением $\sigma_2$.

Из (1.2) будем иметь

$$\sigma_1 = \sigma_n + T, \quad \sigma_2 = \sigma_n + \mu_\sigma T, \quad -1 \leq \mu_\sigma \leq 1$$
$$\sigma_3 = \sigma_n - T \tag{1.6}$$




Скорость диссипации механической работы при пластическом деформировании для изотропного тела имеет вид

$$D = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 \tag{1.7}$$

где $\varepsilon_i$ – главные скорости пластической деформации. Запишем выражение скорости диссипации (1.7) в инвариантах (1.6):

$$D = \sigma_n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + T(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \mu_\sigma T\varepsilon_2 \tag{1.8}$$

Предположим, что условие предельного состояния определено в виде

$$f(\sigma_n, T, \mu_\sigma) = 0 \tag{1.9}$$

Так как $\sigma_n$, $T$, $\mu_\sigma$ являются инвариантами напряженного состояния, то любое условие пластичности вида (1.9) определяет изотропное состояние материала.

Связь между напряженным и деформированным состоянием определим из условия максимума диссипации (1.7) при ограничении, накладываемом связью (1.9). Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} D &= \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 - \lambda f(\sigma_n, T, \mu_\sigma) = \\ &= \sigma_n(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + T(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \mu_\sigma T\varepsilon_2 - \lambda f(\sigma_n, T, \mu_\sigma) \end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\lambda$ – неопределенный множитель Лагранжа.

Условия экстремума функционала (1.10) будут

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_n}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} + \frac{\partial f}{\partial T} - \frac{1+\mu_\sigma}{T}\frac{\partial f}{\partial \mu_\sigma}\right] \\
\varepsilon_2 &= \frac{\lambda}{T}\frac{\partial f}{\partial \mu_\sigma} \\
\varepsilon_3 &= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} - \frac{\partial f}{\partial T} - \frac{1-\mu_\sigma}{T}\frac{\partial f}{\partial \mu_\sigma}\right]
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Если условие предельного состояния определено в виде пересечения двух функций:

$$
f_1(\sigma_n, T, \mu_\sigma) = 0, \quad f_2(\sigma_n, T, \mu_\sigma) = 0 \tag{1.12}
$$

то функционал, аналогичный (1.10), имеет вид

$$
D = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 \tag{1.13}
$$

где $\lambda_1, \lambda_2$ – неопределенные множители Лагранжа. Вполне аналогично (1.11) получим

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\lambda_i}{2}\left[\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_n} + \frac{\partial f_i}{\partial T} - \frac{1+\mu_\sigma}{T}\frac{\partial f_i}{\partial \mu_\sigma}\right] \\
\varepsilon_2 &= \frac{\lambda_i}{T}\frac{\partial f_i}{\partial \mu_\sigma} \\
\varepsilon_3 &= \frac{\lambda_i}{2}\left[\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_n} - \frac{\partial f_i}{\partial T} - \frac{1-\mu_\sigma}{T}\frac{\partial f_i}{\partial \mu_\sigma}\right]
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

где в (1.14) имеет место суммирование по индексу ($i$).

В случаях равенства двух главных напряжений имеет место

$$
\sigma_1 = \sigma_2, \quad \mu_\sigma = 1, \quad \alpha = \pi/4 \tag{1.15}
$$

$$
\sigma_2 = \sigma_3, \quad \mu_\sigma = -1, \quad \alpha = -\pi/4 \tag{1.16}
$$

**2.** Рассмотрим соотношения теории идеальной пластичности для статистически неопределимых состояний при $-1 < \mu_\sigma < 1$.

Определим выражения инвариантов тензора $\Sigma_i$ напряжений через величины $\sigma_n$, $T$, $\mu_\sigma$:

$$
\Sigma_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_n + \mu_\sigma T = 3\sigma \tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \\
&- \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2) = -(3\sigma_n^2 + 2\sigma_n\mu_\sigma T - T^2)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \\
&- \sigma_z\tau_{xy}^2 = (\sigma_n^2 - T^2)(\sigma_n + \mu_\sigma T)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Определим далее инварианты девиатора напряжений. Припишем компонентам девиатора штрих наверху. Согласно (1.6), (2.1) имеем

$$
\begin{aligned}
\sigma'_1 &= \sigma_1 - \sigma = (1 - 1/3\mu_\sigma)T \\
\sigma'_2 &= \sigma_2 - \sigma = 2/3\mu_\sigma T \\
\sigma'_3 &= \sigma_3 - \sigma = -(1 + 1/3\mu_\sigma)T
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Инварианты девиатора напряжений, согласно (2.4) примут вид

$$
\begin{aligned}
\Sigma'_1 &= 0 \\
\Sigma'_2 &= -(\sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_3\sigma'_1) = (1 + 1/3\mu_\sigma^2)T^2 \\
\Sigma'_3 &= \sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 = -2/3(1 - 1/9\mu_\sigma^2)\mu_\sigma T^3
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Из выражений (2.1)–(2.3) получим уравнение для определения величины $\sigma_n$ через инварианты тензора напряжений

$$
8\sigma_n^3 - 8\sigma_n^2\Sigma_1 + 2\sigma_n(\Sigma_1^2 - \Sigma_2) + \Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0 \tag{2.6}
$$

Из выражений (2.5) получим уравнение для определения величины $T$ через инварианты девиатора напряжений

$$
4(4T^2 - \Sigma'_2)^2(T^2 - \Sigma'_2) + 27(\Sigma'_3)^2 = 0 \tag{2.7}
$$

Из выражений (2.5) получим также уравнения для определения величины $\mu_\sigma$ через инварианты девиатора напряжений

$$
\begin{aligned}
&\mu_\sigma^6\left(\frac{4}{81}(\Sigma'_2)^3 - \frac{1}{3}(\Sigma'_3)^2\right) - \mu_\sigma^4\left(\frac{8}{9}(\Sigma'_2)^3 + 3(\Sigma'_3)^2\right) + \\
&+ \mu_\sigma^2(4(\Sigma'_2)^3 - 9(\Sigma'_3)^2) - 9(\Sigma'_3)^2 = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Имеют место уравнения равновесия

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Возможны два варианта построения общих соотношений теории изотропного идеально пластического тела.

Соотношения (1.2), (1.12), выраженные в инвариантах тензора напряжений (2.1)–(2.3), (2.5), могут быть использованы в качестве пластического потенциала и соотношения связи $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ могут быть определены из соотношений ассоциированного закона течения.

Второй путь построения соотношений теории изотропного идеально пластического тела предложен А.Ю. Ишлинским [4], использовавшим общие условия изотропии материала. Недостающие соотношения, замыкающие систему уравнений, характеризующие свойства конкретной среды, могут быть получены из соотношений ассоциированного закона течения для главных компонент напряжений и скоростей деформаций (1.11), (1.14).

Ниже используются идеи А.Ю. Ишлинского. Отметим, что при построении соотношений теории изотропных сред, согласно ассоциированному закону течения, условия изотропии содержатся в соотношениях связи $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ в неявном виде.

Для изотропного тела справедливы условия изотропии А.Ю. Ишлинского [4]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x\varepsilon_{xy} + \tau_{xy}\varepsilon_y + \tau_{xz}\varepsilon_{yz} &= \tau_{xy}\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_{xy} + \tau_{yz}\varepsilon_{xz} \\
\tau_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_y\varepsilon_{yz} + \tau_{yz}\varepsilon_z &= \tau_{xz}\varepsilon_{xy} + \tau_{yz}\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_{yz} \\
\tau_{xz}\varepsilon_x + \tau_{yz}\varepsilon_{xy} + \sigma_z\varepsilon_{xz} &= \sigma_x\varepsilon_{xz} + \tau_{xy}\varepsilon_{yz} + \tau_{xz}\varepsilon_z
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Сокращенная запись условий изотропии имеет вид

$$\sigma_{ik}\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{ik}\sigma_{kj} \tag{2.11}$$

Для определения девяти неизвестных: шести компонент напряжений $\sigma_{ij}$ и трех компонент скорости перемещения $u$, $v$, $w$ для изотропного тела всегда имеют место шесть соотношений: (2.9), (2.10). Три недостающие соотношения определяются, исходя из конкретных свойств материала.

*2.1*. Предположим, что условие пластичности определено в виде

$$f(T) = 0, \quad T = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = k, \quad k = \text{const} \tag{2.12}$$

Согласно (2.12), (2.7) условие пластичности (2.12) имеет вид

$$4(4k^2 - \Sigma_2')^2(k^2 - \Sigma_2') + 27(\Sigma_3')^2 = 0 \tag{2.13}$$

Условие пластичности (2.12) является условием пластичности Треска – Сен-Венана [5]. Леви [6] дал выражение (2.12) в инвариантах девиатора напряжений и в качестве соотношений связи между напряжениями и деформациями предложил использовать пропорциональность девиаторов напряжений и деформаций. Ниже используем соотношения связи (1.11), (1.11). Из соотношений (1.11), (2.12) следует

$$\varepsilon_1 = \lambda, \quad \varepsilon_3 = -\lambda, \quad \lambda \geq 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \tag{2.14}$$

Из (2.14) имеем условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \tag{2.15}$$

а также равенство нулю третьего инварианта тензора скорости деформации

$$\Gamma_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz} - \varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y\varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2 = 0 \tag{2.16}$$

Система девяти уравнений (2.9), (2.10), (2.12), (2.15), (2.16) является замкнутой.

*2.2*. Предположим, что условие пластичности определено в виде

$$f(\sigma_n) = 0, \quad \sigma_n = 1/2(\sigma_1 + \sigma_3) = C, \quad C = \text{const} \tag{2.17}$$

Согласно (2.17), (2.6) условие пластичности (2.17) имеет вид

$$8C^3 - 8C^2\Sigma_1 + 2C(\Sigma_1^2 - \Sigma_2) + \Sigma_1\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0 \tag{2.18}$$

Из соотношений (1.11), (2.17) следует

$$\varepsilon_1 = \lambda, \quad \varepsilon_3 = \lambda, \quad \lambda \geq 0, \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0 \tag{2.19}$$

Согласно (2.19) инварианты тензора скорости деформации будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2\varepsilon_1 \\ \Gamma_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 = \varepsilon_1^2 \\ \Gamma_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Из (2.20) следует

$$\Gamma_1^2 - 4\Gamma_2 = 0 \tag{2.21}$$

или

$$(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 - 4(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{xz}^2) = 0 \tag{2.22}$$

Система девяти уравнений (2.9), (2.10), (2.17), (2.22), (2.16) является замкнутой.

*2.3.* В качестве предельного условия рассмотрим

$$f(\mu_\sigma) = 0, \quad \mu_\sigma = M, \quad M = \text{const} \tag{2.23}$$

или

$$\sigma_1(1+M) - 2\sigma_2 + \sigma_3(1-M) = 0 \tag{2.24}$$

Согласно (2.23), (2.8) условие пластичности (2.23) имеет вид

$$\begin{aligned} &M^6\left(\frac{4}{81}(\Sigma_2')^3 - \frac{1}{3}(\Sigma_3')^2\right) - M^4\left(\frac{8}{9}(\Sigma_2')^3 + 3(\Sigma_3')^2\right) + \\ &+ M^2(4(\Sigma_2')^3 - 9(\Sigma_3')^2) - 9(\Sigma_3')^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Обычно при определении условия пластичности предполагается, что поверхность текучести не проходит через нуль; в данном случае плоскость, интерпретирующая предельное условие (2.24) в пространстве главных напряжений, проходит через начало координат. Из соотношений (2.24) следует

$$\varepsilon_1 = \lambda(1+M), \quad \varepsilon_2 = -2\lambda, \quad \varepsilon_3 = \lambda(1-M) \tag{2.26}$$

Из (2.26) получим

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \tag{2.27}$$

Согласно (2.26) имеем

$$\Gamma_2 = -M^2\lambda^2, \quad \Gamma_3 = -2\lambda^3(1-M^2) \tag{2.28}$$

$$4\Gamma_2^3(1-M^2)^2 + M^6\Gamma_3^2 = 0 \tag{2.29}$$

Система девяти уравнений (2.9), (2.10), (2.24), (2.28), (2.16) является замкнутой.

*2.4.* Предположим, что предельное условие определено в виде двух соотношений:

$$\begin{aligned} &f_1(T) = 0, \quad f_2(\mu_\sigma) = 0 \\ &T = k, \quad k = \text{const}, \quad \mu_\sigma = M, \quad M = \text{const} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Из соотношений (2.30), (2.5) следует

$$\Sigma_2' = \frac{k^2}{3}(3+M^2), \quad \Sigma_3' = -\frac{2}{27}k^3M(9-M^2) \tag{2.31}$$

Из (2.30) следует условие несжимаемости.

Система девяти уравнений (2.9), (2.10), (2.31), (2.15), является замкнутой.

2.5. Предположим, что предельное условие определено в виде двух соотношений:

$$\begin{gathered} f_1(\sigma_n) = 0, \quad f_2(\mu_\sigma) = 0 \\ \sigma_n = C, \quad C = \text{const}, \quad \mu_\sigma = M, \quad M = \text{const} \end{gathered} \tag{2.32}$$

Из соотношений (2.32), (2.1), (2.2), (2.3) следует

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 3C + MT, \\ \Sigma_2 &= -(3C^2 + T(2CM - T)) \\ \Sigma_3 &= (C^2 - T^2)(C + MT) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Из (2.33) имеем

$$T = (\Sigma_1 - 3C)/M \tag{2.34}$$

Из (2.34), (2.33) получим

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= -\left[3C^2 + \frac{\Sigma_1 - 3C}{M}\left(2CM - \frac{\Sigma_1 - 3C}{M}\right)\right] \\ \Sigma_3 &= \left[C^2 - \left(\frac{\Sigma_1 - 3C}{M}\right)^2\right](C + \Sigma_1 - 3C) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Тогда будем иметь

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + M\varepsilon_2 = 0 \tag{2.36}$$

Система девяти уравнений (2.9), (2.10), (2.35), (2.36) является замкнутой. Выражение (2.36) следует выразить через инварианты тензора скорости деформации.

**3.** Рассмотрим условие пластичности $\mu_\sigma = \pm 1$, (1.15), (1.16). Не ограничивая общности, остановимся на случае $\mu_\sigma = +1$, т.е.

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 0 \tag{3.1}$$

Соотношения связи между компонентами напряжений $\sigma_{ij}$ в декартовой системе координат $xyz$ и главными напряжениями $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \ (xyz) \\ \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \ (123) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $l_i$, $m_i$, $n_i$ – направляющие косинусы. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \ (123) \\ l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \ (lmn) \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

В случае условия (3.1), согласно (3.2), (3.3), (1.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_n + T(1-2n_1^2)\ (123) \\ \tau_{xy} &= -2Tn_1n_2\ (xyz) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{3.5}$$

Из уравнений равновесия (2.9) и соотношений (3.4) следует

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_n}{\partial x} + (1-2n_1^2)\frac{\partial T}{\partial x} - 2n_1n_2\frac{\partial T}{\partial y} - 2n_1n_3\frac{\partial T}{\partial z} - 4Tn_1\frac{\partial n_1}{\partial x} - \\ &-2Tn_2\frac{\partial n_1}{\partial y} - 2Tn_3\frac{\partial n_1}{\partial z} - 2Tn_1\frac{\partial n_2}{\partial y} - 2Tn_1\frac{\partial n_3}{\partial z} = 0\ (xyz)\ (123) \end{aligned} \tag{3.6}$$

К трем уравнениям (3.6) следует присоединить условие (3.5). Если величины $\sigma_n$, $T$ являются независимыми, то система четырех уравнений (3.6), (3.5) относительно пяти неизвестных $\sigma_n$, $T$, $n_1$, $n_2$, $n_3$ является незамкнутой, т.е. статически неопределимой.

Рассмотрим экстремальное значение диссипации (1.10) при условии (3.1):

$$D = \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 - \lambda(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{3.7}$$

Из (1.11), (3.7) получим

$$\varepsilon_1 = \lambda, \quad \varepsilon_2 = -\lambda, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0 \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует условие несжимаемости (2.15) и равенство нулю третьего инварианта тензора скорости деформации (2.16).

Для изотропного материала, используя известные соотношения для направляющих косинусов, можно получить

$$\begin{aligned} l_1\varepsilon_1 &= \varepsilon_x l_1 + \varepsilon_{xy} l_2 + \varepsilon_{xz} l_3 \\ l_2\varepsilon_1 &= \varepsilon_{xy} l_1 + \varepsilon_y l_2 + \varepsilon_{yz} l_3 \\ l_3\varepsilon_1 &= \varepsilon_{xz} l_1 + \varepsilon_{yz} l_2 + \varepsilon_z l_3 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} m_1\varepsilon_2 &= \varepsilon_x m_1 + \varepsilon_{xy} m_2 + \varepsilon_{xz} m_3 \\ m_2\varepsilon_2 &= \varepsilon_{xy} m_1 + \varepsilon_y m_2 + \varepsilon_{yz} m_3 \\ m_3\varepsilon_2 &= \varepsilon_{xz} m_1 + \varepsilon_{yz} m_2 + \varepsilon_z m_3 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} n_1\varepsilon_3 &= \varepsilon_x n_1 + \varepsilon_{xy} n_2 + \varepsilon_{xz} n_3 \\ n_2\varepsilon_3 &= \varepsilon_{xy} n_1 + \varepsilon_y n_2 + \varepsilon_{yz} n_3 \\ n_3\varepsilon_3 &= \varepsilon_{xz} n_1 + \varepsilon_{yz} n_2 + \varepsilon_z n_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует выражение

$$\varepsilon_x + \varepsilon_{xy}\frac{n_2}{n_1} + \varepsilon_{xz}\frac{n_3}{n_1} = \varepsilon_{xy}\frac{n_1}{n_2} + \varepsilon_y + \varepsilon_{yz}\frac{n_3}{n_2} = \varepsilon_{xz}\frac{n_1}{n_3} + \varepsilon_{yz}\frac{n_2}{n_3} + \varepsilon_z \tag{3.12}$$

Таким образом, при условии равенства двух главных напряжений (3.1), из трех условий изотропии (2.10), два являются независимыми. Для определения восьми неизвестных: $\sigma_n$, $T$, $n_1$, $n_2$, $n_3$, $u$, $v$, $w$ для изотропного тела имеют место восемь соотношений (3.6), (2.15), (2.16), (3.5), (3.12).

Случай статической определимости будет иметь место при наличии связи

$$\sigma_n = \sigma_n(T), \quad T = T(\sigma_n) \tag{3.13}$$

Предельное состояние (3.6) при условии пластичности

$$T = k, \quad k = \text{const} \tag{3.14}$$

исследовано в [7]. Рассмотрим случай, когда предельное условие имеет вид

$$\sigma_n = C, \quad C = \text{const} \tag{3.15}$$

Из (2.1), (3.15) следует

$$T = 3(\sigma - C) \tag{3.16}$$

Из (3.6), (3.15) получим

$$\begin{gathered}(1-2n_1^2)\frac{\partial T}{\partial x} - 2n_1n_2\frac{\partial T}{\partial y} - 2n_1n_3\frac{\partial T}{\partial z} - 4Tn_1\frac{\partial n_1}{\partial x} - \\ -2Tn_2\frac{\partial n_1}{\partial y} - 2Tn_3\frac{\partial n_1}{\partial z} - 2Tn_1\frac{\partial n_2}{\partial y} - 2Tn_1\frac{\partial n_3}{\partial z} = 0 \ (xyz)\ (123) \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1\end{gathered} \tag{3.17}$$

Система четырех уравнений (3.17), относительно четырех неизвестных $T, n_1, n_2, n_3$ является замкнутой.

Уравнение характеристической поверхности запишем в виде

$$\Psi(x, y, z) = 0, \quad \Psi_z = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \Psi_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{3.18}$$

Уравнение для определения характеристических многообразий системы уравнений (3.17), имеет вид

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{n} = 0 \quad \text{или} \quad \Psi_x n_1 + \Psi_y n_2 + \Psi_z n_3 = 0 \\ \boldsymbol{\Psi} = \Psi_x\mathbf{i} + \Psi_y\mathbf{j} + \Psi_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}\end{gathered} \tag{3.19}$$

Таким образом, согласно (3.2), (3.19), направление третьего главного напряжения $\sigma_3$ является характеристическим, траектории третьего главного напряжения $\sigma_3$ совпадают с характеристиками системы уравнений (3.17).

Аналогично могут быть рассмотрены другие возможные комбинации условий предельного состояния.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Христианович С.А., Шемякин Е.И.* К теории идеальной пластичности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 4. С. 86–97.
2. *Христианович С.А., Шемякин Е.И.* О плоской деформации пластического упрочняющегося материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 5. С. 138–149.
3. *Шемякин Е.И.* Анизотропия пластического состояния // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1973. Т. 4. № 4. С. 150–162.
4. *Ишлинский А.Ю.* Пространственное деформирование не вполне упругих и вязкопластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 3. С. 250–260.
5. *Сен-Венан А.* Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 11–19.
6. *Леви М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределом упругости // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 20–23.
7. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
13.04.2004