

УДК 531.53

© 2005 г. М.С. АРТЕМЬЕВА, Д.Ю. СКУБОВ

МАГНИТНЫЙ ПОДВЕС В ПОЛЕ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ

Известно, что быстропеременные силы, действующие на механическую или электромеханическую систему, могут существенным образом изменять ее динамические свойства – приводить к появлению новых положений равновесия, менять свойства старых, служить причиной возникновения автоколебаний и т.д. В настоящей работе показано как действие быстроосциллирующих электромагнитных сил может быть использовано для создания нового пассивного магнитного подвеса индукторного типа. В простейшем случае этот подвес представляет собой систему двух колец с единой вертикальной осью, одно из которых неподвижно, а другое свободно. Кольца запитываются переменным током, что приводит к появлению устойчивых равновесных состояний в поле силы тяжести. Подвес такого рода при определенных условиях может служить альтернативой сверхпроводящему подвесу в постоянном магнитном поле, эффект устойчивости равновесия которого получил название “магнитной потенциальной ямы” [1].

1. Вертикальный подвес. В качестве простейшей модели бесконтактного пассивного магнитного подвеса рассмотрим систему двух тонких замкнутых проводящих колец, расположенных соосно одно над другим в поле силы тяжести (фиг. 1).

Одно из колец закреплено и в нем поддерживается переменный стационарный ток с амплитудой i_* и частотой ω . Второе кольцо свободно и на него подается напряжение той же частоты $U_c \cos \omega t + U_s \sin \omega t$. Допустим, что кольца имеют одинаковые размеры (радиус a и диаметр поперечного сечения $2b$), а также одни и те же электрические и магнитные параметры (индуктивность L и сопротивление R).

Рассмотрим сначала случай, когда незакрепленное кольцо может перемещаться только по вертикали, параллельно верхнему. Обозначим через y расстояние между кольцами, i – ток в свободном кольце, $L_e(y)$ – коэффициент взаимной индукции колец. В принятых обозначениях уравнения Лагранжа – Максвелла для свободного кольца имеют вид:

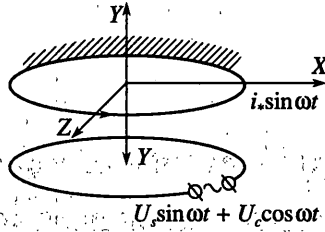
$$m\ddot{y} - ii_* \sin \omega t dL_e/dy \pm mg = 0 \quad (1.1)$$

$$Li + Ri + L_e i_* \omega \cos \omega t + i_* \sin \omega t \frac{dL_e}{dy} \dot{y} = U_s \sin \omega t + U_c \cos \omega t$$

В первом уравнении знак (+) перед силой тяжести соответствует случаю, когда свободное кольцо находится над закрепленным (ось y направлена вверх), а знак (–) – случаю, когда оно расположено снизу (ось y направлена вниз).

Коэффициент взаимной индукции двух проводников, моделируемых линейными токами, определяется формулой:

$$L_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{dl_a dl_b}{R_*} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{a^2 \cos(\phi - \psi) d\phi d\psi}{\sqrt{2a^2(1 - \cos(\phi - \psi)) + y^2}} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Здесь dl_a и dl_b – элементарные вектора, направленные по касательным к контурам проводников, R_* – расстояние между соответствующими элементами.

Вычислив двойной интеграл по длине колец, получим:

$$L_e(y) = \frac{\mu_0 a}{k} [(2 - k^2)K(k) - 2E(k)], \quad k^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + y^2} \quad (1.3)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода.

Переходя в (1.1) к безразмерному времени $\tau = \omega t$ и вводя малый параметр $\epsilon^2 = g/a\omega^2$ ($\epsilon \ll 1$), получим уравнения изменения тока и движения свободного кольца в безразмерных переменных

$$i_u + ri_u + L_{eu} \cos \tau + \frac{dL_{eu}}{dy_u} \sin \tau \dot{y}_u = u_s \sin \tau + u_c \cos \tau \quad (1.4)$$

$$\ddot{y}_u - i_u \gamma \epsilon^2 \sin \tau \frac{dL_{eu}}{dy_u} \pm \epsilon^2 = 0$$

$$\gamma = \frac{Li_*^2}{mga}, \quad u_s = \frac{V_s}{L\omega i_*}, \quad u_c = \frac{V_c}{L\omega i_*}, \quad r = \frac{R}{L\omega}, \quad i_u = \frac{i}{i_*}, \quad y_u = \frac{y}{a}, \quad L_{eu} = \frac{L_e}{L}$$

В дальнейшем для удобства записи символ обезразмеривания (u) опускается.

Решение задачи проводится модификацией метода усреднения для квазилинейных систем [2]. Полагая в (1.4) $y = y_0 = \text{const}$, получим, что первое приближение по ϵ для тока удовлетворяет уравнению:

$$i_0 + ri_0 = u_s \sin \tau + (u_c - L_e) \cos \tau \quad (1.5)$$

Отсюда находим, что в первом приближении стационарный ток в свободном кольце определяется выражением:

$$i_0 = \frac{1}{1+r^2} [(u_c - L_e + ru_s) \sin \tau + ((u_c - L_e)r - u_s) \cos \tau] \quad (1.6)$$

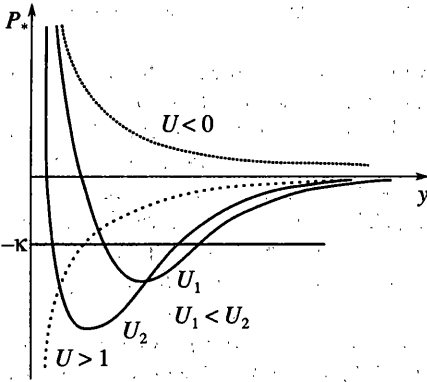
Подставляя (1.6) в первое уравнение системы (1.4) и усредняя его по времени τ , получим усредненное уравнение движения свободного кольца в первом приближении:

$$\ddot{y} - \epsilon^2 \gamma \langle i \sin \tau \rangle \frac{dL_e}{dy} \pm \epsilon^2 = 0 \quad (1.7)$$

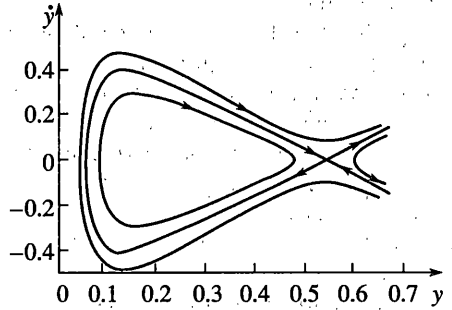
где $\langle f(t) \rangle$ означает усреднение функции за период $\int_T f(t) dt / T$.

Средняя электромагнитная сила, действующая на свободное кольцо, равна

$$P_W = \gamma \langle i \sin \tau \rangle \frac{dL_e}{dy} = \frac{\gamma}{2(1+r^2)} (u_c + ru_s - L_e) \frac{dL_e}{dy} \quad (1.8)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Из (1.8) следует, что в первом приближении электромагнитная сила имеет потенциал

$$\Pi_W = -\frac{\gamma}{2(1+r^2)} \left[(u_c + ru_s)L_e - \frac{L_e^2}{2} \right] \quad (1.9)$$

В положении равновесия должно выполняться соотношение:

$$\frac{d\Pi_W dL_e}{dL_e dy} \pm 1 = 0 \Rightarrow -(U - L_e) \frac{dL_e}{dy} \pm \kappa = 0 \quad (1.10)$$

Здесь параметр $U = u_c + ru_s$ характеризует напряжение, заданное в свободном кольце, а параметр $\kappa = 2(1+r^2)/\gamma$ пропорционален весу кольца.

Так как для любого y производная $dL_e/dy < 0$, то для существования положения равновесия в случае, когда свободное кольцо находится над закрепленным, необходимо, чтобы выполнялось условие: $d\Pi_W/dL_e > 0$, т.е. $U - L_e < 0$. Для устойчивости этого положения необходимым и достаточным является выполнение условия

$$\frac{d^2\Pi_W}{dy^2} = \frac{\partial^2\Pi_W}{\partial L_e^2} \left(\frac{\partial L_e}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \Pi_W}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial y^2} > 0 \quad (1.11)$$

Это неравенство выполнено при любых y и параметрах U и κ , поскольку $\partial^2\Pi_W/\partial L_e^2 = 1/\kappa > 0$ и $\partial^2 L_e/\partial y^2 > 0$, при любых y . Таким образом, если положение равновесия над закрепленным кольцом существует, то оно всегда устойчиво по y . Кроме того, из уравнения (1.10) и неравенства (1.11) следует, что устойчивое положение равновесия свободного кольца над закрепленным существует даже в случае $U = 0$, т.е. при условии, что ток подается только на неподвижное кольцо.

Рассмотрим случай, когда свободное кольцо находится под закрепленным. Для существования положения равновесия должно выполняться условие $\partial\Pi_W/\partial L_e < 0$, следовательно, должно быть $U - L_e > 0$. Устойчивость этого положения определяется неравенством (1.11), которое в явном виде имеет достаточно сложную структуру

$$\frac{\mu_0 a}{L} [(2-k^2)E - 2(1-k^2)K]^2 - (U - L_e)k^3 [(1-k^2)K - (1-2k^2)E] > 0 \quad (1.12)$$

Однако, о существовании и устойчивости положений равновесия свободного кольца можно судить, используя графический подход. На фиг. 2 изображены графики за-

висимости $P_*(y) = 2P_W(1+r^2)/\gamma$ (безразмерной электромагнитной силы) при различных значениях параметра U .

При $0 < U < 1$ точки пересечения графика и прямой $P_* = -k$ определяют два положения равновесия, одно из которых (ближнее к закрепленному кольцу) оказывается устойчивым, а второе (дальнее) – неустойчивым. Из приведенных графиков видно, что чем ближе параметр U к 1, тем больший груз может быть устойчиво подвешен.

При $U < 0$ средняя магнитная сила положительна (направлена вниз) и, следовательно, положений равновесия под закрепленным кольцом не существует. При $U > 1$ магнитная сила отрицательна (направлена вверх) и монотонно возрастает с ростом y , поэтому существует только одно положение равновесия, которое оказывается неустойчивым.

Характерные фазовые траектории, полученные путем численного интегрирования усредненного уравнения (1.7), в случае наличия двух положений равновесия приведены на фиг. 3.

Так как система первого приближения (1.7) является консервативной, то для того, чтобы судить о реальной устойчивости равновесия, необходимо построить второе приближение по ε для силы тока.

Предполагая медленность движения по оси y , рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon \dot{x} \\ \dot{x} &= \varepsilon \left(\frac{\gamma i}{2(1+r^2)} \frac{\partial L_e}{\partial y} \sin \tau + 1 \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$i + ri + L_e \cos \tau + \frac{dL_e}{dy} \sin \tau x = u_s \sin \tau + u_c \cos \tau$$

Используя для (1.13) метод усреднения [2], получим

$$i_1 = \frac{r(1-r^2)dL_e}{(1+r^2)^2 dy} \sin \tau + \frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \frac{dL_e}{dy} \cos \tau \quad (1.14)$$

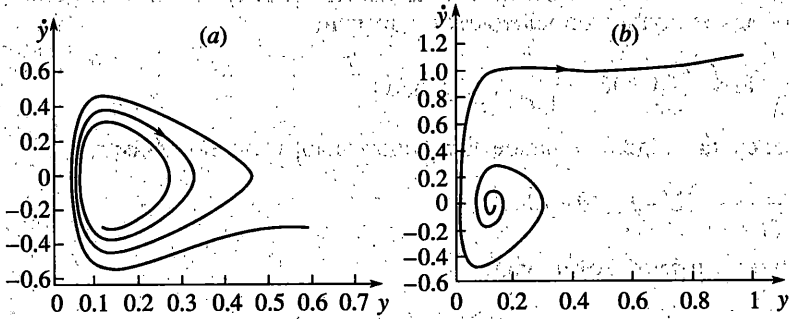
Уравнение движения свободного кольца во втором приближении принимает вид:

$$\ddot{y} + \varepsilon^2 \frac{\gamma r(1-r^2)}{2(1+r^2)^2} \left(\frac{dL_e}{dy} \right)^2 \dot{y} - \varepsilon^2 \left((U - L_e) \frac{\gamma}{2(1+r^2)} \frac{dL_e}{dy} + 1 \right) = 0 \quad (1.15)$$

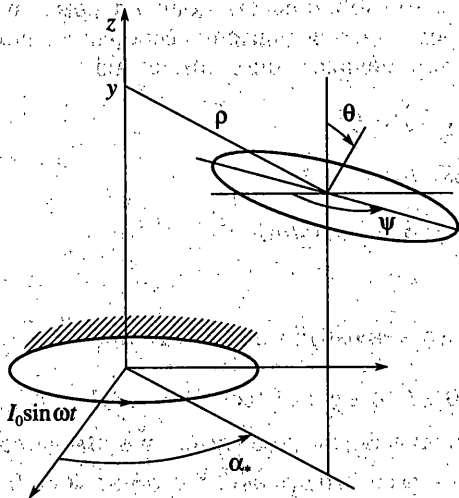
Из (1.15) следует, что при $r < 1$ в рассматриваемой системе присутствует диссипативное слагаемое. В этом случае положение равновесия становится устойчивым фокусом (фиг. 4, а). Если $r > 1$, то осуществить устойчивый подвес свободного кольца невозможно – оба положения равновесия оказываются неустойчивыми (фиг. 4, б).

2. Свободный подвес. Рассмотрим случай, когда движения подвешиваемого кольца ничем не ограничены и, соответственно, оно имеет шесть степеней свободы: ρ , α_* и y – координаты центра свободного кольца в цилиндрической системе координат, начало которой находится в центре закрепленного кольца (фиг. 5), θ , ψ и ϕ – эйлеровы углы, характеризующие взаимную ориентацию колец. Кинетическая, потенциальная энергия и энергия магнитного поля в принятых обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\alpha}_*^2 + m\dot{y}^2) + I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_2(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \\ \Pi &= \pm mgy, \quad W = \frac{1}{2}Li^2 + iL_e(\rho, \theta, y, \alpha_* - \psi)I_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Здесь I_1 и I_2 – моменты инерции относительно вертикальной и горизонтальной осей симметрии соответственно.

Коэффициент взаимной индукции в случае произвольной взаимной ориентации колец определяется интегралом

$$L_e = \frac{\mu_0 a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{k \rho_*^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] (\cos \theta + \rho (\sin \alpha \sin(\alpha_* - \psi) + \cos \alpha \cos \theta \cos(\alpha_* - \psi))) d\alpha \quad (2.2)$$

$$k^2 = \frac{4\rho_*}{(1 + \rho_*)^2 + z^2}, \quad z = \sin \alpha \sin \theta + \frac{y}{a}, \quad (2.3)$$

$$\rho_* = \left(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta + \frac{\rho}{a} \left(\frac{\rho}{a} + 2 \cos \alpha \cos(\alpha_* - \psi) + 2 \sin \alpha \cos \theta \sin(\alpha_* - \psi) \right) \right)^{1/2}$$

В первом приближении вектор безразмерных электромагнитных сил, действующих на свободное кольцо определяется формулой

$$P_W = \gamma \left(\sin \tau \left(\frac{\partial L_e}{\partial \xi} \right)^T i_0 \right) \xi = \left[\frac{\rho}{a}, \theta, \frac{y}{a}, \psi, \phi, \alpha_* \right]^T$$

Подставляя сюда найденное ранее значение тока i_0 (1.6), получим

$$P_W = \frac{\gamma}{2(1+r^2)} (U - L_e) \left(\frac{\partial L_e}{\partial \xi} \right)^T \quad (2.4)$$

Эти силы также имеют потенциал

$$\Pi_W = \Pi_W(\rho, \theta, y, \alpha_* - \psi) = -\frac{\gamma}{2(1+r^2)} \left(UL_e - \frac{L_e^2}{2} \right) \quad (2.5)$$

Так как приведенная потенциальная энергия $\Pi_\Sigma = \Pi + mga\Pi_W$ содержит углы α_* и ψ только в виде разности, то удобно ввести новую переменную $\sigma = \alpha_* - \psi$. Система уравнений Лагранжа, определяющая движения свободного кольца в поле закрепленного кольца с заданным переменным током, имеет вид

$$\begin{aligned} I_2(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) &= -\partial \Pi_\Sigma / \partial \phi = 0 \\ m\ddot{\rho} - m\rho(\dot{\sigma} + \dot{\psi})^2 &= -\partial \Pi_\Sigma / \partial \rho \\ m\rho^2(\ddot{\sigma} + \ddot{\psi}) + 2m(\dot{\sigma} + \dot{\psi})\rho\dot{\rho} &= -\partial \Pi_\Sigma / \partial \sigma \\ m\ddot{y} &= -\partial \Pi_\Sigma / \partial y \\ I_1\ddot{\theta} - I_1\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_2(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)\dot{\psi} \sin \theta &= -\partial \Pi_\Sigma / \partial \theta \\ (m\rho^2(\dot{\sigma} + \dot{\psi}) + I_1\dot{\psi} \sin^2 \theta + I_2(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta) &= -\partial \Pi_\Sigma / \partial \psi = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

В ней присутствуют две циклические переменные: ϕ и ψ . Вводя, соответственно, два обобщенных импульса $p_1 = I_2(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)$ и $p_2 = m\rho^2(\dot{\sigma} + \dot{\psi}) + I_1\dot{\psi} \sin^2 \theta + I_2(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta$, получим безразмерную потенциальную энергию, измененную по Раусу

$$\Pi_R = -\frac{\gamma}{2(1+r^2)} \left[UL_e - \frac{L_e^2(\rho, \theta, y, \sigma)}{2} \right] \pm y - \frac{1}{2} \frac{(p_1 - p_2 \cos \theta)^2}{(ma^2\rho^2 + I_1 \sin^2 \theta) mga} \quad (2.7)$$

где y и ρ – безразмерные величины (отнесенные к радиусу колец). Положения равновесия определяются из условия $\partial \Pi_R / \partial \xi = 0$. Исходя из симметрии задачи, следует заключить, что положения равновесия могут находиться только на оси z (фиг. 5), следовательно, данное условие может быть переписано в виде $\partial \Pi_R / \partial y|_{\rho=0, \theta=0, \sigma=0} = 0$. Как было показано ранее, это условие при $0 < U < 1$ определяет два положения равновесия под закрепленным кольцом и одно положение равновесия над закрепленным кольцом (при значениях параметра $U < 1$). Найдем параметрические границы устойчивости возможных положений равновесия по всем координатам.

Устойчивому положению равновесия отвечает минимум потенциальной энергии, который характеризуется положительной определенностью матрицы вторых производных энергии, измененной по Раусу, что выполняется при условии:

$$\frac{d\Pi_R^2}{d\xi^2} = \frac{\partial \Pi_R^2}{\partial L_e^2} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \xi^2} > 0$$

Необходимо определить значения $\partial L_e / \partial \xi$ и $\partial^2 L_e / \partial \xi^2$ в исследуемых положениях равновесия. Используя выражение (2.2), находим

$$\left. \frac{\partial L_e}{\partial \rho} \right|_0 = \left. \frac{\partial L_e}{\partial \theta} \right|_0 = \left. \frac{\partial L_e}{\partial \sigma} \right|_0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \sigma^2} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \sigma \partial \rho} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \sigma \partial \theta} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \sigma \partial y} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho \partial y} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \theta \partial y} \right|_0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial L_e}{\partial y} \right|_0 = \frac{\lambda}{2(1-k^2)^{1/2}} [(2-k^2)E - 2(1-k^2)K]$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho^2} \right|_0 = \frac{\lambda k^3}{8(1-k^2)} [(1-2k^2)E - (1-k^2)K] \quad (2.8)$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho \partial \theta} \right|_0 = \frac{\lambda \sin \sigma}{8(1-k^2)^{1/2}} [(4-k^2-2k^4)E + (-4+3k^2+k^4)K]$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial y^2} \right|_0 = \frac{\lambda k^3}{4(1-k^2)} [(1-k^2)K - (1-2k^2)E]$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \theta^2} \right|_0 = \frac{\lambda k}{8(1-k^2)} [(2-3k^2+2k^4)E + (-2+3k^2-k^4)K]$$

$$\lambda = \mu_0 a / L, \quad k^2|_0 = 4/(4+y^2)$$

где $|_0$ — означает, что значения функции берутся при $\rho = 0, \theta = 0, \sigma = 0$.

Воспользуемся теоремой Рауса об устойчивости, считая $p_1 = p_2 = 0$. Вторые производные измененной потенциальной энергии при нулевых обобщенных импульсах с учетом (2.8) могут быть записаны в общем виде

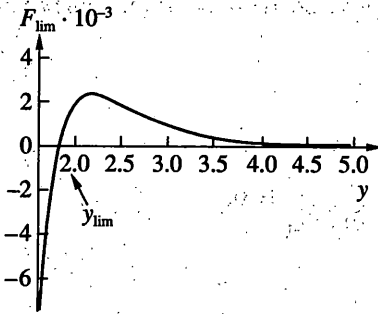
$$\left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial \rho^2} \right|_0 = \left. \frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho^2} \right|_0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial \rho \partial \theta} \right|_0 = \left. \frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho \partial \theta} \right|_0, \quad \left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial \theta^2} \right|_0 = \left. \frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \theta^2} \right|_0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial y^2} \right|_0 = \left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial L_e^2} \left(\frac{\partial L_e}{\partial y} \right)^2 \right|_0 + \left. \frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial y^2} \right|_0$$

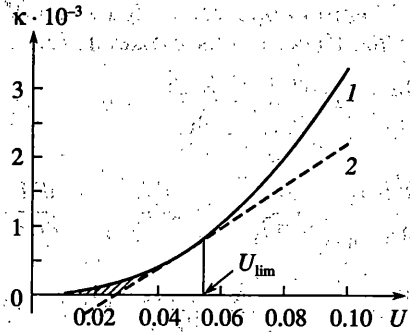
Поскольку положения равновесия являются “безразличными” по σ , то для устойчивости подвешиваемого кольца необходимо и достаточно выполнения условий

$$(1) \left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial \rho^2} \right|_0 > 0, \quad (2) \left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial \rho \partial \theta} \right)^2 \right|_0 > 0, \quad (3) \left. \frac{\partial^2 \Pi_R}{\partial y^2} \right|_0 > 0 \quad (2.10)$$

Условие (3), как уже было показано, устанавливает, что положение равновесия над закрепленным кольцом устойчиво “по y ” при всех параметрах, при которых оно существует ($U < 1$), а соответствующая устойчивость положения равновесия под закрепленным кольцом достигается только при $0 < U < 1$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Так как $\partial L_e / \partial \rho = 0$, то условие (1) может быть переписано в виде $\partial \Pi_R / \partial L_e \partial^2 L_e / \partial \rho^2 |_0 > 0$. Для одинаковых колец $\partial^2 L_e / \partial \rho^2 |_0 < 0$ при всех значениях y . Поскольку в верхнем (над закрепленным кольцом) положении равновесия $\partial \Pi_R / \partial L_e > 0$, то условие (1) не выполняется ни при каких параметрах и, следовательно, невозможно добиться его полной устойчивости.

В нижнем, устойчивом по y , положении равновесия, наоборот, $\partial \Pi_R / \partial L_e < 0$ и, следовательно, это положение оказывается устойчивым "по ρ " при любых параметрах.

Условие (2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho^2} \frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial \Pi_R}{\partial L_e} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho \partial \theta} \right)^2 > 0$$

и, следовательно, должно выполняться соотношение

$$F_{lim}(y_*) = \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 L_e}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho \partial \theta} \right)^2 > 0$$

Это неравенство не зависит явно от параметров U и κ , однако, оно зависит от y_* — координаты положения равновесия. График этой зависимости приведен на фиг. 6.

Как показывают вычисления, критическое значение y , которое определяет зону устойчивости по θ : $y_{lim} = 1.9029$, при $y_* > y_{lim}$ равновесное состояние будет устойчиво. На фиг. 7 приведены параметрические границы существования устойчивого положения равновесия подвешиваемого кольца: 1 — граница существования положения равновесия ($\max[(U - L_e) \partial L_e / \partial y] = \kappa$); 2 — условие $y_* = y_{lim}$.

Рассмотрим числовой пример. Пусть кольца имеют радиус $a = 10$ см и диаметр поперечного сечения $b = 1$ мм. Возьмем параметры, при которых можно устойчиво (по всем координатам) подвесить наибольший груз: $U = 0.02$; $\kappa = 5 \cdot 10^{-5}$. Определим силу тока, которая необходима для того, чтобы подвесить груз в 10 г. Полагая, что параметр r близок к 1, получим силу тока $I \approx 10$ кА. Из этих вычислений видно, что для того, чтобы устойчиво свободно подвесить даже такой небольшой груз, требуется большой переменный ток.

3. Подвес с кольцами разного радиуса. Поскольку физически неустойчивость по θ связана с существенной неоднородностью магнитного поля вблизи закрепленного кольца, можно попытаться уменьшить влияние этой неоднородности, рассмотрев систему, в которой закрепленное кольцо имеет больший радиус, чем подвешиваемое. Обо-

значим отношение радиусов колец $\eta = a_2/a_1 > 1$ (a_1 – радиус свободного кольца, a_2 – радиус закрепленного кольца). В случае колец разного радиуса коэффициент взаимной индукции и его производные принимают вид

$$L_e = \frac{\mu_0 a_1 \sqrt{\eta}^{2\pi}}{\pi} \int_0^{\frac{1}{k\rho_*^{3/2}}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] (\cos\theta + \rho(\sin\alpha \sin\sigma + \cos\alpha \cos\theta \cos\sigma)) d\alpha \quad (3.1)$$

$$k^2 = \frac{4\eta\rho_*}{(\gamma + \rho_*)^2 + z^2}$$

(все размерные координаты отнесены к радиусу a_1).

$$\left. \frac{\partial L_e}{\partial y} \right|_0 = \frac{\lambda(1-k^2)^{3/2}}{2\eta} [(2-k^2)E - 2(1-k^2)K]$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho^2} \right|_0 = \frac{\lambda k^3}{8\sqrt{\eta}} \left[(1-k^2)K - (1+k^2)E + \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} [(1-k^2)(2-k^2)(E-K) + k^2(1+k^2)E] \right]$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \rho \partial \theta} \right|_0 = \frac{\lambda y k \sin\sigma}{32\sqrt{\eta}} \left[(8 - 16k^2 + 7k^4 + k^6)K - (8 - 12k^2 + 2k^6)E - \frac{k^2}{\eta} [2(1-k^2+k^4)E - (2-3k^2+k^4)K] \right] \quad (3.2)$$

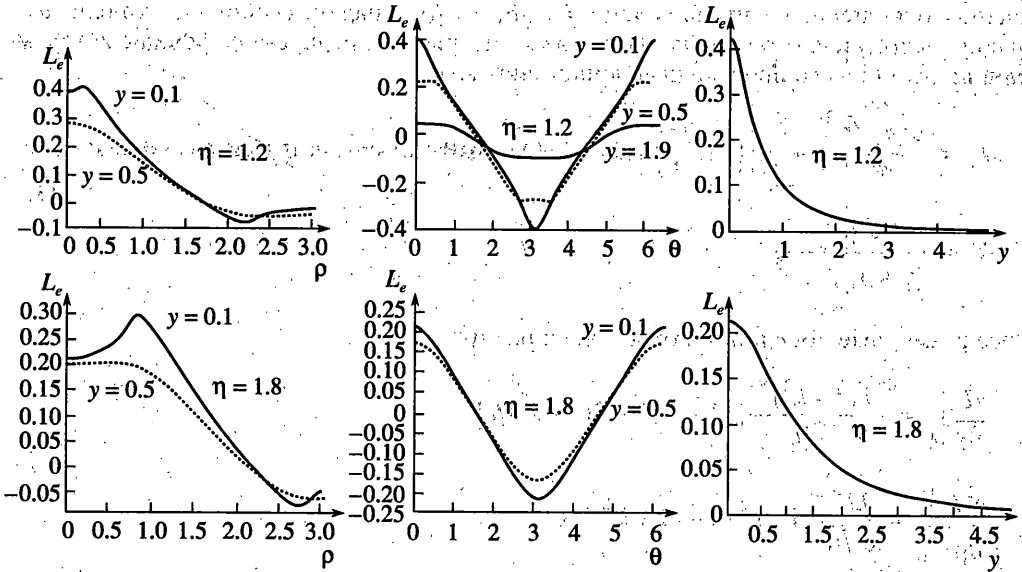
$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial y^2} \right|_0 = \frac{\lambda k^3}{4\sqrt{\eta}} \left[(1+k^2)E - (1-k^2)K - \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} [(1-k^2)(2-k^2)(E-K) + k^2(1+k^2)E] \right]$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_e}{\partial \theta^2} \right|_0 = \frac{\lambda \sqrt{\eta} k^3}{8} \left[(1-k^2)E - \frac{y^2}{4\eta^2} [2(1-k^2+k^4)E - (2-3k^2+k^4)K] \right]$$

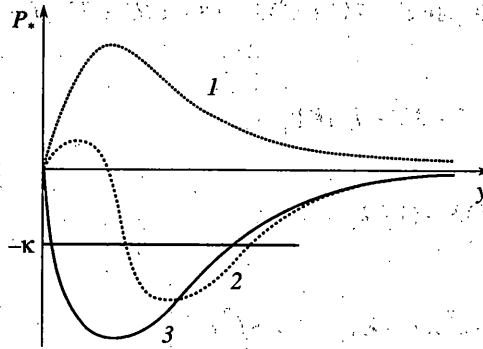
$$\lambda = \mu_0 a_1 / (1-k^2)^2$$

На фиг. 8 приведены зависимости L_e от ρ , θ и y при различных значениях η .

Из этих графиков видно, что при любых y : $\partial L_e / \partial y|_0 = 0$ (в отличие от случая одинаковых колец, когда $\partial L_e / \partial y|_0 = -\infty$). Используя это свойство, можно построить качественные зависимости безразмерной электромагнитной силы ($P_* = P_{\text{вк}}$) от y при различных U (фиг. 9). Кривая 1 соответствует случаю $U < 0$, при этом положений равновесия не существует; кривая 2 $-0 < U < L_{e*}$ ($L_{e*} = L_e/L_{1|0}$) и кривая 3 $U > L_{e*}$ соответствуют случаю, когда существуют два равновесных положения под закрепленным кольцом, из которых ближнее к закрепленному кольцу устойчиво, а дальнее – неустойчиво.



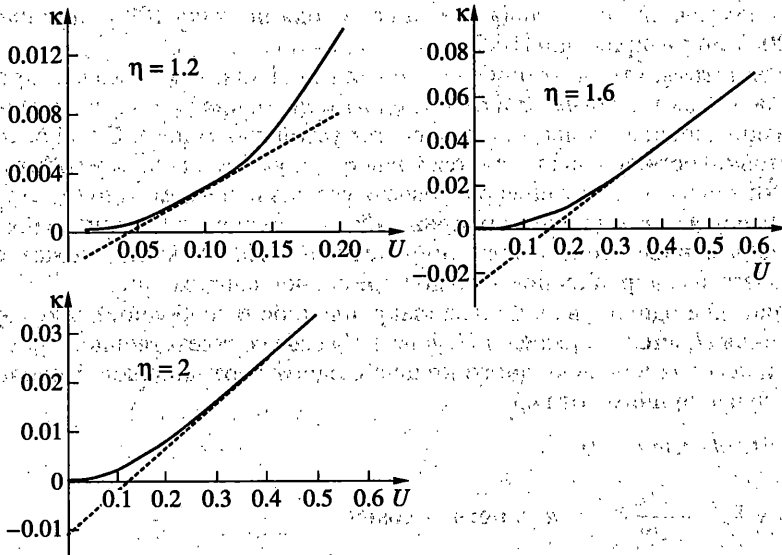
Фиг. 8



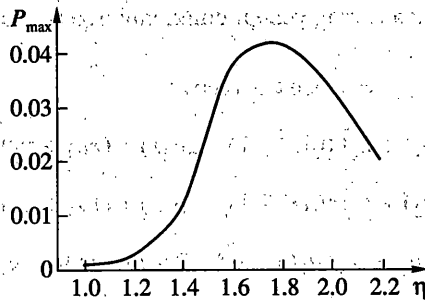
Фиг. 9

Условие устойчивости (1) в (2.10) выполняется при $\partial^2 L_e / \partial \rho^2 < 0$. Оно определяет критическое значение $y_p(U, k, \eta)$. При $y > y_p$ нижнее положение равновесия оказывается устойчивым "по ρ ", при $y < y_p$ — неустойчивым. Условие (2) определяет другое критическое значение y_θ , которое отвечает границе устойчивости по θ . Как показали численные исследования $y_\theta > y_p$ при всех рассматриваемых η ($1 \leq \eta \leq 2$).

На фиг. 10 приведены границы существования устойчивого положения равновесия при различных значениях η . Из него видно, что чем больше η , тем больше параметрическая область устойчивости, однако при одних и тех же значениях U возможный подвешиваемый груз становится меньше. Кроме того, при росте η , начиная с некоторого значения, устойчивая область увеличивается незначительно — при существенном увеличении устойчивого диапазона по U , соответствующий диапазон по k ничтожно мал.



Фиг. 10



Фиг. 11

Дальнейшее увеличение разницы радиусов колец не приведет к лучшим результатам, так как максимальная электромагнитная сила, достижимая в области устойчивости, имеет существенно нелинейный характер зависимости от η и при $\eta > 1.8$ начинает убывать, то есть устойчиво может быть подвешен при больших η меньший груз (фиг. 11).

Рассмотрим числовой пример. Пусть подвешиваемое кольцо имеет те же геометрические размеры, что и ранее, а отношение радиусов $\eta = 1.8$. В этом случае выберем параметры для устойчивой подвески кольца: $U = 0.3$, $k \approx 0.02$. При таких параметрах сила тока, необходимая для удержания груза в 10 г оказывается равной $I \approx 1$ кА, а напряжение в свободном кольце $U_c \sim U_s \approx 0.15$ В. Таким образом, путем увеличения радиуса удерживающего кольца удастся снизить силу тока на порядок, однако она все равно остается слишком большой. Тем не менее, поскольку при различных радиусах колец устойчивое по u положение равновесия существует и при больших U , можно устойчиво подвесить любой груз, имеющий одну степень свободы, но на меньшем расстоянии, подавая меньший ток. Например, чтобы зафиксировать вес 10 г на расстоя-

нии 6 см от закрепленного кольца нужна сила тока порядка 100 А при напряжении 5 В, либо 20 А при напряжении 10 В.

Следует заметить, что, в отличие от случая двух одинаковых колец, производная $\partial^2 L_e / \partial \rho^2$ меняет знак в зависимости от y , следовательно, при $y_* < y_{pg}$ положение равновесия над закрепленным кольцом оказывается устойчивым по ρ . Однако, условие (2) из (2.10) устойчивости по θ выполняется только при $y_* > y_{\theta g}$, поэтому добиться полной устойчивости верхнего положения равновесия все равно невозможно ($y_{\theta g} > y_{pg}$).

4. Модель подвеса с заданными напряжениями. Техническая реализация подвеса с заданным переменным током достаточно сложна. На практике может оказаться проще подавать на закрепленное кольцо переменное напряжение.

Рассмотрим два одинаковых кольца (закрепленное и свободное), в которых заданы напряжения $U_1 \sin \omega t + V_1 \cos \omega t$ и $U_2 \sin \omega t + V_2 \cos \omega t$ соответственно. Уравнения Лагранжа – Максвелла для свободного кольца с одной вертикальной степенью свободы в этом случае принимают вид

$$m\ddot{y} - i_1 i_2 dL_e / dy \pm mg = 0$$

$$Li_1 + Ri_1 + L_e i_2 + \frac{dL_e}{dy} y i_2 = u_1 \sin \omega t + v_1 \cos \omega t \quad (4.1)$$

$$Li_2 + Ri_2 + L_e i_1 + \frac{dL_e}{dy} y i_1 = u_2 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t$$

Вводя безразмерное время $\tau = \omega t$, малый параметр $\epsilon = g/(a\omega^2)$, обезразмеривая уравнения (28) и затем применяя метод усреднения, как это было сделано ранее, получим в первом приближении:

$$i_{01} = c_1 \sin \tau + d_1 \cos \tau, \quad i_{02} = c_2 \sin \tau + d_2 \cos \tau \quad (4.2)$$

$$c_1 = [L_e^3 v_2 + L_e^2 (ru_1 - v_1) + L_e (v_2 (r^2 - 1) - 2u_2 r) + (ru_1 + v_1)(1 + r^2)] / \Delta$$

$$c_2 = [L_e^3 v_1 + L_e^2 (ru_2 - v_2) + L_e (v_1 (r^2 - 1) - 2u_1 r) + (ru_2 + v_2)(1 + r^2)] / \Delta$$

$$d_1 = [-L_e^3 u_2 + L_e^2 (rv_1 + u_1) + L_e (u_2 (1 - r^2) - 2v_2 r) + (rv_1 - u_1)(1 + r^2)] / \Delta \quad (4.3)$$

$$d_2 = [-L_e^3 u_1 + L_e^2 (rv_2 + u_2) + L_e (u_1 (1 - r^2) - 2v_1 r) + (rv_2 - u_2)(1 + r^2)] / \Delta$$

$$\Delta = (L_e^2 + r^2 - 1)^2 + 4r^2$$

Все параметры в (4.3) определяются так же как и ранее, за исключением того, что i_* теперь обозначает некоторый базисный ток.

Используя найденные выражения для токов, можно определить среднюю электромагнитную силу, действующую на свободное кольцо

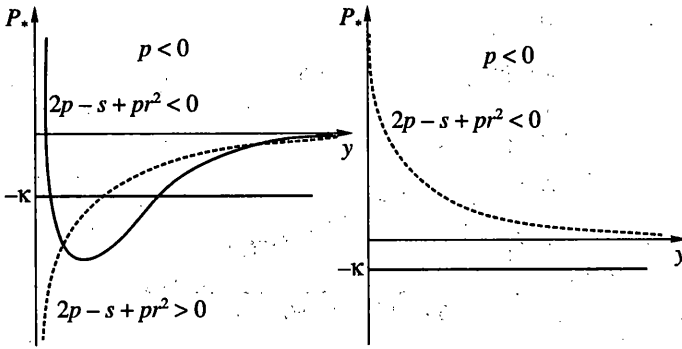
$$P = \gamma \left\langle i_1 i_2 \frac{dL_e}{dy} \right\rangle = \frac{\gamma}{2} \frac{dL_e}{dy} [c_1 c_2 + d_1 d_2] = \frac{\gamma}{2\Delta} (pL_e^2 - sL_e + p(1 + r^2)) \frac{dL_e}{dy} \quad (4.4)$$

$$p = u_1 u_2 + v_1 v_2, \quad s = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2$$

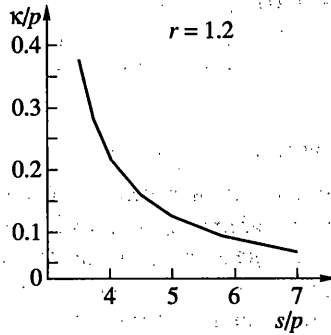
В зависимости от соотношения параметров p , s и r эта сила может иметь качественно разный характер (фиг. 12).

Положения равновесия определяются уравнением

$$-(pL_e^2 - sL_e + p(1 + r^2)) \frac{1}{\Delta} \frac{dL_e}{dy} \pm \kappa = 0, \quad \kappa = \frac{2mga}{L_*^2} \quad (4.5)$$



Фиг. 12



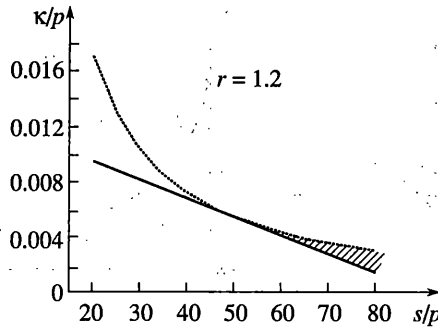
Фиг. 13

Для существования положения равновесия свободного кольца над закрепленным необходимо, чтобы выполнялось ограничение, накладываемое на величины напряжений $pL_e^2 - sL_e + p(1 + r^2) < 0$, это возможно только при двух условиях: $s^2 - 4p^2(1 + r^2) > 0$ – дискриминант квадратного полинома по L_e положителен (L_e должно быть вещественным) и

$$0 < \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p^2(1 + r^2)}}{2p} < 1$$

поскольку L_e должна находиться в этих пределах в силу своего физического смысла. Эти два условия сводятся к одному: $s/2p > 1 + r^2/2$ при $p > 0$ и $s/2p < 1 + r^2/2$ при $p < 0$. Первое неравенство (при $p > 0$) оказывается необходимым условием существования двух положений равновесия в случае, когда подвешиваемое кольцо находится снизу. Если оно не выполняется, то для подвешиваемого кольца имеется только одно равновесное положение, которое является неустойчивым. На фиг. 13 приведена зависимость κ/p от s/p , определяющая границу существования устойчивого по y положения равновесия под закрепленным кольцом.

Для исследования полной (по всем координатам) устойчивости подвешенного кольца можно воспользоваться полученными ранее уравнениями (2.6), с той лишь



Фиг. 14

разницей, что теперь потенциал электромагнитных сил Π_W имеет более сложный, чем ранее, характер зависимости от L_e :

$$\Pi_W = -\frac{\gamma}{8r}(2p-s)\arctan\frac{L_e-1}{r} + (2p+s)\arctan\frac{L_e+1}{r} \quad (4.6)$$

Исходя из того, что в устойчивом положении равновесия $pL_e^2 - sL_e + p(1+r^2) > 0$ и $\partial^2 L_e / \partial p^2 < 0$ (в силу свойств коэффициента взаимной индукции одинаковых колец), можно заключить наличие устойчивости по ρ при всех допустимых параметрах. Выполнение условия (2) из (2.10) определяет критическое значение y_{lim} , по которому с помощью (4.5) восстанавливается соответствующая зависимость κ/p от s/p , отвечающая границе полной устойчивости (фиг. 14) (область устойчивости отмечена штриховкой)).

Числовые расчеты показывают, что несмотря на то, что для устойчивого подвеса груза требуются небольшие напряжения, токи в кольцах все равно оказываются слишком велики. Однако, как и в случае колец с заданным током, исключение поворотной степени свободы приводит к значительному снижению требуемой силы тока и, соответственно, к возможности практической реализации подобной конструкции. Кроме того, увеличения подъемной электромагнитной силы можно достичь, если в качестве стационарного, запитываемого током (или напряжением) элемента использовать не одно кольцо, а систему нескольких последовательно соединенных колец, вложенных друг в друга наподобие спирали.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00074).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козарез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел. Киев: Наук. думка, 1981. 140 с.
2. Реймерс Н.А., Хождаев К.Ш. Усреднение квазилинейных систем со многими быстрыми переменными // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 8. С. 1388–1399.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
5.04.2002