

УДК 539.374+376

© 2005 г. И.В. ЛЮБАШЕВСКАЯ, О.В. СОСНИН

## **ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ В ОЦЕНКЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

Экспериментально показано, что по величинам внешних обобщенных сил  $Q_i$ , действующих на стержневой элемент конструкции в условиях высокотемпературной ползучести, путем приведения сил к эквивалентной величине  $Q_*$  можно оценить интенсивность ползучести и сравнить поведение стержней без рассмотрения полей внутренних напряжений.

Понятия “обобщенные силы”, “обобщенные перемещения и скорости” используются как в классической механике, так и в механике деформируемого твердого тела. Особенно широкое применение эти подходы получили в строительной механике стержневых конструкций [1], а в последнее время и применительно к оценкам напряженно-деформированного состояния (НДС) более сложных конструкций как в упругопластической, так и в вязкоупругой постановках [2–3]. При этом чаще рассматриваются внутренние обобщенные силы и соответствующие им перемещения и скорости как интегральные характеристики внутренних усилий, деформаций и их скоростей. В [1] применительно к жестко пластическим стержневым системам в довольно общей постановке рассматривается использование внешних обобщенных сил  $Q_i$  и соответствующих им внешних обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , условие текучести и поверхность текучести как функции от внешних обобщенных сил с ассоциированным законом течения, задающим направление вектора обобщенной скорости с компонентами  $\dot{q}_i$ . В [2] аналогичные рассуждения приведены применительно к режимам установившейся ползучести. Показана возможность использования мощности диссипации в виде зависимости от внешних обобщенных сил  $Q_i$  или внешних обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$ , построение соответствующих поверхностей постоянной мощности диссипации и величины эквивалентной внешней обобщенной силы  $Q_* = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ . При этом подчеркивается, что “... подбор подходящего аналитического выражения для функции  $f(Q_i)$  уже при  $m = 2$  представляет собой мало благодарную задачу, а при  $m = 3$  и более совершенно безнадежен” ([2] стр. 415). Но развитие и использование этих подходов позволяет оценивать ползучесть и длительную прочность элементов конструкций только по эквивалентным величинам  $Q_*$  внешних обобщенных сил без привлечения величин, характеризующих внутреннее НДС. Ниже приводятся некоторые экспериментальные результаты в пользу высказанных положений.

Рассмотрим один из простейших и довольно часто встречающихся случаев, когда система внешних сил сводится к комбинации силы  $P$ , растягивающей или сжимающей элемент конструкции, и моменту  $M$ , (пара сил), закручивающему этот элемент. Пусть материал элемента изотропный, его деформационно-прочностное поведение подчиняется критерию Мизеса, т.е. применительно к плоскому НДС эквивалентная величина напряжения  $\sigma_*$  связана с нормальной  $\sigma$  и касательной  $\tau$  составляющими зависимостью

$$\sigma_* = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (1)$$

Под действием внешних сил величина рассеянной энергии необратимого деформирования элемента конструкции примет вид

$$dA = Pdl + M_i d\varphi \quad (2)$$

Считая элемент стержнем сечения  $S_0$  и длиной  $l_0$  и разделив на объем  $V = S_0 l_0 = Sl$  (с учетом несжимаемости материала), получим среднюю по объему удельную величину рассеянной энергии

$$dA_0 = (P/S)(dl/l) + (M_i/(S L))(L d\varphi/l) = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 \quad (3)$$

Выражения в скобках – внешние обобщенные силы  $Q_i$  и соответствующие им обобщенные перемещения  $dq_i$ ;  $L$  – некоторый характерный размер, отражающий геометрию стержневого элемента.

Величина средней удельной мощности рассеяния

$$W_0 = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2 \quad (4)$$

Учитывая, что обобщенные скорости  $\dot{q}_i$  есть функции от обобщенных сил, выражение (4) можно записать в виде

$$W_0 = \Phi_1(Q_1, Q_2) \quad (5)$$

и дальнейшие рассуждения провести в пространстве обобщенных сил, в данном случае на плоскости сил в координатах  $Q_1, Q_2$ . Для каждой комбинации этих сил, обеспечивающих постоянство  $W_0$  по (5), существует вектор эквивалентной величины  $Q_* = f(Q_1, Q_2)$ , конец которого опишет кривую постоянной средней мощности рассеяния. Форма этой кривой будет зависеть и от геометрических особенностей профиля стержня, и от эквивалентного соотношения между обобщенными силами  $Q_i$  разной природы.

Одним из подходов для определения зависимости  $Q_* = f(Q_1, Q_2)$ , а, следовательно, и зависимости  $W_0 = \Phi(Q_*)$  можно принять аналогию в определении величины эквивалентного напряжения  $\sigma_*$  через компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$ , например, по критерию Мизеса (1). Выразив  $\sigma$  через  $Q_1$ ;  $\tau$  – через  $Q_2$  и заменив формально  $\sigma_*$  на  $Q_*$ , из (1) получим

$$Q_* = \sqrt{(\lambda_1 Q_1)^2 + (\lambda_2 Q_2)^2} \quad (6)$$

Здесь “весовые коэффициенты”  $\lambda_i$  будут отражать перечисленные выше особенности геометрии стержня, эквивалентность между обобщенными силами  $Q_1$  и  $Q_2$ , характер предполагаемого распределения внутренних напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ , которые “интегрально в среднем” будут выражаться через  $Q_i$ . Эксперименты на некоторых типовых элементах конструкций с неоднородным НДС при высоких температурах (температуры порядка  $0.5T_m$  и выше, где  $T_m$  – температура плавления материала) показали, что достаточно удовлетворительное описание процесса деформирования можно получить заменой неоднородного НДС однородным по условию “предельного состояния ползучести” [4]. В дальнейшем этот экспериментальный факт использован.

Рассмотрим крайние случаи, когда одна из  $Q_i$  равна нулю. Пусть стержень нагружен только осевой силой  $P$ . Из (3)

$$dA_0 = (P/S)(dl/l) = \sigma d(\ln(l/l_0)) = Q_1 dq_1, \quad \text{т.е. } \lambda_1 = 1, \quad Q_* = \sigma \quad (7)$$

Круглый стержень внешним радиусом  $R$  и внутренним  $r_0 = kR$  ( $0 \leq k < 1$ ), длиной  $l$  нагружен крутящим моментом  $M_i$ . Приняв за характерный размер  $L = R$ , из (3) при  $\tau = \text{const}$  получим

$$dA_0 = \frac{M_i}{\pi R^3(1-k^2)} \frac{Rd\varphi}{l}, \quad M_i = \int_s \tau r dS = \frac{2}{3} \pi R^3(1-k^3)\tau \quad (8)$$

Выразив  $\tau$  через  $M_r$ , подставив в (1) и сопоставив с (6), имеем

$$Q_* = \sqrt{\left[ \frac{3\sqrt{3}(1-k^2)}{2(1-k^3)} \right]^2} Q_2^2, \quad \text{т.е.} \quad \lambda_2 = \frac{3\sqrt{3}(1-k^2)}{2(1-k^3)}, \quad Q_2 = \frac{M_r}{SL}. \quad (9)$$

В частности, для тонкостенной трубки – стандартный эксперимент по определению сдвиговых характеристик, в пределе при  $k \rightarrow 1$  с учетом (8) получим  $\lambda_2 = \sqrt{3}$ ,  $Q_2 = \tau$ , т.е., как и в (7),  $Q_* = \sqrt{3} \tau$ ,  $dq = Rd\phi/l$  и при малых деформациях  $dq = d\gamma$ .

Для комбинированного НДС – растяжение с кручением – в соответствии с (6) получим

$$Q_* = \sqrt{Q_1^2 + \left[ \frac{3\sqrt{3}(1-k^2)}{2(1-k^3)} \right]^2} Q_2^2, \quad W_0 = \Phi(Q_*) \quad (10)$$

Выражение для обобщенных скоростей примет вид

$$\dot{q}_i = K \partial \Phi / \partial Q_i, \quad K = K(Q_*) \quad (11)$$

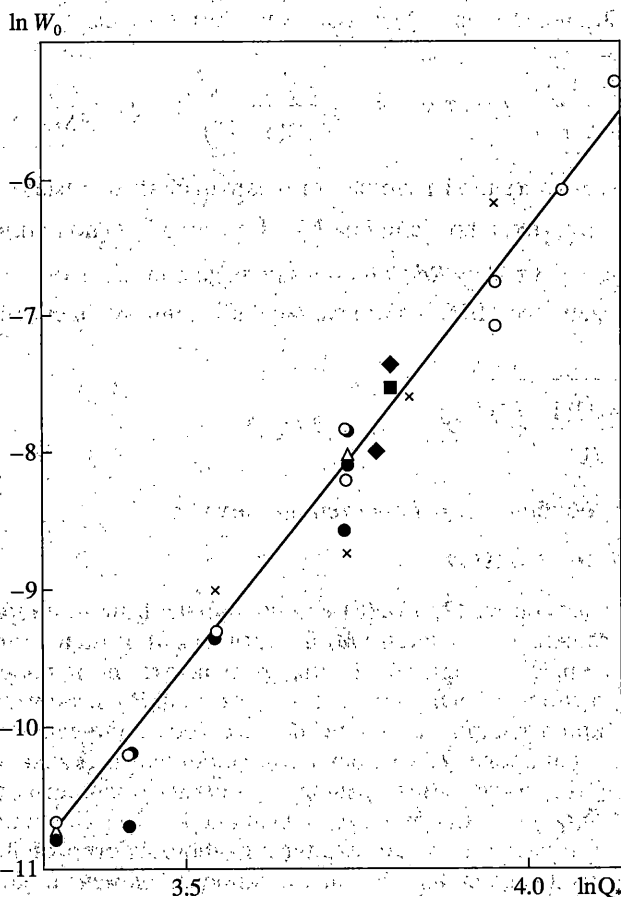
Аналогично зависимостям (2), (3), (6) можно получить выражения  $Q_i$  и  $Q_*$  для случая нагружения стержня изгибающим  $M_b$  и крутящим  $M_r$  моментами.

Приведем некоторые экспериментальные результаты по проверке высказанных выше положений и соответствующих им зависимостей. В соответствии с (10) стержневые элементы конструкции, имеющие разные геометрические формы и нагруженные разными по природе  $Q_i$ , но с равными величинами эквивалентных внешних обобщенных сил  $Q_*$ , должны иметь равные величины мощности рассеяния  $W_0$ , т.е. зависимость  $W_0 = \Phi(Q_*)$  должна быть универсальной как при однородном, так и при неоднородном НДС и различных геометрических формах стержней.

Эксперименты проводились на образцах и типовых элементах конструкций, изготовленных из конструкционной стали Ст.45 (без какой-либо термомеханической обработки) при  $T = 725^\circ\text{C}$ . Материал можно считать структурно стабильным и, как показано в [4], изотропным. Его деформационное поведение описывается по критерию Мизеса в виде  $W_0 = B \sigma_*^n$ , где  $W_0 = \sigma_{ij} \pi_{ij}$  – мощность диссипации,  $\sigma_* = (3 \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 / 2)^{1/2}$  – интенсивность тензора напряжений, соответствующие характеристики материала приведены в [4].

Представленные в [4] результаты экспериментов при однородном НДС (растяжение и сжатие) и неоднородном НДС (изгиб балок и кручение сплошных цилиндрических стержней), а также некоторые дополнительные экспериментальные результаты обрабатывались в предположении существования зависимости (10), т.е.  $W_0 = \Phi(Q_*)$ . На фиг. 1 представлены результаты этих экспериментов в виде графиков  $\ln W_0 - \ln Q_*$ . При осевом растяжении или сжатии в соответствии с (7)  $Q_* = |\sigma|$  (светлые точки – растяжение, темные – сжатие).

Для сплошных круглых стержней радиусом  $R = 10$  мм ( $k = 0$ ) при кручении из (9)  $Q_* = 3\sqrt{3} M_r / (2\pi R^3)$  (кресты). При кручении прямоугольного стержня  $b \times h$  из зависимости  $M_r = \tau b^2(3h - b)/6$  найдем  $\tau = \text{const}$  и, подставив в (6), определим  $Q_*$ . Соответствующие экспериментальные значения  $\ln W_0 - \ln Q_*$  при  $M_r = 21$  Н · м и  $h_1 = 20.03$  мм,  $b_1 = 9.9$  мм,  $h_2 = 20.02$  мм,  $b_2 = 10.01$  мм изображены на фигуре ромбиками. Эти же величины при  $h = b = 18$  мм и  $M_r = 50$  Н · м изображены квадратами.



Фиг. 1

При изгибе прямоугольной балки высотой  $h = 20$  мм и толщиной  $b = 10$  мм моментами  $M_b$  соответственно  $M_1 = 25.83$  Н·м и  $M_1 = 21.32$  Н·м, выразив  $\sigma$  через  $M_b$  и подставив в (6), получим  $Q_* = 4M_b/(bh^2)$ . Соответствующие значения нанесены на фигуре треугольниками.

Сплошная линия – аппроксимация по экспериментам с однородным НДС с характеристиками, приведенными в [4].

Из приведенных результатов следует, что указанные выше зависимости, в частности (10) достаточно удовлетворительно подтверждаются экспериментально для изотропных материалов и высоких температур ползучести, что позволяет определить вид зависимости (10) по одноосным экспериментам.

Представляет интерес использование аналогичного подхода и приведенных выше зависимостей к описанию ползучести более сложных, неизотропных сред. В [5] представлены результаты экспериментов на ползучесть до разрушения некоторых типичных элементов конструкций при однородном и неоднородном НДС в стационарных термосиловых условиях нагружения. Материал – алюминиевый сплав Д16Т, температура испытаний  $T = 250^\circ\text{C}$ . Результаты экспериментов при однородном НДС

(осевое растяжение, сжатие, кручение тонкостенных трубок) обрабатывались в соответствии с энергетическим вариантом теории ползучести по зависимостям  
растяжение сжатие

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_1 \sigma^n}{(A^* - A)^m}, \quad A = \int_0^t \sigma_{ij} \eta_{ij} dt \quad (12)$$

кручение тонкостенных трубок

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_2 \tau^n}{(A^* - A)^m}$$

Здесь  $A$  – рассеянная энергия деформаций ползучести  $\epsilon_{ij}$ ,  $\eta_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$  [час<sup>-1</sup>],  $A^* = 14.715$  [МДж/м<sup>3</sup>],  $n = 6$ ,  $m = 10$ ,  $B_1 = 7.36 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_2 = 0.591$ . Характеристики материала на осевое растяжение и сжатие одинаковы, на сдвиг отличаются только коэффициентом  $B_2$ . При этом попытка введения в (12) эквивалентного напряжения  $\sigma_*$  в

форме (1) по критерию Мизеса или  $\sigma_* = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$  по критерию Треска–Сен-Венана не дает удовлетворительных результатов – материал существенно слабее сопротивляется сдвиговым нагрузкам в сравнении с растяжением–сжатием. И его поведение следует описывать с позиций механики анизотропных сред.

В [6] предложены подходы к описанию процессов ползучести анизотропных материалов с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие. Величина эквивалентного напряжения принимается в виде квадратичной формы

$$T_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2a_{12}\sigma_{12}^2 + 2a_{23}\sigma_{23}^2 + 2a_{31}\sigma_{31}^2} \quad (13)$$

Для изотропных материалов эта зависимость переходит в  $\sigma_*$  по критерию Мизеса. Применительно к представленному в [5] материалу можно предположить, что  $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ , т.е. свойства материала на растяжение–сжатие во всех направлениях одинаковые, и  $a_{12} = a_{23} = a_{31}$  – сдвиговые свойства материала по всем плоскостям тоже одинаковы. Тогда из (13) получим

$$T_* = \sqrt{a_{11}\sigma^2 + a_{12}\tau^2} \quad (14)$$

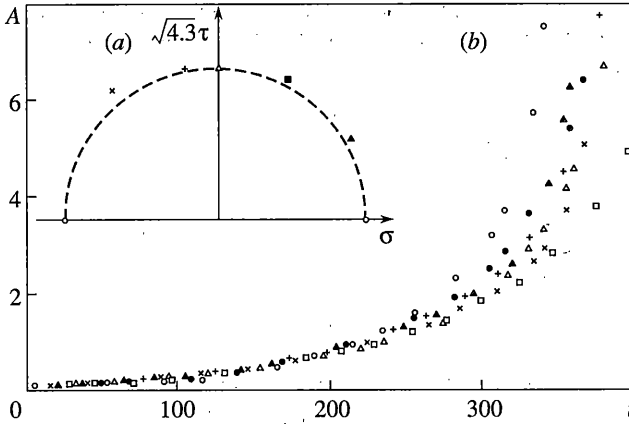
И соотношения (12) примут вид

$$W_0 = \frac{dA_0}{dt} = \frac{T_*^n}{(A^* - A_0)^m} \quad (15)$$

где коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{12}$  будут выражаться через  $B_1$  и  $B_2$ . Из (12) и (15) при одном растяжении или кручении получим

$$W_0 = \frac{dA_0}{dt} = \frac{B_1 \sigma^n}{(A^* - A_0)^m} = \frac{a_{11}^{n/2} \sigma^n}{(A^* - A_0)^m}, \quad a_{11} = (B_1)^{2/n} \quad (16)$$

$$W_0 = \frac{dA_0}{dt} = \frac{B_2 \tau^n}{(A^* - A_0)^m} = \frac{a_{12}^{n/2} \tau^n}{(A^* - A_0)^m}, \quad a_{12} = (B_2)^{2/n} \quad (17)$$



Фиг. 2

И в соответствии с (14)  $T_* = B_1^{1/n} \sqrt{\sigma^2 + (B_2/B_1)^{2/n} \tau^2} = B_1^{1/n} \sigma_*$ . Для данного материала  $(B_2/B_1)^{2/n} = 4.3$ , т.е.

$$\sigma_* = \sqrt{\sigma^2 + 4.3\tau^2} \quad (18)$$

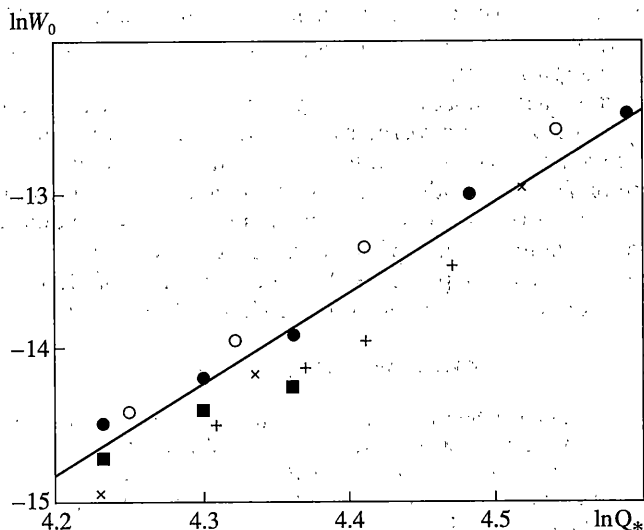
И зависимость (15) принимает окончательный вид

$$W_0 = \frac{B_1 \sigma_*^n}{(A^* - A_0)^m}$$

Очевидно, разница между  $\sigma_*$  по (1) и (18) только в величине коэффициента при  $\tau^2$ , поэтому все приведенные рассуждения и зависимости для изотропного материала будут справедливы и в данном частном случае анизотропии с заменой в соответствующих зависимостях множителя  $\sqrt{3}$  при  $\tau^2$  и в выражениях  $\lambda_2$  на  $\sqrt{4.3}$ .

На фиг. 2, а в координатах  $\sigma - \sqrt{4.3} \tau$  штриховой линией изображен контур  $\sigma_* = \text{const}$  по (18), координаты точек соответствуют значениям напряжений  $\sigma$  и  $\sqrt{4.3} \tau$ , при которых проводились эксперименты на растяжение с кручением тонкостенных трубок [5]. Здесь же представлены диаграммы рассеянной энергии необратимых деформаций  $A(t) = \sigma \epsilon + \tau \gamma$  при этих напряжениях соответствующими значками (фиг. 2, в). При однородном НДС  $\Delta q_1 = \Delta \epsilon$ ,  $\Delta q_2 = \Delta \gamma$  и в соответствии с (11) получим  $\Delta \epsilon / \Delta \gamma = \sigma / (4.3\tau)$ . Что достаточно удовлетворительно согласуется с данными эксперимента. Представленные результаты подтверждают справедливость выбора  $\sigma_*$  в форме (18) и зависимостей (10) и (11) применительно к однородному НДС для данного частного случая анизотропии материала.

На фиг. 3 представлены результаты в виде диаграмм  $\ln W_0 - \ln Q_*$  как для случаев однородного, так и неоднородного НДС в элементе конструкции: результаты экспериментов на растяжение при  $\sigma = \text{const}$  отмечены темными точками; кручение тонкостенных трубок (в соответствии с (9)  $Q_* = \sqrt{4.3} \tau$ ) отмечено светлыми точками; кручение сплошного круглого стержня при ( $k = 0$  из (9)  $Q_* = 3 \sqrt{4.3} M_i / (2\pi R^3)$ ) – косыми



Фиг. 3

крестиками; кручение с растяжением толстенной трубки (при  $k = 0.5$   $Q_*$  определена по (9) и (10)) – прямыми крестами; изгиб прямоугольной балки  $b \times h$  ( $Q = 4M_p/(bh^2)$ ) отмечено квадратами.

Линией проведена расчетная диаграмма  $W_0 = B_1 Q_*^n$ , соответствующая одноосному растяжению  $Q_* = \sigma$ ,  $B_1 = 7.36 \cdot 10^{-3}$ ,  $n = 6$ .

В таблице приведены результаты экспериментальной проверки зависимости (11) применительно к неоднородному НДС – кручение с растяжением толстостенной трубки ( $R = 10$  мм,  $r = 5$  мм) [5]. Из (11) имеем

$$\Delta q_1 / \Delta q_2 = \lambda_1^2 Q_1 / (\lambda_2^2 Q_2), \quad \Delta q_1 = \Delta l / l, \quad \Delta q_2 = R \Delta \phi / l, \quad \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{3\sqrt{4.3}(1-k^2)}{2(1-k^3)}, \quad Q_1 = \frac{P}{\pi R^2(1-k^2)} = \sigma, \quad Q_2 = \frac{M_t}{\pi R^3(1-k^2)}$$

Экспериментальные значения отношений  $\Delta q_1 / \Delta q_2$  взяты на установившейся стадии ползучести.

Таблица

№	$\sigma$ , МПа	$M$ , Н·м	$Q_1/(\lambda_2^2 Q_2)$	$\Delta q_1/q_2$
1	78.48	47.26	0.552	0.636
2	68.67	50.57	0.451	0.503
3	68.67	43.37	0.526	0.534
4	68.67	28.92	0.788	0.9

Как и в случае изотропного материала, зависимости типа (10) и (11) с использованием выражения  $Q_*$  по аналогии с  $\sigma_*$  в форме (18) достаточно удовлетворительно подтверждаются экспериментом.

Таким образом, для различных по геометрии элементов конструкций и разных  $Q_i$  одинаковым значениям  $Q_*$  соответствуют равные величины интенсивностей ползучести в смысле средней по объему мощности рассеяния, а, следовательно, и длительности до разрушения. Полученный результат позволяет в приближенной постановке оценивать поведение элемента по величинам эквивалентных внешних обобщенных сил  $Q_*$  без рассмотрения полей внутренних напряжений и скоростей деформаций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00738) и в рамках программы поддержки ведущих научных школ (НШ – 319.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. *Радченко В.П., Саушкин М.Н., Кубышкина С.Н.* Обобщенная модель неупругого деформирования и разрушения толстостенной сферической оболочки при ползучести // Вестн. Самарс. ГТУ. 2000. № 9. С. 46–54.
4. *Соснин О.В., Любашевская И.В.* Приближенные оценки высокотемпературной ползучести элементов конструкций // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 6. С. 299–312.
5. *Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф.* К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Сообщение 1; 2 // Пробл. прочности. 1976. № 11. С. 3–13.
6. *Соснин О.В.* Об анизотропной ползучести материалов // ПМТФ. 1965. № 6. С. 99–104.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
28.08.2003