МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2005

УДК 539.214

© 2005 г. Б.Г. МИРОНОВ

О СТАТИСТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СООТНОШЕНИЯХ ОБЩЕЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Соотношения общей плоской задачи, включающие в себя как частные случаи соотношения плоской и антиплоской деформации, рассмотрены в работе [1] при условии полной пластичности. Предельное состояние идеально-пластического полупространства при вдавливании штампа с учетом сдвиговых усилий в условиях общей плоской задачи исследованы в [2, 3]. Соотношения общей плоской задачи при условии полной пластичности для неоднородных сред изучены в [4, 5].

В настоящей работе исследуются статически определимые соотношения общей плоской задачи теории идеальной пластичности в случаях, когда условие предельного состояния не совпадает с условием полной пластичности. Для рассматриваемых случаев показано, что статически определимые соотношения общей плоской задачи принадлежат к гиперболическому типу. Определены характеристики исследуемых соотношений.

1. Условия пластичности в случае статически определимой пространственной задачи может быть записано виде

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_3(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.1}$$

где σ_{ij} – соответственно компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат xyz.

Соотношения (1.1) можно представить в виде

$$\sigma_z = F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) \tag{1.2}$$

$$F_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) = 0, \quad F_2(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) = 0 \tag{1.3}$$

Воспользуемся заменой переменных

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma + \Sigma\cos 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - \Sigma\cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = \Sigma\sin 2\varphi \\ \tau_{yz} = T\sin\theta, \quad \tau_{xz} = T\cos\theta\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \Sigma = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \\ T = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \tau_{yz}/\tau_{xz}\end{gathered} \tag{1.5}$$

Согласно (1.4), из (1.2) и (1.3) имеем

$$\sigma_z = F(\sigma, \Sigma, \varphi, T, \theta) \tag{1.6}$$

$$F_1(\sigma, \Sigma, \varphi, T, \theta) = 0, \quad F_2(\sigma, \Sigma, \varphi, T, \theta) = 0 \tag{1.7}$$

С помощью формул Коши компоненты ε_{ij} тензора скоростей деформаций выразим через компоненты u, v, w скоростей перемещений

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\\
&2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Предположим, что как компоненты тензора напряжений, так и компоненты скоростей деформаций зависят только от переменных x и y, не зависят от координаты z:

$$\sigma = \sigma(x, y), \;\; \Sigma = \Sigma(x, y), \;\; \varphi = \varphi(x, y), \;\; T = T(x, y), \;\; \theta = \theta(x, y), \;\; \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y) \tag{1.9}$$

Мощность рассеяния механической энергии имеет вид

$$N = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + 2\tau_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\tau_{yz}\varepsilon_{yz} + 2\tau_{xz}\varepsilon_{xz} \tag{1.10}$$

Из условия экстремума функционала

$$A = N - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 - \lambda(F - \sigma_z) \tag{1.11}$$

получим соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \lambda_s\frac{\partial F_s}{\partial \sigma_x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = \lambda_s\frac{\partial F_s}{\partial \sigma_y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \lambda_s\frac{\partial F_s}{\partial \tau_{xy}} + \lambda\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}\\
&\varepsilon_z = -\lambda, \quad 2\varepsilon_{yz} = \lambda_s\frac{\partial F_s}{\partial \tau_{yz}} + \lambda\frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \lambda_s\frac{\partial F_s}{\partial \tau_{xz}} + \lambda\frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование.

Используя представления (1.4) и (1.5), из (1.13) имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}\varepsilon_z = \lambda_s\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_s}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}\frac{\partial F_s}{\partial \Sigma}\cos 2\varphi - \frac{1}{4\Sigma}\frac{\partial F_s}{\partial \varphi}\sin 2\varphi\right)\\
&\varepsilon_y + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}\varepsilon_z = \lambda_s\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_s}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_s}{\partial \Sigma}\cos 2\varphi + \frac{1}{4\Sigma}\frac{\partial F_s}{\partial \varphi}\sin 2\varphi\right)\\
&2\varepsilon_{xy} + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}\varepsilon_z = \lambda_s\left(\frac{\partial F_s}{\partial \Sigma}\sin 2\varphi + \frac{1}{2\Sigma}\frac{\partial F_s}{\partial \varphi}\cos 2\varphi\right)\\
&2\varepsilon_{yz} + \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}\varepsilon_z = \lambda_s\left(\frac{\partial F_s}{\partial T}\sin\theta + \frac{1}{T}\frac{\partial F_s}{\partial \theta}\cos\theta\right)\\
&2\varepsilon_{xz} + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}}\varepsilon_z = \lambda_s\left(\frac{\partial F_s}{\partial T}\cos\theta - \frac{1}{T}\frac{\partial F_s}{\partial \theta}\sin\theta\right)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
&A_{s\sigma} = \frac{\partial F_s}{\partial \sigma}, \quad A_{s\Sigma} = \frac{\partial F_s}{\partial \Sigma}, \quad A_{s\varphi} = \frac{\partial F_s}{\partial \varphi}, \quad A_s = \sqrt{4A_{s\Sigma}^2\Sigma^2 + A_{s\varphi}^2}\\
&\cos 2\alpha_s = \frac{A_{s\varphi}}{A_s}, \quad \sin 2\alpha_s = \frac{2A_{s\Sigma}\Sigma}{A_s}, \quad \sin 2\beta_s = \frac{2A_{s\sigma}\Sigma}{A_s}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$B_{sT} = \frac{\partial F_s}{\partial T}, \quad B_{s\theta} = \frac{\partial F_s}{\partial \theta}, \quad B_s = \sqrt{B_{sT}^2 T^2 + B_{s\theta}^2}$$
$$\cos\gamma_s = B_{s\theta}/B_s, \quad \sin\gamma_s = B_{sT}T/B_s \tag{1.15}$$

Тогда, согласно (1.15) и (1.16), из (1.14) получим

$$\varepsilon_x + A_x\varepsilon_z = -\frac{\lambda_s A_s}{2\Sigma}\sin(\varphi - \alpha_s - \beta_s)\cos(\varphi - \alpha_s + \beta_s)$$
$$\varepsilon_y + A_y\varepsilon_z = \frac{\lambda_s A_s}{2\Sigma}\cos(\varphi - \alpha_s - \beta_s)\sin(\varphi - \alpha_s + \beta_s) \tag{1.16}$$
$$2\varepsilon_{xy} + A_{xy}\varepsilon_z = \frac{\lambda_s A_s}{2\Sigma}\cos 2(\varphi - \alpha_s)$$

$$2\varepsilon_{yz} + B_{yz}\varepsilon_z = \frac{\lambda_s B_s}{T}\cos(\theta - \gamma_s), \quad 2\varepsilon_{xz} + B_{xz}\varepsilon_z = -\frac{\lambda_s B_s}{T}\sin(\theta - \gamma_s)$$
$$A_x = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \quad A_y = \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \quad A_{xy} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \quad B_{yz} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \quad B_{xz} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \tag{1.17}$$

Согласно (1.9), уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{1.18}$$

Подставив выражения (1.4) в уравнения равновесия (1.18), получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma}{\partial x}\cos 2\varphi - 2\Sigma\sin 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma}{\partial y}\sin 2\varphi + 2\Sigma\cos 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \Sigma}{\partial x}\cos 2\varphi + 2\Sigma\cos 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma}{\partial y}\cos 2\varphi + 2\Sigma\sin 2\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \tag{1.19}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x}\cos\theta - T\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\sin\theta + T\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$$

К уравнениям равновесия (1.19) присоединим два соотношения, которые получаются путем дифференцирования из соотношений (1.3):

$$A_{s\sigma}d\sigma + A_{s\Sigma}d\Sigma + A_{s\varphi}d\varphi + B_{sT}dT + B_{s\theta}d\theta = 0 \tag{1.20}$$

2. Рассмотрим случай, когда условия пластичности (1.7) имеют вид

$$F_1(\sigma, \Sigma, \varphi) = 0, \quad F_2(\sigma, \Sigma, \varphi, T, \theta) = 0 \tag{2.1}$$

Согласно (1.15), из (2.1) получим

$$B_{1T} = B_{1\theta} = 0 \tag{2.2}$$

Уравнения характеристик системы уравнений (1.19) и (1.20) с учетом (2.2) выглядят следующим образом:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha_1 - \beta_1), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -\operatorname{ctg}(\varphi - \alpha_1 + \beta_1), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_3 = \operatorname{tg}(\theta - \gamma_2) \tag{2.3}$$

Согласно (2.2), характеристики системы уравнений (1.16) и (1.17) также имеют вид (2.3).

Аналогичные характеристики имеют системы уравнений (1.19), (1.20) и (1.16), (1.17), если условия пластичности (1.7) имеют вид

$$F_1(\sigma, \Sigma, \varphi, T, \theta) = 0, \quad F_2(T, \theta) = 0 \tag{2.4}$$

3. Рассмотрим случай, когда условия пластичности (1.7) имеют вид

$$F_1(\varphi, T, \theta) = 0, \quad F_2(\varphi, T, \theta) = 0 \tag{3.1}$$

Согласно (1.15), из (3.1) получим

$$A_{1\sigma} = A_{1\Sigma} = A_{2\sigma} = A_{2\Sigma} = 0 \tag{3.2}$$

Уравнения характеристик системы уравнений (1.19) и (1.20) с учетом (3.2) выглядят следующим образом

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}\varphi, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -\operatorname{ctg}\varphi, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_3 = \operatorname{tg}(\theta - \eta_1) \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}\sin\eta_1 = \frac{T(A_{1\varphi}B_{2T} - A_{2\varphi}B_{1T})}{A_{12}}, \quad \cos\eta_1 = \frac{A_{1\varphi}B_{2\theta} - A_{2\varphi}B_{1\theta}}{A_{12}} \\ A_{12} = \sqrt{T^2(A_{1\varphi}B_{2T} - A_{2\varphi}B_{1T})^2 + (A_{1\varphi}B_{2\theta} - A_{2\varphi}B_{1\theta})^2}\end{gathered} \tag{3.4}$$

Согласно (3.2), характеристики системы уравнений (1.16) и (1.17) также имеют вид (3.3).

4. Рассмотрим случай, когда условия пластичности (1.7) имеют вид

$$F_1(\Sigma, T, \theta) = 0, \quad F_2(\Sigma, T, \theta) = 0 \tag{4.1}$$

Согласно (1.15), из (4.1) получим

$$A_{1\sigma} = A_{1\varphi} = A_{2\sigma} = A_{2\varphi} = 0 \tag{4.2}$$

Уравнения характеристик системы уравнений (1.19) и (1.20) с учетом (4.2) выглядят следующим образом:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_3 = \operatorname{tg}(\theta - \eta_2) \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\sin\eta_2 = \frac{T(A_{1\Sigma}B_{2T} - A_{2\Sigma}B_{1T})}{A_{13}}, \quad \cos\eta_2 = \frac{A_{1\Sigma}B_{2\theta} - A_{2\Sigma}B_{1\theta}}{A_{13}} \\ A_{13} = \sqrt{T^2(A_{1\Sigma}B_{2T} - A_{2\Sigma}B_{1T})^2 + (A_{1\Sigma}B_{2\theta} - A_{2\Sigma}B_{1\theta})^2}\end{gathered} \tag{4.4}$$

Согласно (4.2), характеристики системы уравнений (1.16) и (1.17) также имеют вид (4.3).

5. Рассмотрим случай, когда условия пластичности (1.7) имеют вид

$$F_1(\sigma, T, \theta) = 0, \quad F_2(\sigma, T, \theta) = 0 \tag{5.1}$$

Согласно (1.15), из (5.1) получим

$$A_{1\varphi} = A_{1\Sigma} = A_{2\varphi} = A_{2\Sigma} = 0 \tag{5.2}$$

Уравнения характеристик системы уравнений (1.19) и (1.20) с учетом (5.2) выглядят следующим образом

$$dy^2 + dx^2 = 0, \quad (dy/dx)_3 = \operatorname{tg}(\theta - \eta_3) \tag{5.3}$$

$$\sin\eta_3 = \frac{T(A_{1\sigma}B_{2T} - A_{2\sigma}B_{1T})}{A_{23}}, \quad \cos\eta_1 = \frac{A_{1\sigma}B_{2\theta} - A_{2\sigma}B_{1\theta}}{A_{23}}$$
$$A_{23} = \sqrt{T^2(A_{1\sigma}B_{2T} - A_{2\sigma}B_{1T})^2 + (A_{1\sigma}B_{2\theta} - A_{2\sigma}B_{1\theta})^2} \tag{5.4}$$

Согласно (5.2), характеристики системы уравнений (1.16) и (1.17) также имеют вид (5.3).

Из (5.3) следует, что системы уравнений (1.19), (1.20) и (1.16), (1.17) имеют только одну вещественную характеристику.

6. Рассмотрим случай, когда условия пластичности (1.7) имеют вид

$$F_1(\sigma, \Sigma, \varphi, T, \theta) = \varphi - \theta = 0, \quad F_2(\sigma, \Sigma, \varphi, T) = 0 \tag{6.1}$$

Согласно (1.15), из (6.1) получим

$$A_{1\sigma} = A_{1\Sigma} = B_{1T} = B_{2\theta} = 0, \quad A_{1\varphi} = -B_{1\theta} = 1 \tag{6.2}$$

В частности, если

$$F_2(\sigma, \Sigma, \varphi, T) = 4\Sigma^2 - 2k\Sigma + T^2 \tag{6.3}$$

где $k = \text{const}$, условия (6.1) совпадают с условием полной пластичности.

Уравнения характеристик системы уравнений (1.19) и (1.20) с учетом (6.2) выглядят следующим образом:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}\varphi, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha - \beta), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_3 = -\operatorname{ctg}(\varphi - \alpha + \beta) \tag{6.4}$$

$$A = \sqrt{(A_{2\Sigma}\Sigma + B_{2T}T)^2 + A_{2\varphi}^2}$$
$$\sin 2\alpha = \frac{A_{2\Sigma}\Sigma + B_{2T}T}{A}, \quad \cos 2\alpha = \frac{A_{2\varphi}}{A}, \quad \sin 2\beta = \frac{A_{2\sigma}\Sigma + B_{2T}T}{A} \tag{6.5}$$

Согласно (6.2), характеристики системы уравнений (1.16) и (1.17) также имеют вид (6.4).

С учетом (6.3) уравнения (6.4) характеристик систем (1.19), (1.20) и (1.16), (1.17) принимают вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}\varphi, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4} - \beta\right), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_3 = \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4} + \beta\right) \tag{6.6}$$

Во всех рассмотренных выше случаях системы уравнений, описывающие напряженное и деформированное состояния, принадлежат к гиперболическому типу, кроме рассмотренного в п. 5 случая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д., Максимова Л.А.* О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 1. С. 39–41.
2. *Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И.* О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 2. С. 169–199.
3. *Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И.* Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 6. С. 758–763.
4. *Горский А.В., Горский П.В.* О расчете напряжений в неоднородном идеально пластическом теле // Изв. ТулГУ. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10. Вып. 2. С. 52–69.
5. *Горский П.В.* О вдавливании кругового штампа в неоднородное жестко пластическое полупространство // Известия ТулГУ. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10. Вып. 3. С. 62–75.

Чебоксары

Поступила в редакцию 1.06.2005