МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2005

УДК 539.214

© 2005 г. Д.Д. ИВЛЕВ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ СЖИМАЕМЫХ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

Рассматриваются свойства статически определимых соотношений сжимаемых идеально пластических сред.

1. Рассмотрим функционал

$$D = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - (\varepsilon_x N_1^2 + \varepsilon_y N_2^2 + \varepsilon_z N_3^2 + 2\varepsilon_{xy}N_1N_2 + 2\varepsilon_{yz}N_2N_3 + 2\varepsilon_{xz}N_1N_3) - \\ - \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\lambda F(\nu, N_1, N_2, N_3) - \mu_k f_k(\sigma_{ij}) \tag{1.1}$$

где σ_{ij} – компоненты напряжения; ε_{ij} – компоненты скорости деформации; N_i – составляющие вектора, определяющего некоторое направление в точках пространства xyz; λ, μ – неопределенные множители.

Из экстремума функционала (1.1):

$$\partial D/\partial\varepsilon_{ij} = 0 \tag{1.2}$$

получим соотношения, определяющие напряженное состояние, соответствующее условию полной пластичности [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \nu + N_1^2, \quad \tau_{xy} = N_1N_2 \\ \sigma_y &= \nu + N_2^2, \quad \tau_{yz} = N_2N_3 \\ \sigma_z &= \nu + N_3^2, \quad \tau_{xz} = N_1N_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Из экстремума функционала (1.1):

$$\partial D/\partial\lambda = 0 \tag{1.4}$$

получим

$$F(\nu, N_1, N_2, N_3) = 0 \tag{1.5}$$

Из экстремума функционала (1.1):

$$\partial D/\partial N_i = 0 \tag{1.6}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x N_1 + \varepsilon_{xy}N_2 + \varepsilon_{xz}N_3 &= \lambda a \\ \varepsilon_{xy}N_1 + \varepsilon_y N_2 + \varepsilon_{yz}N_3 &= \lambda b \\ \varepsilon_{xz}N_1 + \varepsilon_{xz}N_2 + \varepsilon_z N_3 &= \lambda c \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$a = \frac{\partial F}{\partial N_1}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial N_2}, \quad c = \frac{\partial F}{\partial N_3}$$

Из экстремума функционала (1.1):

$$\partial D/\partial \nu = 0 \tag{1.8}$$

найдем

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2\lambda \frac{\partial F}{\partial \nu} \tag{1.9}$$

Из экстремума функционала (1.1):

$$\partial D/\partial \sigma_{ij} = 0 \tag{1.10}$$

получим

$$\varepsilon_{ij} = \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}} \tag{1.11}$$

Из экстремума функционала (1.1):

$$\partial D/\partial \mu_k = 0 \tag{1.12}$$

будем иметь

$$f_k(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1.13}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{ij,\,j} = 0 \tag{1.14}$$

Выражения (1.11), (1.13) определяют условие пластичности и соотношения ассоциированного закона течения.

Выражения (1.3), (1.5) вместе с уравнениями равновесия (1.14) определяют замкнутую статически определимую систему уравнений.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \nu}{\partial x} + 2N_1\frac{\partial N_1}{\partial x} + N_2\frac{\partial N_1}{\partial y} + N_1\frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3\frac{\partial N_1}{\partial z} + N_1\frac{\partial N_3}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial \nu}{\partial y} + N_2\frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1\frac{\partial N_2}{\partial x} + 2N_2\frac{\partial N_2}{\partial y} + N_3\frac{\partial N_2}{\partial z} + N_2\frac{\partial N_3}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial \nu}{\partial z} + N_3\frac{\partial N_1}{\partial x} + N_1\frac{\partial N_3}{\partial x} + N_3\frac{\partial N_2}{\partial y} + N_2\frac{\partial N_3}{\partial y} + 2N_3\frac{\partial N_3}{\partial z} = 0
\end{gathered} \tag{1.15}$$

$$B d\nu + a dN_1 + b dN_2 + c dN_3 = 0 \tag{1.16}$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial \nu}, \quad a = \frac{\partial F}{\partial N_1}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial N_2}, \quad c = \frac{\partial F}{\partial N_3}$$

Обозначим через $\psi(x, y, z) = 0$ уравнение характеристической поверхности. Характеристический определитель системы уравнений (1.15), (1.16) имеет вид

$$\Phi[2\Phi(\bar{\Phi} - B\Phi) - \nabla\Delta] = 0 \tag{1.17}$$

$$\Phi = \psi_x N_1 + \psi_y N_2 + \psi_z N_3$$

$$\bar{\Phi} = \psi_x a + \psi_y b + \psi_z c, \quad \nabla = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2, \quad \Delta = aN_1 + bN_2 + cN_3$$

$$\psi_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \psi_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Введем вектора

$$\mathbf{\Psi} = \psi_x\mathbf{i} + \psi_y\mathbf{j} + \psi_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{N} = N_1\mathbf{i} + N_2\mathbf{j} + N_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{A} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \tag{1.18}$$

где **i**, **j**, **k** – единичные орты вдоль осей x, y, z.

Согласно (1.17), (1.18) имеем

$$\Phi = |\mathbf{\Psi}||\mathbf{N}|\cos\theta_1, \quad \Phi = |\mathbf{\Psi}||\mathbf{A}|\cos\theta_2, \quad \Delta = |\mathbf{A}||\mathbf{N}|\cos\alpha, \quad \nabla = |\mathbf{\Psi}|^2 \tag{1.19}$$

Из (1.16), (1.18) найдем

$$2\cos\theta_1\left(\cos\theta_2 - \frac{B|\mathbf{N}|}{|\mathbf{A}|}\cos\theta_1\right) - \cos\alpha = 0 \tag{1.20}$$

Согласно (1.19) имеет место ограничение

$$\left|2\cos\theta_1\left(\cos\theta_2 - \frac{B|\mathbf{N}|}{|\mathbf{A}|}\cos\theta_1\right)\right| \le 1 \tag{1.21}$$

Выражения (1.7), (1.9) определяют соотношение ассоциированного закона течения, соответствующие напряженному состоянию, определяемого уравнениями (1.15), (1.16).

Исключая из (1.7), (1.9) величину λ получим систему трех уравнений:

$$\begin{gathered} b(\varepsilon_x N_1 + \varepsilon_{xy}N_2 + \varepsilon_{xz}N_3) - a(\varepsilon_{xy}N_1 + \varepsilon_y N_2 + \varepsilon_{yz}N_3) = 0 \\ c(\varepsilon_x N_1 + \varepsilon_{xy}N_2 + \varepsilon_{xz}N_3) - a(\varepsilon_{xz}N_1 + \varepsilon_{xz}N_2 + \varepsilon_z N_3) = 0 \\ B(\varepsilon_x N_1 + \varepsilon_{xy}N_2 + \varepsilon_{xz}N_3) - a(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0, \quad B = \partial F/\partial \nu \end{gathered} \tag{1.22}$$

В системе уравнений (1.22) можно перейти к компонентам скорости перемещений u, ν, ω по формулам Коши: $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$, $\varepsilon_{yz} = 1/2(\partial\nu/\partial z + \partial\omega/\partial y)$, …

В результате имеет место замкнутая система трех уравнений относительно трех неизвестных u, ν, ω, выражение которой опустим. Система уравнений (1.9), (1.22) принадлежит к гиперболическому типу, уравнение для определения характеристических поверхностей для поля скоростей перемещений совпадает с уравнением (1.17) для поля напряжений.

2. Рассмотрим случай зависимости предела текучести на сдвиг k от среднего напряжения

$$k = k(\sigma) \tag{2.1}$$

Соотношения (1.3) при условии (2.1) запишем в виде [1]:

$$\begin{gathered} \sigma_x = \nu + 2k(\sigma)n_1^2, \quad \tau_{xy} = 2k(\sigma)n_1n_2 \\ \sigma_y = \nu + 2k(\sigma)n_2^2, \quad \tau_{xy} = 2k(\sigma)n_2n_3 \\ \sigma_z = \nu + 2k(\sigma)n_3^2, \quad \tau_{xy} = 2k(\sigma)n_1n_3 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Согласно (1.3), (2.2) будем иметь

$$N_1^2 = 2k(\sigma)n_1^2, \quad N_2^2 = 2k(\sigma)n_2^2, \quad N_3^2 = 2k(\sigma)n_3^2$$
$$N_1N_2 = 2k(\sigma)n_1n_2, \quad N_2N_3 = 2k(\sigma)n_2n_3, \quad N_1N_3 = 2k(\sigma)n_1n_3 \tag{2.3}$$

Соотношение (1.16), согласно (2.2), (2.3) примет вид

$$Bd\nu + N_1dN_1 + N_2dN_2 + N_3dN_3 = 0$$
$$B = -\frac{1}{(1-2/3dk/d\sigma)}\frac{dk}{d\sigma} \tag{2.4}$$

Характеристический определитель (1.17) будет иметь вид

$$\Phi[2\Phi^2(1-B) - (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)] = 0 \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-B}} \tag{2.6}$$

где угол θ – угол между направлениями **n** и $\boldsymbol{\psi}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 230 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.05.2005