МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2005

УДК 531.383

© 2005 г. М.И. ДЖИОЕВА

ОПИСАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ГИРОСТАТА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Рассматривается движение гиростата в потенциальном силовом поле. Ставится обратная задача динамики: определение параметров гиростата и силовых характеристик поля, при которых возможна регулярная прецессия с заданными величинами угловых скоростей и угла нутации. Рассматриваются варианты зависимости потенциала от различных комбинаций углов Эйлера.

1. Рассматривается гиростат, состоящий из несущего твердого тела S_0 и связанного с ним ротора – симметричного тела S', вращающегося вокруг своей оси симметрии, фиксированной в теле S_0. Пусть e – единичный вектор этой оси. Некоторая точка O тела S_0 закреплена, она служит началом как неподвижной декартовой системы $OXYZ$, так и связанной с S_0 прямоугольной правой системы $Oxyz$. В качестве параметров, определяющих положение подвижной системы, выбраны эйлеровы углы ψ, θ, φ. Пусть далее $\boldsymbol{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости тела S_0; ω' – величина относительной угловой скорости вращения ротора, предполагающаяся постоянной; J' – момент инерции тела S' относительно его оси симметрии. Тогда кинетическая энергия гиростата определяется формулой [1, 2]:

$$T = T_0 + \omega\sigma + T', \quad \sigma = J'\omega' \tag{1.1}$$

где T_0 – кинетическая энергия гиростата, воспринимаемого как твердое тело; $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\mathbf{e}$ – относительный кинетический момент ротора; $T' = 1/2J'\omega'^2$ – кинетическая энергия ротора, вычисленная для относительных скоростей.

Лагранжевы уравнения, описывающие движения гиростата, обобщают уравнения, полученные в [3], и имеют вид

$$a_{11}\ddot\psi + a_{12}\ddot\theta + a_{13}\ddot\varphi + b_{12}\dot\psi\dot\theta + b_{13}\dot\psi\dot\varphi + b_{22}\dot\theta^2 + b_{23}\dot\theta\dot\varphi + b_{33}\dot\varphi^2 + a_1\dot\theta + a_2\dot\varphi = Q_\psi$$

$$a_{12}\ddot\psi + a_{22}\ddot\theta + a_{23}\ddot\varphi + c_{11}\dot\psi^2 + c_{13}\dot\psi\dot\varphi + c_{23}\dot\theta\dot\varphi + c_{33}\dot\varphi^2 - a_1\dot\psi + a_3\dot\varphi = Q_\theta$$

$$a_{13}\ddot\psi + a_{23}\ddot\theta + a_{33}\ddot\varphi + d_{11}\dot\psi^2 + d_{12}\dot\psi\dot\theta + d_{22}\dot\theta^2 - a_2\dot\psi - a_3\dot\theta = Q_\varphi$$

$$\begin{aligned} a &= A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - F\sin 2\varphi - C \\ b &= 1/2(A-B)\sin 2\varphi - F\cos 2\varphi \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$d = D\sin\varphi - E\cos\varphi, \quad e = E\sin\varphi + D\cos\varphi$$

$$f = 2F\sin 2\varphi + (A-B)\cos 2\varphi$$

$$g = \sigma_1\sin\varphi + \sigma_2\cos\varphi, \quad h = \sigma_1\cos\varphi - \sigma_2\sin\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = a\sin^2\theta - e\sin 2\theta + C, \quad a_{12} = b\sin\theta + d\cos\theta \\
&a_{13} = C\cos\theta - e\sin\theta, \quad a_{22} = A + B - C - a \\
&a_{23} = d, \quad a_{33} = C \\
&b_{12} = -2c_{11} = a\sin 2\theta - 2e\cos 2\theta \\
&b_{13} = -2d_{11} = 2b\sin^2\theta + d\sin 2\theta \\
&b_{22} = b\cos\theta - d\sin\theta, \quad b_{23} = (f - C)\sin\theta \\
&b_{33} = d\sin\theta \\
&c_{13} = d_{12} = (f + C)\sin\theta + 2e\cos\theta \\
&c_{23} = -2b, \quad c_{33} = e \\
&a_1 = g\cos\theta - \sigma_3\sin\theta, \quad a_2 = h\sin\theta, \quad a_3 = -g
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Здесь Q_ψ, Q_θ, Q_φ – обобщенные силы; A, B, C, D, E, F – стандартные обозначения для осевых моментов инерции и центробежных моментов гиростата в выражении для T_0; σ_1, σ_2, σ_3 – компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}$ в осях x, y, z.

Уравнения (1.2) являются линейной относительно $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$ системой с определителем

$$
\Delta = (ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF)\sin^2\theta \tag{1.4}
$$

В дальнейшем подразумевается, что объемы тел S_0 и S' отличны от нуля, $\theta \neq \pm\pi$. Тогда $\Delta \neq 0$ и движению гиростата соответствует динамическая система

$$
\begin{aligned}
&\dot{\psi} = \omega_\psi, \quad \dot{\theta} = \omega_\theta, \quad \dot{\varphi} = \omega_\varphi \\
&\dot{\omega}_\psi = \Psi, \quad \dot{\omega}_\theta = \Theta, \quad \dot{\omega}_\varphi = \Phi
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

в которой правые части последних трех уравнений получены решением (1.2) относительно $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$.

2. Рассматривается обратная задача динамики об определении параметров гиростата и силовых характеристик такого поля, в котором гиростат совершает регулярную прецессию с заданными величинами угловых скоростей и угла нутации. При этом за ось прецессии выбрана ось Z, а за ось собственного вращения – z; их направления предполагаются такими, что соответствующие постоянные проекции угловых скоростей ω_e и ω_r – положительны. Направления других осей произвольны; если, по предположению, в начальный момент оси X и x совпадают, то регулярная прецессия описывается следующими уравнениями:

$$
\psi = \omega_e t, \quad \varphi = \omega_r t, \quad \theta = \theta_0 \tag{2.1}
$$

Тогда соответствующее интегральное многообразие Ω в фазовом пространстве будет определяться равенствами

$$
\omega_\psi = \omega_e, \quad \omega_\varphi = \omega_r, \quad \dot{\omega}_\theta = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \chi\varphi \quad (\chi = \omega_r^{-1}\omega_e) \tag{2.2}
$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 3 [3], приводят к следующим формулам для обобщенных сил, обеспечивающих заданную регулярную прецессию (2.1):

$$
\begin{aligned}
Q_\psi &= b_{12}\omega_\psi\omega_\theta + b_{13}\omega_\psi\omega_\varphi + b_{22}\omega_\theta^2 + b_{23}\omega_\theta\omega_\varphi + b_{33}\omega_\varphi^2 + a_1\omega_\theta + a_2\omega_\varphi + L_\Omega \\
Q_\theta &= c_{11}\omega_\psi^2 + c_{13}\omega_\psi\omega_\varphi + c_{23}\omega_\theta\omega_\varphi + c_{33}\omega_\varphi^2 - a_1\omega_\psi + a_3\omega_\varphi + M_\Omega \\
Q_\varphi &= d_{11}\omega_\psi^2 + d_{12}\omega_\psi\omega_\theta + d_{22}\omega_\theta^2 - a_2\omega_\psi - a_3\omega_\theta + N_\Omega
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где L_Ω, M_Ω, N_Ω – непрерывно дифференцируемые функции, произвольные всюду за исключением многообразия Ω, на котором они обращаются в нуль.

Далее предполагается, что силы, действующие на гиростат, являются позиционными. В этом случае рассуждения, аналогичные тем, что проведены в п. 4 [3], дают следующие выражения для обобщенных сил:

$$
Q_\psi = L(\psi, \theta, \varphi), \quad Q_\theta = M(\psi, \theta, \varphi), \quad Q_\varphi = N(\psi, \theta, \varphi) \tag{2.4}
$$

где L, M, N – непрерывные функции, произвольные всюду за исключением многообразия, на котором они имеют вид

$$
\begin{aligned}
L|_\Omega &= \omega_r[2b\omega_e\sin\theta_0 + d(2\omega_e\cos\theta_0 + \omega_r) + h]\sin\theta_0 \\
M|_\Omega &= 1/2 f\omega_e(\omega_e\cos\theta_0 + 2\omega_r)\sin\theta_0 + e(\omega_e^2\cos 2\theta_0 + \\
&+ 2\omega_e\omega_r\cos\theta_0 + \omega_r^2) - g(\omega_e\cos\theta_0 + \omega_r) + \\
&+ \omega_e[C(\omega_e\cos\theta_0 + \omega_r) - 1/2(A+B)\omega_e\cos\theta_0 + \sigma_3]\sin\theta_0 \\
N|_\Omega &= -\omega_e(b\omega_e\sin\theta_0 + d\omega_e\cos\theta_0 + h)\sin\theta_0
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

3. Рассмотренное поле позиционных сил далее полагается потенциальным и пусть $U(\psi, \theta, \varphi)$ – его потенциал, так что

$$
U'_\psi = Q_\psi, \quad U'_\theta = Q_\theta, \quad U'_\varphi = Q_\varphi \tag{3.1}
$$

Непрерывность функции U допускает возможность ее разложения в кратный ряд Фурье при условии периодичности по каждому из аргументов с периодом 2π (для θ разложение производится на отрезке $[0, \pi]$). Соответствующий тройной ряд преобразуется в двойной вида:

$$
\begin{aligned}
U &= u_0 + \sum_i (v_i^s\sin i\varphi + v_i^c\cos i\varphi) + \sum_j (\omega_j^s\sin j\psi + \omega_j^c\cos j\psi) + \\
&+ \sum_{k,n} (u_{kn}^{cc}\cos k\varphi\cos n\psi + u_{kn}^{cs}\cos k\varphi\sin n\psi + u_{kn}^{sc}\sin k\varphi\cos n\psi + u_{kn}^{ss}\sin k\varphi\sin n\psi)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где коэффициенты и член u_0 зависят от θ. Имеют место следующие утверждения:

(*a*) если потенциал не зависит от ψ или φ, то ось собственного вращения перпендикулярна круговому сечению эллипсоида инерции для неподвижной точки.

Доказательством служат равенства

$$
A = B, \quad F = 0 \tag{3.3}
$$

имеющие место при условии $b = 0$, если в выражениях (2.5) положить $N|_\Omega \equiv 0$ или $L|_\Omega \equiv 0$. Из этого утверждения следует, что в соответствующих случаях можно ось y считать главной и полагать $D = 0$.

(b) если потенциал зависит от ψ, то угловые скорости прецессии и собственного вращения соизмеримы.

Доказательство того, что χ – рациональное число, повторяет рассуждения доказательства леммы 2 работы [3].

Далее на основе равенств (2.5) изучаются варианты зависимости потенциала от различных комбинаций эйлеровых углов.

1. $U = \text{const}$. Это соответствует тому, что $L|_\Omega = M|_\Omega = N|_\Omega = 0$.

Случай $E = 0$ определяет динамическую симметрию гиростата и является обобщением эйлерова случая для твердого тела с одной закрепленной точкой. Действительно, тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, а соотношение

$$\cos\theta_0 = \frac{C\omega_r + \sigma_3}{(A - C)\omega_e} \tag{3.4}$$

обобщает известную формулу классической механики.

Если $E \neq 0$, то видно, что $\sigma_1 = -E\omega_r \neq 0$, $\sigma_2 = 0$ и правые части в (2.5) для L и N обращаются в нуль при $\cos\theta_0 = -\omega_r\omega_e^{-1}$. Тогда из выражения для M в (2.5) определяется величина $\sigma_3 = -A\omega_r$, а также следует, что $\omega_e = \omega_r$. Это означает, что $\theta_0 = \pi$, что соответствует вращению, а не регулярной прецессии.

2. $U = U(\varphi)$. В этом случае обращаются в нуль первые два уравнения в (2.5). Предположение $E = 0$ приводит к предыдущему случаю. Если $E \neq 0$ выполняется соотношение

$$\cos\theta_0 = -\omega_e\omega_r^{-1} = -\chi \tag{3.5}$$

т.е. $\chi < 1$, а также определяются значения $\sigma_1 = E(\omega_r^2 - 2\omega_e^2)\omega_r^{-1} = -E\omega_r\cos 2\theta_0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -(A\cos^2 q_0 + C\sin^2\theta_0)\omega_r = (C - A)\omega_e^2\omega_r^{-1} - C\omega_r$. Из третьего уравнения в (2.5) следует, что в силу (3.2) потенциал имеет вид $U = u_0 + \upsilon_1^s\sin\varphi$, $\upsilon_1^s = -E\omega_e\omega_r(1 - \chi^2)^{3/2} = -E\omega_e\omega_r\sin^3\theta_0$.

3. $U = U(\psi)$. В нуль в этом случае обращаются выражения для M и N в (2.5). Если $E = 0$, то потенциал является постоянной величиной. Пусть $E \neq 0$; уравнение коэффициентов при $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ в (2.5) дает квадратное уравнение относительно $\cos\theta_0$, откуда

$$\cos\theta_0 = (2\omega_e)^{-1}(-\omega_r \pm \sqrt{4\omega_e^2 - 3\omega_r^2}) \tag{3.6}$$

Тогда $\chi = \omega_e/\omega_r \geq -\sqrt{3/2}$. Вместе с тем, из (3.2) следует, что χ имеет вид $1/j$ ($j = 1, 2, \ldots$). Таким образом, $\chi = 1$ и $\cos\theta_0 = 0$. Следовательно $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $a\sigma_3 = -C\omega_r$, как это видно из (3.4). Потенциал определяется из (2.5) для L формулой $U = u_0 + \omega_1^s\sin\psi$, где $\omega_1^s = -E\omega_r^2$.

4. $U = U(\theta)$. Этому случаю соответствует обращение в нуль выражений для L и N в (2.5). Равенство $E = 0$ влечет $\sigma_1 = 0$; также будет $\sigma_2 = 0$. Величина σ_3 имеет произвольное значение, выбор которого [4] определяет выражение (2.5) для M:

$$U'_\theta(\theta_0) = \omega_r[(C - A)\omega_r\cos\theta_0 + C\omega_r + \sigma_3]\sin\theta_0 \tag{3.7}$$

Таким образом, ротор, расположенный вдоль оси симметрии тела, обобщает лагранжеву прецессию твердого тела с одной закрепленной точкой. Функция $U(\theta)$, очевидно, является произвольной, подчиненной единственному условию (3.7).

Если $E \neq 0$, то из (2.5) для L и N выводится соотношение $\omega_e \cos\theta_0 + \omega_r = 0$, тогда коэффициент при $\sin\varphi$ в (2.5) имеет вид $-\omega_e^2 \sin^2\theta_0 \neq 0$, что не соответствует рассматриваемой структуре функции $U(\theta)$.

Аналогично тому, как для симметричного твердого тела существует потенциал [3], для которого величина угла нутации не связана с угловыми скоростями прецессии и собственного вращения, для гиростата такая силовая функция имеет вид

$$U = u_0 + u_1 \cos\theta + u_2 \cos\theta \tag{3.8}$$

где коэффициенты определяются согласно (3.7) по формулам

$$u_1 = -(C\omega_e\omega_r + \sigma_3), \quad u_2 = 1/4(A - C)\omega_e^2 \tag{3.9}$$

5. $U = U(\theta, \varphi)$. В этом случае обращается в нуль выражение для L в (2.5).

Если $E = 0$, то для существования регулярной прецессии все коэффициенты в разложении (3.2) должны иметь общий кратный нуль θ_0, который, таким образом, является соответствующим значением угла нутации.

Пусть $E \neq 0$, из (2.5) следует

$$\cos\theta_0 = \frac{\sigma_1 - E\omega_r}{2E\omega_e} \tag{3.10}$$

Откуда видно, что прецессия может быть прямой или обратной в зависимости от величины σ_1. Далее, $\sigma_2 = 0$, а величина σ_3 должна удовлетворять соотношению (3.7), где в левой части стоит производная свободного члена ряда (3.2). При этом первые коэффициенты ряда удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\upsilon_1^c(\theta_0) = \upsilon_1^{c'}(\theta_0) = 0 \\ &\upsilon_1^s(\theta_0) = -1/2\omega_e(E\omega_r + \sigma_1)\sin\theta_0 \\ &\upsilon_1^{s'}(\theta_0) = E\omega_r^2\cos 2\theta_0 - \sigma_1\omega_e\cos\theta_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

где параметры связаны формулой (3.10), а для остальных коэффициентов θ_0 – кратный нуль.

Примером силовой функции рассмотренного типа служит потенциал [5, 6]:

$$\begin{aligned} U = &-mg_0[(x_c\sin\varphi + y_c\cos\varphi)\sin\theta + z_c\cos\theta] - \\ &-3/2g_0(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta - E\sin\varphi\sin 2\theta)/R \end{aligned} \tag{3.12}$$

сил центрального ньютоновского поля, действующих на гиростат. При этом предполагается, что ось Z определяется прямой, соединяющей притягивающий центр и закрепленную точку, расположенную на расстоянии R, а ось z направлена вдоль перпендикуляра к круговому сечению эллипсоида инерции для этой точки; x_c, y_c, z_c – координаты центра масс в системе $Oxyz$; m – масса гиростата, $g_0 = \mu R^{-2}$ (μ – гравитационная постоянная).

Условия (3.11) и (3.7) приводят к равенствам

$$y_c = 0, \quad \omega_e^2 = 3g_0R^{-1}, \quad C\omega_e\omega_r + \sigma_3\omega_e - mg_0z_c = 0 \tag{3.13}$$

указанным в [7], а также к соотношению

$$\sigma_1\omega_e = mg_0x_c \tag{3.14}$$

которое вместе с (3.10) позволяет обобщить полученную в [7] регулярную прецессию такого гиростата, что описан в п. 1. Впервые регулярная прецессия аналогичного типа (при иных предположениях: проекция абсолютной угловой скорости тела S' на ось, фиксированную в теле S_0, постоянна) найдена в [4]. Все эти движения являются обобщениями на случай гиростата регулярной прецессии Бентсика [8] твердого тела в ньютоновском силовом поле.

6. $U = U(\psi, \theta)$. В нуль в этом случае обращается выражение для N в (2.5). Предположение $E = 0$ приводит к такому же выводу, что был сделан в предыдущем случае: регулярная прецессия существует, если все коэффициенты ряда (3.2) имеют общий кратный нуль θ_0, равный значению угла нутации.

Пусть $E \neq 0$, тогда из (2.5) для N следует

$$\cos\theta_0 = \sigma_1(E\omega_e)^{-1} \tag{3.15}$$

и прецессия прямая или обратная соответственно тому, является ли величина σ_1 положительной или отрицательной. Как и ранее $\sigma_2 = 0$. Аналогично п. 3 определяется отношение угловых скоростей: $\chi = 1/j$ ($j = 1, 2, \ldots$).

Если обозначить $\varepsilon = \sigma_1E^{-1}$, то $\cos\theta_0 = \varepsilon\omega_e^{-1}$ и условия существования регулярной прецессии следуют из разложения (3.2) и имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_j^c(\theta_0) &= \omega_j^{c'}(\theta_0) = 0\\
\omega_j^s(\theta_0) &= E(\omega_r^2 - \omega_e^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon\omega_r)\\
\omega_j^{s'}(\theta_0) &= -E\omega_r\omega_e^{-1}(\omega_r + \varepsilon)\sqrt{\omega_e^2 - \varepsilon^2}/j\\
u_0'(\theta_0) &= [C\omega_r + (C-A)\varepsilon + \sigma_3]\sqrt{\omega_e^2 - \varepsilon^2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Тогда как для прочих коэффициентов θ_0 – общий кратный нуль. Попытка обобщить на случай гиростата регулярную прецессию Гриоли [9, 10] тяжелого твердого тела приводит к рассмотрению потенциала

$$U = -mg_0z_c(\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta\sin\psi) \tag{3.17}$$

где β – угол, образуемый осью Z с вертикалью; при этом ось z предполагается барицентрической, а ось Y – лежащей в горизонтальной плоскости.

Очевидно $j = 1$, откуда следует, что $\omega_e = \omega_r$. Далее, $\omega_1^s(\theta_0)\sin^{-1}\theta_0 = \omega_1^{s'}(\theta_0)\cos^{-1}\theta_0 - mg_0z_c\sin\beta$ и соответствующие уравнения (3.16) являются совместными либо при $z_c = 0$, либо при $\sin\beta = 0$.

Таким образом, регулярная прецессия тела не допускает аналога для гиростата рассматриваемого вида.

Вместе с тем, для других потенциалов указанного типа условия (3.16) могут быть выполненными; нетрудно проверить, например, что функция

$$U(\psi, \theta) = E(\omega_0 + \varepsilon)[\varepsilon\sin(\theta - \theta_0) - \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}]\sin\psi \tag{3.18}$$

где $\omega_0 \equiv \omega_e = \omega_r$ – может служить потенциалом силового поля, в котором регулярная прецессия гиростата существует ($\chi = 1$), при этом $\sigma_3 = (A - C)\varepsilon - C\omega_0$.

7. $U = U(\psi, \varphi)$. Этому случаю соответствует обращение в нуль выражений для M в (2.5), что влечет альтернативу $\cos\theta_0 = -2\omega_r\omega_e^{-1} \equiv -2\chi^{-1}$, $A = B$, $F = 0$. В первом случае также из (2.5) определяются компоненты вектора σ:

$$\sigma_1 = E\omega_r(\chi^2 - 5), \quad \sigma_2 = D\omega_r(\chi^2 - 5), \quad \sigma_3 = (A + B - C)\omega_r$$

Очевидно, $\chi > 2$. Если ввести обозначения [3]:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 2\omega_r(2\omega_e\cos\theta_0 + \omega_r)\sin\theta_0 \\
\gamma_2 &= 2\omega_e\omega_r\sin^2\theta_0 \\
\delta_1 &= \omega_e^2\sin 2\theta_0, \quad \delta_2 = \omega_e^2\sin^2\theta_0 \\
\lambda_1 &= 2(\omega_e^2\cos 2\theta_0 + 2\omega_e\omega_r\cos\theta_0 + \omega_r^2) \\
\lambda_2 &= \omega_e(\omega_e\cos\theta_0 + 2\omega_r)\sin\theta_0 \\
s &= \sin\theta_0, \quad c = \cos\theta_0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

то равенства (2.5) приобретают вид

$$\begin{aligned}
2L|_\Omega &= (D\gamma_1 - 2\sigma_2\omega_r s)\sin\varphi + (2\sigma_1\omega_r s - E\gamma_1)\cos\varphi + \\
&+ (A - B)\gamma_2\sin 2\varphi - 2F\gamma_2\cos 2\varphi \equiv \\
&\equiv H_1^\psi\sin\varphi + G_1^\psi\cos\varphi + H_2^\psi\sin 2\varphi + G_2^\psi\cos 2\varphi
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
2M|_\Omega &= [(2C - A - B)\omega_e c + 2C\omega_r + 2\sigma_3]\omega_e s + \\
&+ [E\lambda_1 - 2\sigma_1(\omega_e c + \omega_r)]\sin\varphi + [D\lambda_1 - \\
&- 2\sigma_2(\omega_e c + \omega_r)]\cos\varphi + 2F\lambda_2\sin 2\varphi + (A - B)\lambda_2\cos 2\varphi \equiv \\
&\equiv 1/2u_0' + G_1^\theta\sin\varphi + H_1^\theta\cos\varphi + G_2^\theta\sin 2\varphi + H_2^\theta\cos 2\varphi
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
2N|_\Omega &= (2\sigma_2\omega_e s - D\delta_2)\sin\varphi + (E\delta_1 - 2\delta_1\omega_e s)\cos\varphi - \\
&- (A - B)\delta_2\sin 2\varphi + 2F\delta_2\cos 2\varphi \equiv \\
&\equiv H_1^\varphi\sin\varphi + G_1^\varphi\cos\varphi + H_2^\varphi\sin 2\varphi + G_2^\varphi\cos 2\varphi
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Теперь в отношении коэффициентов ряда (3.2) проводятся рассуждения, аналогичные [3], и условия существования регулярной прецессии записываются идентичным образом (с поправкой на члены, содержащие компоненты $\boldsymbol{\sigma}$).

В качестве примера соответствующего потенциала может быть выбран отрезок тригонометрического ряда (3.2) при $\chi = 3$ и следующих значениях коэффициентов

$$\begin{aligned}
u_{11}^{cs} &= -u_{11}^{sc} = 1/2G_2^\psi, \quad u_{11}^{cc} = u_{11}^{ss} = -1/2H_2^\psi \\
u_{21}^{cs} &= -u_{21}^{sc} = 1/2G_1^\psi, \quad u_{21}^{cc} = u_{21}^{ss} = -1/2H_1^\psi \\
v_1^s &= 1/2(2G_1^\psi + G_1^\varphi), \quad v_1^c = -1/2(2H_1^\psi + H_1^\varphi)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$v_2^s = 1/4(G_2^{\psi} + G_2^{\varphi}), \quad v_2^c = -1/4(H_2^{\psi} + H_2^{\varphi})$$

и прочих равных нулю; правые части этих равенств вычисляются при $\theta_0 = \arccos(-2\chi^{-1})$, $(\pi/2 < \theta_0 < \pi)$, прецессия обратная.

Для второго варианта, как и в предыдущих случаях, ось собственного вращения перпендикулярна круговому сечению эллипсоида инерции. Тогда можно положить $D = 0$, откуда следует $\sigma_2 = 0$ либо $\cos\theta_0 = -\chi^{-1}$. В первом из этих случаев из (3.21) определяются другие компоненты σ: $\sigma_1 = 1/2E\lambda_1(\omega_e c + \omega_r)^{-1}$ и $\sigma_3 = (A - C)\omega_e c - C\omega_r$. Условия существования регулярной прецессии совпадают с указанными в [3] для аналогичной структуры $U = U(\psi, \varphi)$. Величина χ может быть любым положительным рациональным числом. Для $\chi = 1$ примером соответствующего потенциала является функция

$$U = 1/2(G_1^{\varphi}\sin\varphi - H_1^{\varphi}\cos\varphi + G_1^{\psi}\sin\psi - H_1^{\psi}\cos\psi) \tag{3.24}$$

причем угол нутации произвольный; выбор его значения θ_0 определяет величины коэффициентов в (3.22).

Наконец, в другом случае из (3.21) следует, что $G_1^{\theta} = -2E\omega_r(\chi^2 - 1) \neq 0$; таким образом, регулярная прецессия не является возможной.

8. $U = U(\psi, \theta, \varphi)$. Регулярные прецессии гиростата в этом случае не несут в себе принципиальных отличий от аналогичных движений абсолютного твердого тела, условия их существования тождественны с указанными в [3]; в качестве примера необходимого потенциала можно взять приведенный там же отрезок тригонометрического ряда с коэффициентами, которые определяются исходя из заданной величины рационального числа χ.

Автор выражает глубокую признательность И.А. Галиуллину за помощь, оказанную при работе над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gray A.* A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. L.: Macmillan, 1918. 530 p.
2. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 52–73.
3. *Галиуллин И.А.* Регулярные прецессии твердого тела с одной закрепленной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 6–18.
4. *Горр Г.В.* Регулярная прецессия гиростата в центральном ньютоновском поле сил // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 105–108.
5. *Leimanis E.* The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Berlin: Springer, 1965. 337 p.
6. *Харламова Е.И., Ковалева Л.М.* Уравнения движения гиростата в ньютоновском поле сил // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 92–98.
7. *Смотров В.М., Шульга М.* Регулярные прецессии гиростата в ньютоновском поле сил // Сборник научно-методических статей по теорет. механике. М.: Высш. шк., 1984. Вып. 15. С. 104–107.
8. *Bentsik E.* SU di un tipo di precessioni regolari per un corpo asimmetrico soggetto a forze newtoniane // Rend. Sem. mat. Univ. Padova 1968–1969. V. 41. P. 252–260.
9. *Grioll G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1947. Ser. 4. 1947. V. 26. Esc. 3–4. P. 271–281.
10. *Гуляев М.П.* О регулярной прецессии несимметричного гироскопа. Случай Гриоли. // Сборник научно-методических статей по теорет. механике. М.: Высш. шк., 1975. Вып. 5. С. 130–137.

Москва

Поступила в редакцию
7.07.2004