

© 2005 г. **В.Н. ВОРОНКОВ**

**МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СЛОЖНЫХ
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Рассматриваются собственные колебания сложной системы, подсистемы которой взаимодействуют в конечном числе точек. Считается, что система и ее подсистемы описываются обыкновенными самоспряженными линейными дифференциальными операторами с дискретным спектром. Связи между подсистемами задаются линейными однородными дифференциальными соотношениями.

Решается задача о синтезе собственных частот и форм колебаний системы по заданным собственным функциям подсистем. Предлагается эффективный численно-аналитический метод решения задачи, при котором решение ищется в виде рядов по собственным функциям подсистем. Для учета действия локальных связей между подсистемами вводятся корректирующие функции, что позволяет получать решение в виде быстроходящихся рядов. Метод разработан для определения собственных динамических характеристик конструкций ракетно-космической техники. Приведен пример расчета модели такой конструкции.

1. Введение. Рассматриваются собственные колебания сложной системы, состоящей из конечного числа одномерных континуальных подсистем. Под сложной будем понимать систему, изучение которой в целом значительно труднее, чем получение соответствующих характеристик подсистем, которое может быть осуществлено сравнительно просто существующими методами. Поэтому собственные характеристики (частоты и формы колебаний) подсистем предполагаются известными и будут рассматриваться только вопросы, связанные с колебаниями системы в целом.

Рассматривается система, взаимодействие между подсистемами которой происходит в дискретных точках. Декомпозиция системы производится путем представления ее колебаний в виде линейной комбинации откликов отдельных подсистем на единичное гармоническое воздействие. Синтез системы осуществляется на основе использования соотношений связи между подсистемами.

Отклики ищутся в виде рядов по формам собственных колебаний подсистем. Локальный характер связей обуславливает наличие разрывов (типа конечного скачка) как у величин, связанных с движением системы (для механических систем – сил и моментов), так и у гармонических откликов. Разрывы в точках действия связей обуславливают плохую сходимости этих рядов. Для улучшения сходимости разложений особенности, возникающие в этих точках, выделяются отдельно путем введения функций, называемых корректирующими. Формулируются краевые задачи для нахождения корректирующих функций и разрабатываются специальные численные методы их расчета.

Выбор системы с дискретным взаимодействием обусловлен характером прикладной задачи, для решения которой создавался метод. В отличие от более общих систем с распределенными параметрами [1, 2], в таких системах обязательно возникают разрывные величины. Основа для использования рядов при нахождении разрывных величин заложена в работах А.Н. Крылова [3]. Дальнейшее развитие метод выделения особенно-

стей рядов получил в работах [1, 4–7] при решении различных задач математической физики.

В настоящее время имеются различные методы и программы нахождения динамических характеристик сложных конструкций. Они базируются, как правило, на использовании методов конечных элементов или начальных параметров и предназначены, в основном, для анализа системы в целом. Предлагаемый метод специально ориентирован на исследование конструкции по частям и последовательное наращивание ее по блокам.

В качестве примера метод применен при расчете динамических характеристик модели конструкции ракетно-космической техники. Получены частотные уравнения, определены коэффициенты разложения и произведены расчеты собственных частот и форм объекта.

2. Общая схема метода решения. 2.1. Математическая постановка задачи. Предполагается, что рассматриваемые системы в целом и ее подсистемы описываются самосопряженными линейными дифференциальными операторами с дискретным спектром, а связи задаются линейными однородными дифференциальными соотношениями, порядок которых менее порядков операторов.

Рассматривается задача об определении собственных чисел и собственных функций сложной системы, состоящей из N подсистем

$$Lu - \lambda u = 0, \quad Mu|_{\Gamma} = 0, \quad M_p u|_{\Gamma_p} = 0 \quad (2.1)$$

где L – оператор, описывающий колебания системы, $u(u_1, u_2, \dots, u_N)$ – вектор состояний системы, составленный из векторов состояний отдельных подсистем, λ – собственное число краевой задачи (2.1). Оператор L задается линейным дифференциальным выражением Lu , оператором краевых условий M , заданным на совокупности граничных точек Γ , и оператором M_p условий связи между подсистемами, заданным на множестве точек Γ_p . Предполагается, что множество точек Γ_p состоит из конечного числа точек x_p , где i – номер подсистемы.

2.2. Декомпозиция задачи. Пусть R_m – линейное m -мерное пространство, $D \subset R_m$ – область определения оператора L . Оператор L описывает систему в следующем смысле: исходное пространство разбивается в прямую сумму N подпространств $R_m = R_{m_1} + R_{m_2} + \dots + R_{m_N}$, в каждом из подпространств оператор системы L индуцирует оператор L_i . Операторы L_i задаются дифференциальными выражениями $L_i u_i$ и краевыми условиями $M_i u_i|_{\Gamma_i}$, $u_i \in D_{L_i}$ ($i = \overline{1, N}$). В точках множества Γ_{p_i} заданы условия связи с другими подсистемами, которые выражены через линейные формы решения и его производных в этих точках.

Введем понятие гармонического отклика i -ой подсистемы на единичное воздействие величины, определяемой оператором V . Отклик задается в точке x_p на частоте $\omega = \sqrt{\lambda}$ как решения следующей краевой задачи:

$$L_i \Phi - \lambda \Phi = 0, \quad M_i \Phi|_{\Gamma_i} = 0, \quad V \Phi|_{x_p}^{x_p+0} = 1 \quad (2.2)$$

где V – оператор, порядок которого меньше порядка оператора L_i , $x_p \in \Gamma_{p_i}$, λ – параметр. Каждую компоненту вектора $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ решения задачи (2.1) представим в виде линейной комбинации гармонических откликов

$$u_i(x) = \sum_{p,r} Q_p^r \Phi_p^r(\lambda, x) \quad (i = \overline{1, N}) \quad (2.3)$$

2.3. *Синтез системы.* Для нахождения собственных чисел исходной задачи будем использовать соотношения связи, заданные в последнем из условий (2.1). Ранее, в (2.3), каждая компонента вектора состояний системы $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ была представлена в виде линейной комбинации гармонических откликов. Решение в виде (2.3) удовлетворяет уравнению и краевым условиям задачи (2.1); остается удовлетворить условиям связи. Подставим общее решение (2.3) в условия связи задачи (2.1). В силу того, что M – линейные однородные операторы, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Q :

$$Mu|_{\Gamma_p} = M \left[\sum_{p,r}^1 Q_p^r \Phi_p^r(\lambda, x), \dots, \sum_{p,r}^N Q_p^r \Phi_p^r(\lambda, x) \right] \Big|_{\Gamma_p} = 0 \quad (2.4)$$

$$= \sum_{p,r} Q_p^r M[\Phi_p^r(\lambda, x)] \Big|_{\Gamma_p} = B(\lambda)Q = 0$$

где $B(\lambda)$ – квадратная матрица, Q – вектор, размерность которого обозначим через N_Q . Здесь Q – числа, значение которых будет определено позднее, λ – собственное число задачи (2.1), индексом p занумерованы все точки связей $\Gamma_p \in \Gamma_p$, а индексом r – все виды откликов, встречающихся в соотношениях связи. Эта система уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель обращается в нуль

$$\text{Det}[B(\lambda)] = 0 \quad (2.5)$$

3. Нахождение откликов с помощью быстросходящихся рядов. 3.1. *Введение корректирующей функции.* Нахождение гармонических откликов в общем случае является сложной математической задачей. Для частного случая поперечных колебаний она рассматривается, например, в [1, 5]. Рассмотрим достаточно общий случай, когда как к оператору системы L , так и операторам подсистем L_i предъявляется лишь требование самосопряженности. В этом случае гармонические отклики могут быть разложены по собственным функциям отдельных подсистем.

Пусть H_m – гильбертово пространство m -мерных вектор-функций со скалярным произведением (u, v) , $u, v \in H_m$ и $H_m = H_{m_1} + H_{m_2} + \dots + H_{m_n}$, где H_m – прямая сумма подпространств H_{m_i} ($i = \overline{1, N}$), со скалярными произведениями (u_i, v_i) , $u_i, v_i \in H_{m_i}$. Пусть введенные выше операторы L и L_i – самосопряженные операторы с областями определения $D \subset H$ и $D_i \subset H_{m_i}$. Тогда [9] всякая функция $u_i \in D_i$ может быть разложена в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям оператора L_i :

$$u_i = \sum_k^i S_k^i \Phi_k$$

где функции Φ_k являются решениями краевых задач, определяющих собственные функции отдельных подсистем.

$$L_i \Phi - \mu \Phi = 0, \quad M_i \Phi|_{\Gamma_i} = 0 \quad (3.1)$$

Гармонические отклики Φ , определенные в (2.2), не входят в области самосопряженности операторов L_i из-за особенностей, вызываемых наличием единичного

скачка в точках x_p . Для компенсации этих особенностей введем корректирующие функции f , такие, что разности $(\Phi - f) \in D_i$ (если речь идет о величинах, связанных с i -й подсистемой, и нет возможности ошибиться, индекс i у этих величин будем опускать).

Тогда каждый отклик может быть разложен в ряд

$$\Phi(x) = f(x) + \sum_{\mu_k = 0} S_k \Phi_k(x) + \sum_{\mu_k \neq 0} S_k \Phi_k(x) \quad (3.2)$$

Введение в разложение корректирующих функций существенно расширяет возможности метода. С их помощью можно:

решать краевую задачу (2.1) с измененными краевыми условиями путем разложения по собственным функциям (3.1) с прежними краевыми условиями, введя на краях соответствующие корректирующие функции [6];

часть соотношений, входящих в состав дифференциального выражения и заданных в отдельных точках, отнести в условия связи, задав в этих точках соответствующие корректирующие функции;

ускорять [6, 7] сходимость рядов (3.2).

Подставляя разложения (3.2) в уравнения задач (2.2) и используя ортогональность функций (3.1), определим коэффициенты S_k :

$$S_k = \frac{(L f, \Phi_k) - \lambda(f, \Phi_k)}{(\lambda - \mu_k) \|\Phi_k\|^2} \quad (3.3)$$

Выберем корректирующие функции f так, чтобы максимально упростить формулы для коэффициентов разложения S_k и улучшить сходимость рядов в (3.2).

$$(L_i f, \Phi_k) = 0, \quad \mu_k \neq 0, \quad M f|_{\Gamma_i} = 0 \quad (3.4)$$

$$V f|_{x_p-0}^{x_p+0} = 1, \quad (f, \Phi_k) = 0, \quad \mu_k = 0$$

Корректирующие функции, определяемые краевыми задачами (3.4), являются обобщением функций Грина дифференциальных операторов L_i и отличаются тем, что для каждого оператора L_i можно построить несколько различных корректирующих функций в зависимости от вида оператора V . Кроме того, корректирующие функции, имеющие особенность в точке x_p , являются значениями соответствующих функций Грина $g(x, \xi)$, вычисленных в конечном числе точек $\xi = x_p$:

$$f_p(x) = g(x, \xi)|_{\xi = x_p}$$

Заметим, что, в отличие от гармонического отклика $\Phi(\lambda, x)$, корректирующая функция $f(x)$ не зависит от λ .

3.2. Определение коэффициентов разложений. Применим корректирующие функции для ускорения сходимости рядов (3.2). Ввиду полноты системы функций Φ_k из первого равенства задачи (3.4) следует, что

$$L_i f = \sum_{\mu_k = 0} A_{ik} \Phi_k \quad (3.5)$$

где A_{ik} – константы, значения которых однозначно определяются задачей (3.4). Их можно вычислить, используя формулу Лагранжа и оставшиеся условия краевой задачи для конкретных видов операторов L_i .

Формулы (3.3) преобразуем с учетом соотношений (3.4), (3.5):

$$S_k = \frac{(L_i f, \Phi_k)}{\lambda \|\Phi_k\|^2} = \frac{\sum_{\mu_j=0} A_{ij}(\Phi_j, \Phi_k)}{\lambda \|\Phi_k\|^2} = \frac{R_{ik}}{\lambda \|\Phi_k\|^2}, \quad \mu_k = 0 \quad (3.6)$$

$$S_k = -\frac{\lambda}{(\lambda - \mu_k)} \frac{(f, \Phi_k)}{\|\Phi_k\|^2}, \quad \mu_k \neq 0$$

Используя условия задач (3.1) и соотношения задач (3.4), получим

$$(f, \Phi_k) = (f, L_i \Phi_k) / \mu_k = [(L_i f, \Phi_k) - R_k(x_p)] / \mu_k = -R_k(x_p) / \mu_k$$

где $R_k(x_p)$ — результат вычисления билинейной формы с учетом соотношений задач (3.4), но для тех Φ_k , для которых $\mu_k \neq 0$. Тогда коэффициенты S_k принимают вид

$$S_k = \frac{\lambda}{\mu_k(\lambda - \mu_k)} \frac{R_k(x_p)}{\|\Phi_k\|^2}, \quad \mu_k \neq 0 \quad (3.7)$$

Ряды с коэффициентами (3.7) имеют более быструю сходимость, чем ряды с коэффициентами (3.6), ввиду наличия в знаменателях коэффициентов (3.7) множителей μ_k . В случае, если требуется дальнейшее ускорение сходимости, то корректирующую функцию нужно брать [3] в виде отрезка ряда, аналогичного ряду Неймана $f = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \dots + \lambda^m f_m$.

Если начальный член ряда определяется краевой задачей (3.4), а последующие — из рекуррентных соотношений $L_i f_j = f_{j-1}$ ($j = \overline{1, m}$), то вместо формул (3.7) получим

$$S_k = \frac{\lambda^{m+2}}{\mu_k^{m+1}(\lambda - \mu_k)} \frac{R_k(x_p)}{\|\Phi_k\|^2}, \quad \mu_k \neq 0 \quad (3.8)$$

Поскольку собственное число λ задачи (2.1) в формулах (3.8) — фиксированное число, то ряды с коэффициентами (3.8) имеют еще более быструю сходимость, чем ряды с коэффициентами (3.7).

4. Численные аспекты метода. 4.1. Нахождение корректирующих функций. Нахождение функций Грина в виде рядов приводит к рассмотрению равномерно сходящихся билинейных рядов с коэффициентами порядка $1/\mu_k$, т.е. того же порядка, что и в (3.6). Поэтому нахождение корректирующих функций должно производиться какими-либо другими методами, например, численными.

При этом может быть полезен следующий прием: заменим краевые задачи задачами Коши. Для этого зададим в начальной точке подсистемы набор нулевых граничных условий $\tilde{M}|_{x=0}$, полностью определяющий решение. Решения задач

$$L_i f = \sum_{\mu_k=0} A_{ik} \Phi_k, \quad \tilde{M} f|_{x=0} = 0, \quad V f|_{x_p-0}^{x_p+0} = 1 \quad (4.1)$$

назовем ненормированными корректирующими функциями. Нахождение этих функций может быть выполнено прямым интегрированием уравнения с учетом начальных условий и условия единичного скачка. В случае, если коэффициенты уравнения являются кусочно-постоянными функциями, может быть применен способ последовательного интегрирования по отрезкам. При этом в силу того, что при определении констант в (3.5) используются краевые условия задач (3.4), краевые условия в другой гра-

ничной точке x_i выполняются автоматически и могут служить эффективным средством контроля точности вычислений.

Полученные ненормированные функции отличаются от искомым корректирующих функций только нормировкой. Представим их в виде

$$f = f_n + \sum_{\mu_k=0} C_k \varphi_k \quad (4.2)$$

где f_n – ненормированная функция, C_k – нормирующие коэффициенты. Умножая эти равенства на φ_k и учитывая условия при $\mu_k = 0$, получим неоднородную систему алгебраических уравнений с ненулевым определителем

$$\sum_{\mu_j=0} C_k (\varphi_k, \varphi_j) = (f_n, \varphi_j) \quad (4.3)$$

которая разрешима и позволяет однозначно определить коэффициенты C_k и, с их помощью, найти требуемую корректирующую функцию.

4.2. *Нахождение собственных частот системы.* Ограничимся случаем, когда оператор задачи (2.1) имеет чисто дискретный спектр.

Порядок N_Q системы уравнений (2.5) определяется числом подсистем и числом точек множества Γ_p , поэтому число N_Q может оказаться большим. Для его уменьшения можно использовать свойства симметрии рассматриваемого объекта (если они имеются).

Соотношение (2.5) является уравнением для определения собственных чисел задачи (2.1). Из формул (2.4) и (3.7) видно, что элементы матрицы $B(\lambda)$ являются функциями от λ с полюсами в точках $\lambda = i\mu_k$. Расположим собственные числа всех подсистем в единую последовательность по возрастанию $\{\bar{\mu}_k\} = \{\mu_j\}$. Тогда область собственных значений исходной задачи (2.1) разобьется на интервалы $E_k = (\bar{\mu}_k, \bar{\mu}_{k+1})$. Для нахождения собственных чисел внутри указанных интервалов могут быть использованы любые методы нахождения корней трансцендентных функций внутри конечных интервалов.

Определив какое-либо собственное число λ_0 , можно вычислить матрицу $B(\lambda_0)$, ранга r_0 , что позволяет определить $(N_Q - r_0)$ линейно независимых решений системы уравнений (2.4), а следовательно, используя формулы (2.3), (3.2) и (3.7), найти $(N_Q - r_0)$ линейно независимых собственных функций исходной задачи, отвечающих этому собственному числу λ_0 .

При практических расчетах бывает известно только конечное число собственных чисел N_i каждой из подсистем, причем эти N_i могут быть различными. В последовательности $\{\bar{\mu}_k\}$ члены расположены по возрастанию, и потому собственные числа различных подсистем могут перемежаться. В силу конечности N_i , после исчерпания собственных чисел какой-либо подсистемы, в общей последовательности могут начаться пропуски, образующиеся на месте, где могли бы быть следующие собственные числа этой подсистемы. Такие пропуски непредсказуемым образом влияют на расчеты собственных чисел λ системы. Поэтому в последовательности нужно ограничиться только той ее частью, в которой нет пропусков. Наибольшее собственное число системы, которое может быть определено по этому методу, не превышает

$$\lambda_{\max} = \min_{i,j} \max (\mu_j)$$

Правее λ_{\max} значения λ , получаемые по этому методу, недостоверны или их может вообще не быть. Вообще же точность расчетов зависит от количества удержи-

ваемых в разложениях тонов, скорости сходимости рядов и точности метода, применяемого при решении уравнения (2.5).

Коэффициенты уравнения (2.5) имеют особенности (типа полюс) при $\lambda = \mu_k$. Выясним, что произойдет, если собственное число λ_0 задачи (2.1) и k -е собственное число i -й подсистемы совпадут

$$\lambda_0 = \mu_k \tag{4.4}$$

Подставим разложение соответствующего отклика (3.2) в уравнение (2.2) и домножим полученное равенство скалярно на Φ_k , соответствующее упомянутому μ_k . Учитывая ортогональность семейства Φ_k , получим равенство

$$(L_i f, \Phi_k) + \mu_k S_k \|\Phi_k\|^2 - \lambda_0 (f, \Phi_k) - \lambda_0 S_k \|\Phi_k\|^2 = 0$$

Или в силу (4.4):

$$(L_i f, \Phi_k) - \lambda_0 (f, \Phi_k) = 0$$

Учитывая снова (4.4) и (3.1), получим цепочку равенств

$$(L_i f, \Phi_k) = \lambda_0 (f, \Phi_k) = \mu_k (f, \Phi_k) = (f, L_i \Phi_k)$$

При вычислении формы R_k ненулевыми могут оказаться лишь слагаемые вида $[Vf \tilde{V}\Phi_k] \Big|_{x_p=0}^{x_p+0}$, где \tilde{V} – оператор, с которым Φ_k входит в это произведение. Но из полученных равенств следует, что $R_k(x_p) = 0$ при всех $x_p \in \Gamma_p$. Поскольку сомножители Vf имеют в точках x_p единичный скачок, а $\tilde{V}\Phi_k$ непрерывно, получим, что $\tilde{V}\Phi_k(x_p) = 0$.

Т.е. для того, чтобы k -е собственное число подсистемы было собственным числом задачи (2.1), величина $\tilde{V}\Phi_k(x_p)$ должна иметь узлы в точках, в которых заданы условия связи. Это может иметь место, например, в случае, если i -я подсистема неподвижна.

4.3. Нахождение норм собственных функций. Выше не предполагалось, что собственные функции основной задачи (2.1) и задач для подсистем (3.1) являются нормированными. Вычислим нормы собственных функций основной задачи через коэффициенты разложения (2.3) и (3.7). Ввиду того, что пространство H_m представлено в виде прямой суммы подпространств H_{m_i} :

$$\|u\|^2 = \sum_i \|u_i\|^2$$

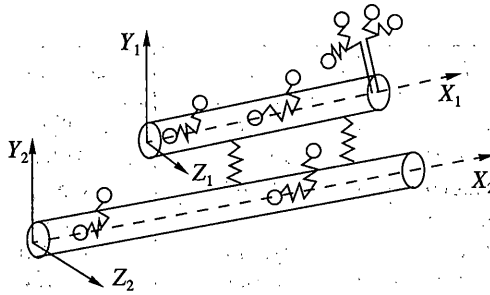
Используем представление (2.3). Будем иметь

$$\|u_i\|^2 = \sum_{p,n} \sum_{m,r} \mathcal{Q}_p^{ni} \mathcal{Q}_r^m (\Phi_p^n, \Phi_r^m) \quad (i = \overline{1, N})$$

Вычислив скалярные произведения, получим формулу

$$\|u\|^2 = \sum_i \sum_{p,n} \sum_{r,m} \mathcal{Q}_p^{ni} \mathcal{Q}_r^m \left\{ \sum_{\mu_k=0} S_{pk}^n S_{rk}^m \|\Phi_k\|^2 + \sum_{\mu_k \neq 0} S_{pk}^n S_{rk}^m \left[\frac{\mu_k}{\lambda} \right]^2 \|\Phi_k\|^2 \right\}$$

5. Применение метода к расчету модели космической конструкции. 5.1. Механическая модель конструкции. В качестве механической модели отдельного блока конструкции была взята стержневая модель. При этом для описания упругих колебаний



удлиненного тонкостенного блока брался упругий стержень с переменными по длине жесткостью, массой и моментом инерции, в некоторых сечениях которого имеются упруго подвешенные осцилляторы.

Для узлов связи выбрана линейная модель, при которой действие возникающих сил и моментов учитывается по закону Гука. Для учета геометрических размеров и конструктивных свойств узла предполагается, что эти силы могут действовать на некоторых расстояниях от осей стержня. Узлы связи могут быть расположены в любом сечении стержня и соединять любые две точки конструкции.

Рассматривались пространственные колебания конструкции, при которых каждый блок совершает продольные, крутильные и изгибные (в двух плоскостях) колебания. Поскольку некоторые осцилляторы могут быть расположены на конечном расстоянии от оси стержня, то колебания различных видов оказываются взаимосвязанными.

5.2. Расчет модели конструкции. Рассмотрим модель, состоящую из двух блоков, продольные оси которых параллельны, блоки соединены связями в двух точках, связи лежат в плоскостях, перпендикулярных осям блоков.

Будем считать, что рассматриваемая модель имеет плоскость динамической симметрии, проходящую через продольные оси блоков (имеется в виду, что симметрия не только геометрическая, но симметричны также соответствующие массы и жесткости). Схематически модель изображена на фигуре.

Собственные колебания такой конструкции распадаются на два варианта: симметричные и антисимметричные. Они характеризуются тем, что в первом случае отсутствуют крутильные и поперечные (в одной из плоскостей), а в другом – продольные и поперечные (в перпендикулярной первой плоскости) колебания.

При учете симметрии порядок систем уравнений (2.2), описывающих колебания конструкции, уменьшается вдвое, четко указывается, какие виды колебаний отсутствуют при данном варианте и гарантируется, что все собственные числа каждого варианта колебаний однократные, что существенно упрощает расчет.

Поскольку анализ обоих вариантов аналогичен, рассматриваются только симметричные колебания.

Наличие осцилляторов, отстоящих от осей конструкции, приводит к тому, что обе компоненты “завязаны” и отклики являются векторами. Будем предполагать, что в соотношения связи входят продольные силы, поперечные силы и моменты. Тогда вектор состояния (для каждого блока) нужно представлять в виде комбинации (2.3) откликов на все виды воздействия, заданных в точках действия связей (где $p = 1, 2, r = 1, 3, 4$, а отклики Φ имеют векторный характер).

Подставляя векторы состояния в уравнения связей, получим уравнения типа (2.5) для определения частот системы. Эти уравнения образуют систему линейных однородных алгебраических уравнений 12-го порядка относительно неизвестных Q ($i = 1, 2$ – номер блока).

Таблица 1

№	λ_c	λ_r	$\Delta\lambda = \lambda_c - \lambda_r $	$\Delta\lambda/\lambda_c$
1	4.16256	4.16152	0.00104	$0.25 \cdot 10^{-3}$
2	10.4792	10.6212	0.01804	$0.17 \cdot 10^{-2}$
3	14.6300	14.5317	0.09837	$0.67 \cdot 10^{-2}$
4	15.9514	15.8222	0.12920	$0.81 \cdot 10^{-2}$
5	32.1152	31.9702	0.14500	$0.45 \cdot 10^{-2}$
6	40.7352	40.4148	0.32050	$0.79 \cdot 10^{-2}$
7	50.8671	49.0527	1.81450	$0.35 \cdot 10^{-1}$
8	66.8638	66.1088	0.75501	$0.11 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2

S_k	S_{-1}^1	S_{-1}^3	S_0^3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Стерж. I	$0.36 \cdot 10^{-2}$	0.12	0.23	-1.16	$-0.3 \cdot 10^{-1}$	$-0.9 \cdot 10^{-2}$	$0.5 \cdot 10^{-4}$	$-0.8 \cdot 10^{-3}$
Стерж. II	$0.56 \cdot 10^{-1}$	-0.037	-0.14	-0.375	$-0.6 \cdot 10^{-3}$	$0.3 \cdot 10^{-2}$	$0.2 \cdot 10^{-2}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.000	$0.1 \cdot 10^{-4}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$	$0.8 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$
2	$0.1 \cdot 10^{-4}$	1.000	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.7 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.3 \cdot 10^{-5}$	$0.4 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-5}$
3	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$	1.000	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.3 \cdot 10^{-5}$	$0.6 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.8 \cdot 10^{-5}$
4	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.7 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$	1.000	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.7 \cdot 10^{-6}$
5	$0.6 \cdot 10^{-6}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.3 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$	1.000	$0.2 \cdot 10^{-6}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$
6	$0.8 \cdot 10^{-5}$	$0.3 \cdot 10^{-5}$	$0.6 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-6}$	1.000	$0.1 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$
7	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.4 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$	$0.1 \cdot 10^{-4}$	1.000	$0.2 \cdot 10^{-6}$
8	$0.1 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$0.8 \cdot 10^{-5}$	$0.7 \cdot 10^{-6}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-6}$	1.000

Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем соотношения для определения собственных частот рассматриваемой конструкции. Поскольку гарантировано, что частоты однократные, для их нахождения используем простой метод деления отрезка пополам.

Последовательность вычислений такова, что сначала находятся собственные числа, затем по ним вычисляются коэффициенты разложения, а затем – формы колебаний. Поэтому точность вычисления собственных чисел является определяющей для всей схемы. Собственные числа находятся из условия равенства нулю частотного определителя, коэффициенты которого являются мероморфными функциями от λ . Чтобы судить о точности определения собственных частот используется сопоставление их с расчетами, полученными по методу начальных параметров, выполненными с помощью программ, составленным В.С. Кобычкиным.

Результаты расчета симметричных колебаний рассматриваемой модели конструкции приведены в табл. 1–3.

В табл. 1 приведены значения восьми собственных чисел модели. Первый столбец – расчетные значения λ_c , второй столбец – контрольные λ_r , полученные по методу начальных параметров, третий – абсолютная, четвертый – относительная погрешности. Расчет по методу начальных параметров производился с относительной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Из рассмотрения таблицы видно, что относительная погрешность, небольшая на первых тонах, постепенно растёт с номером тона (от $0.2 \cdot 10^{-3}$ до $\approx 10^{-2}$).

В табл. 2 приведены коэффициенты разложения решения для обеих стержней. Поскольку продольные и поперечные колебания не являются независимыми из-за наличия осцилляторов, расположенных на некотором расстоянии от оси стержня, то коэффициенты разложения едины для обоих видов колебаний.

Как указано выше, о точности всего расчета можно судить по выполнению граничных условий на правом конце стержня и по точности выполнения условия ортогональности рассчитываемых форм колебаний (точнее, по близости матрицы Грама к диагональной). Обе эти оценки носят интегральный характер. Здесь оценка точности расчета производится с помощью матрицы Грама. Эта матрица для восьми тонов приведена в табл. 3. Ее элементы имеют вид $|(u_i, u_j)|/(||u_i|| ||u_j||)$, где i, j – номера тонов.

Расчеты выполнены при однократном ускорении сходимости. Для получения более высокой точности расчета высших тонов можно проводить дальнейшее ускорение сходимости рядов, применяя формулы (1.12) и (1.14).

6. Заключение. Предлагается численно-аналитический метод определения собственных характеристик систем (с локальными связями), описываемых линейными самосопряженными дифференциальными операторами с дискретным спектром.

Метод позволяет исследовать достаточно сложные объекты, которые допускают схематизацию в виде некоторого количества стержней с разного рода осцилляторами. Он также подходит для расчета динамических характеристик объектов, собираемых из отдельных модулей.

В математическом отношении метод достаточно прост и удобен для разработки программ и проведения по ним расчетов. Приведенные результаты свидетельствуют о его высокой точности. Метод является достаточно универсальным и применялся для решения и других [8] физических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров В.Л., Луничев Л.Н., Тавризов Г.А. Математические методы исследования сложных систем: линейные системы. М.: Наука, 1975. 342 с.
2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания взаимодействующих систем с неоднородными распределенными параметрами // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 15–25.
3. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Л.: Гостехиздат, 1932. 472 с.
4. Канторович Л.В. Об общих методах улучшения сходимости в способах приближенного решения граничных задач математической физики // Тр. Ин-та пром. строит. 1934. Вып. 2. С. 65–72.
5. Воронков В.Н., Шмаков В.П. О представлении динамических характеристик балки на упругих опорах через характеристики свободной балки // Колебания упругих конструкций с жидкостью. М.: ЦНТИ “Волна”, 1980. С. 67–72.
6. Шмаков В.П. Построение корректирующих функций в методе Бубнова – Галеркина // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 80–92.
7. Лиходед А.И. О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения // Изв. АН СССР. МТТ. 1996. № 1. С. 180–188.
8. Воронков В.Н. Метод расчета распространения тепла в системе тел, между которыми возможен теплообмен // Актуальные проблемы микроэлектроники. Таганрог: ТРТИ, 1990. Вып. 1. С. 127–133.
9. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.