

УДК 539.374

© 2005 г. Р.С. НОВОКШАНОВ, А.А. РОГОВОЙ

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

На основе кинематики наложения малых упругих и малых вязких деформаций на конечные вязкоупругие построен общий вид эволюционных определяющих соотношений вязкоупругости с согласованными с этими уравнениями объективными производными. Уравнения конкретизированы, используя упругий закон слабосжимаемого материала и линейно-вязкий закон для деформации скорости вязкой составляющей. Показана термодинамическая непротиворечивость полученных уравнений. С привлечением структурно-механического подхода построена модель вязкоупругого слабосжимаемого твердого тела с дискретным спектром времен релаксации. Параметры модели идентифицированы, используя экспериментальные данные для реального материала. Работоспособность модели тестируется на задаче простого сдвига при наложении сжатия.

1. Введение. В работе [1], вводя три конфигурации k_0 – начальную, k – текущую и k_E – промежуточную, близкую к текущей, в рамках кинематики, определяемой наложением малых деформаций (градиентов места) на конечные, построены уравнения состояния для конечных упругих деформаций простого материала относительно промежуточной конфигурации.

Как известно [2], в соответствии с теоремой Селерье – Рихтера или теоремой приведения Нолла, определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющее принципу объективности, имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^T \quad (1.1)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{U} – ортогональный тензор и симметричный положительно определенный тензор чистой деформации в полярном разложении градиента места $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ и $\tilde{\mathbf{g}}_1$ – отклик материала на чистую деформацию. Соотношение (1.1) может быть представлено в эквивалентных формах

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_3 \cdot \mathbf{F}^{-1} = \\ &= \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_4 \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_5 \cdot \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6 \cdot \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $J = I_3(\mathbf{F})$ – третий главный инвариант \mathbf{F} , определяющий относительное изменение объема, и введены различные функции отклика материала

$$\tilde{\mathbf{g}}_1 = \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_3 \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_4 \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_5 \cdot \mathbf{U} = J^{-1} \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6 \cdot \mathbf{U}$$

Относительно промежуточной конфигурации k_E определяющие уравнения (1.1), (1.2) представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \mathbf{T}_0 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{d} + \tilde{\mathbf{L}}_1^{IV} \cdot \mathbf{e} \\
 \mathbf{T} &= \mathbf{T}_0 + \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{h}^T + \tilde{\mathbf{L}}_2^{IV} \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0 - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{L}}_3^{IV} \cdot \mathbf{e} \\
 \mathbf{T} &= \mathbf{T}_0 + \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{L}}_4^{IV} \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0 - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{h}^T + \tilde{\mathbf{L}}_5^{IV} \cdot \mathbf{e} \\
 \mathbf{T} &= (1 - I_1(\mathbf{e}))\mathbf{T}_0 + \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{h}^T + \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \mathbf{e}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь \mathbf{T}_0 – напряжение, достигнутое в конфигурации κ_E (начальное для этой конфигурации), $\mathbf{h} = (\nabla_{\kappa_E} \mathbf{u})^T$ – градиент относительно конфигурации κ_E вектора малых перемещений \mathbf{u} , переводящих промежуточную конфигурацию в текущую, $\mathbf{e} = (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)/2$ – тензор малых деформаций относительно κ_E конфигурации, $\mathbf{d} = (\mathbf{h} - \mathbf{h}^T)/2$ – тензор малых поворотов, $\tilde{\mathbf{L}}_i^{IV}$ ($i = 1, \dots, 6$) – тензор четвертого ранга (в общем случае анизотропный), определяющий упругий отклик материала на малые деформации относительно промежуточной конфигурации.

Приближенные соотношения (1.3) сводятся к точным, деля их на приращение времени перехода из промежуточной конфигурации в текущую и осуществляя предельный переход – устремляя промежуточную конфигурацию к текущей. В результате были получены следующие эволюционные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^J &= \tilde{\mathbf{L}}_1^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{Ol} = \tilde{\mathbf{L}}_2^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{CR} = \tilde{\mathbf{L}}_3^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}} \\
 \mathbf{T}^L &= \tilde{\mathbf{L}}_4^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{Rl} = \tilde{\mathbf{L}}_5^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{Tr} = \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь \mathbf{T}^J , \mathbf{T}^{Ol} , \mathbf{T}^{CR} и так далее – коротационные производные Яуманна, Олдройда, Коттер – Ривлина, левая и правая конвективные и Трусделла. Причем каждая из них соответствует какой-либо одной функции материального отклика $\tilde{\mathbf{g}}_i$. Аргументами

же у тензора четвертого ранга $\tilde{\mathbf{L}}_i^{IV}$ являются те же самые кинематические величины, что и в соотношениях (1.3), но не в промежуточной, а в текущей конфигурации.

Конфигурация κ_E получается из текущей конфигурации (неизвестной до решения задачи) малой упругой разгрузкой и, если процесс чисто упругий, совпадает с конфигурацией, полученной в конце предыдущего нагрузочного шага, т.е. становится известной и определяется однозначно. Если процесс упруго-неупругий, то конфигурация κ_E , как показано в [1], также однозначно строится по известной конфигурации, полученной в конце предыдущего нагрузочного шага, исходя из равенства по модулю напряжений в этих конфигурациях. В [1], основываясь на соотношениях (1.3), (1.4) и трактуя упругопластический процесс как упругий с отчетной конфигурацией κ_2 (κ_E в обозначениях данной статьи), полученной из конфигурации κ_1 (κ_r) с помощью малого пластического поворота \mathbf{d}_p , построены эволюционные определяющие уравнения для больших упругопластических деформаций (конечных упругих и конечных пластических) для любого закона упругости и ассоциированного закона пластичности. Уравнения конкретизированы, используя в качестве упругого закона упрощенное соотношение Синьорини и соотношение Прандтля – Рейсса для пластичности.

Вся процедура получения эволюционных определяющих уравнений для больших упругопластических деформаций, изложенная в [1], есть некая формализация, алгоритм построения непротиворечивых (законам термодинамики, принципу объективности) уравнений состояния упруго-неупругих сред при конечных деформациях. Цель публикуемой работы – применить эту процедуру при построении определяющих уравнений для конечных вязкоупругих деформаций упруго слабосжимаемого материала,

показать их непротиворечивость законам термодинамики и аттестовать на модельной задаче.

2. Определяющие соотношения слабосжимаемого упругого материала в промежуточной конфигурации. Эластомеры, т.е. материалы, допускающих большие упругие деформации, проявляют слабую сжимаемость и в обычных условиях считаются несжимаемыми. Такая аппроксимация используется большинством авторов и является вполне корректной, когда материалы работают в обычных (не экстремальных) условиях, т.е. при невысоком гидростатическом давлении и обычной температуре [3–5]. Условия работы эластомеров в узлах современной техники – это экстремальные условия с высокими гидростатическими давлениями, и неучет слабой сжимаемости материала приводит к неадекватным реальному результату. Разработанная в [6] теория конечных упругих деформаций начально изотропного слабосжимаемого материала основана на разложении упругого потенциала W в ряд по третьему главному инварианту меры деформации Коши – Грина $C = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ в окрестности единицы с удержанием, в силу слабой сжимаемости материала, только членов не выше квадратичных:

$$W(I_1, I_2, I_3) = \hat{W}(I_1, I_2) + \chi_1(I_3 - 1) + (1/2)\chi_2(I_3 - 1)^2$$

$$\hat{W}(I_1, I_2) = W(I_1, I_2, 1), \quad \chi_1(I_1, I_2) = \left. \frac{\partial W}{\partial I_3} \right|_{I_3=1}, \quad \chi_2(I_1, I_2) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2} \right|_{I_3=1}$$

где $I_i = I_i(C)$, ($i = 1, 2, 3$) – главные инварианты меры C . Этим вводятся три обобщенных модуля упругости, один из которых и определяет сжимаемость (несжимаемость) материала. Дальнейшему развитию теории посвящены работы [7–9], в которых учитывается экспериментально наблюдаемый факт изменения “объемного модуля” и “модуля сдвига” при изменении объема¹ и продемонстрированы эффекты, возникающие при этом. В частности, эффект раскручивания и натягивания обратно предварительно закрученной и стянутой в осевом направлении внешней поверхности поллого цилиндра при подаче внутреннего давления. Определяющее соотношение, полученное и использованное в этих работах, следующее:

$$\begin{aligned} 1/2\mathbf{P}_{II} &= (\mathbf{g} - I_3\mathbf{C}^{-1})c_1 + (I_1\mathbf{g} - \mathbf{C} - 2I_3\mathbf{C}^{-1})c_2 + \sigma I_3\mathbf{C}^{-1} \\ \alpha(\sigma - \chi_1) &= I_3 - 1, \quad \alpha = 1/\chi_2 \\ c_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2, I_3) &= k_i + p_i(I_3 - 1) + (1/2)q_i(I_3 - 1)^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$k_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{I}_i}, \quad p_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_1}{\partial \hat{I}_i}, \quad q_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \frac{\partial \chi_2}{\partial \hat{I}_i} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь \mathbf{P}_{II} – второй (симметричный) тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа, \mathbf{g} – единичный тензор, а $\hat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1)$, $\hat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1)$, $\hat{I}_3 = I_3$ – инварианты, введенные в [10]. Причем,

¹ При конечных деформациях выражения, определяющие модуль сдвига и объемный модуль, зависят от конкретной задачи, т.е. для разных задач они разные (что и продемонстрировано в [6, 7]). В этом нет ничего удивительного, поскольку гидростатика при конечных деформациях определяется не только изменением объема, но и изменением формы. И наоборот, изменение объема определяется и шаровой и дивиагорной частями тензора напряжений. В связи с этим понятия “объемный модуль” и “модуль сдвига” – это чисто условные понятия, терминологически удобные, но при этом нужно обязательно привязывать их к конкретной задаче. Поэтому они и взяты в кавычки.

$$\chi_1(\hat{I}_1, \hat{I}_2)|_{\mathbf{C}=\mathbf{g}} = 0, \quad 2(k_1 + k_2)|_{\mathbf{C}=\mathbf{g}} = G_0$$

$$4\left(\chi_2 - \frac{2(k_1 + k_2)}{3}\right)\Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{g}} = B_0, \quad \frac{\chi_2 - (k_1 + k_2)}{2\chi_2 - (k_1 + k_2)}\Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{g}} = \nu_0$$

где G_0 , B_0 и ν_0 – модуль сдвига, объемный модуль и коэффициент Пуассона линейной теории упругости. Для того, чтобы уравнения состояния были энергетически допустимыми [11], должны выполняться равенства

$$\frac{\partial k_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial k_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial p_2}{\partial \hat{I}_1}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial \hat{I}_2} = \frac{\partial q_2}{\partial \hat{I}_1}$$

В работах [7–9] принимались простейшие выражения для \hat{W} , χ_1 и χ_2 :

$$\hat{W} = k_1(\hat{I}_1 - 3) + k_2(\hat{I}_2 - 3), \quad \chi_1 = p_1(\hat{I}_1 - 3) - p_2(\hat{I}_2 - 3)$$

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \chi_{20} + q_1(\hat{I}_1 - 3) + q_2(\hat{I}_2 - 3) = \\ &= \chi_{20}(1 + Q_1(\hat{I}_1 - 3) + Q_2(\hat{I}_2 - 3)), \quad Q_i = q_i/\chi_{20} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(k_1, k_2, p_1, p_2, q_1, q_2, \chi_{20}) - \text{const}$$

которые, тем не менее, позволили достаточно ярко выявить эффект, связанный со слабой упругой сжимаемостью материала. Эти соотношения будут использованы и в настоящей работе.

Учитывая, что тензор истинных напряжений $\mathbf{T} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T$, из соотношений (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2(J^{-1}\Phi - J\mathbf{g})c_1 + 2(J^{-1}I_1\Phi - J^{-1}\Phi^2 - 2J\mathbf{g})c_2 + 2\sigma J\mathbf{g} \\ \alpha_0 \frac{\sigma - p_1(\hat{I}_1 - 3) - p_2(\hat{I}_2 - 3)}{1 + Q_1(\hat{I}_1 - 3) + Q_2(\hat{I}_2 - 3)} &= J^2 - 1, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\chi_{20}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ – тензор меры деформаций Фингера, инварианты которого совпадают с соответствующими инвариантами тензора \mathbf{C} .

Уравнения (2.3) определяются кинематикой, переводящей начальную конфигурацию κ_0 , положение материальной точки в которой определяется радиус-вектором \mathbf{g} , в текущую κ , где та же точка идентифицируется радиус-вектором \mathbf{R} . Для линейризации этих уравнений, к чему часто прибегают при решении задач с большими упругими деформациями, и что необходимо для достижения поставленной цели статьи – построения уравнений состояния для конечных вязкоупругих деформаций, обычно (см. [1]) вводится промежуточная конфигурация κ_1 с идентификационным радиус-вектором \mathbf{R}_0 , близкая к текущей. Последнее формализуется соотношением $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{u}$, где ε – малая положительная величина, а \mathbf{u} – вектор перемещений из промежуточной конфигурации в текущую. Далее, используя мультипликативное представление градиента места $\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_0$, где \mathbf{F}_0 – градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную, а \mathbf{f} – градиент места из промежуточной конфигурации в текущую ($\mathbf{f} = (\nabla_{\kappa_1} \mathbf{R})^T = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}$, $\mathbf{h} = (\nabla_{\kappa_1} \mathbf{u})^T$, ∇_{κ_1} – оператор Гамильтона относительно промежуточной конфигурации), получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}_0 \quad (2.4)$$

Зная градиент места \mathbf{F} , аналогично [1] можно получить представления всех других кинематических величин, определяющих (2.3):

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \varepsilon(\Phi_0 \cdot \mathbf{h}^T + \mathbf{h} \cdot \Phi_0), \quad I_1(\Phi) = I_1(\Phi_0) + 2\varepsilon\Phi_0 \cdot \mathbf{e} \\ I_2(\Phi) &= I_2(\Phi_0) + 2\varepsilon(I_1(\Phi_0)\Phi_0 \cdot \mathbf{e} - \Phi_0^2 \cdot \mathbf{e}), \quad J = I_3(\mathbf{F}) = J_0(1 + \varepsilon I_1(\mathbf{e})) \end{aligned} \quad (2.5)$$

С помощью этих выражений соотношения (2.3) преобразуются к промежуточной конфигурации. Такой подход применим только ко второму уравнению (2.3). Первое же уравнение сначала приведем к одной из форм (1.2) и выделим функцию отклика материала на чистую деформацию $\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{U})$, а затем, используя ее, построим тензор $\tilde{\mathbf{L}}_i^{IV}$, соответствующий одной из форм (1.3) представления определяющего уравнения относительно промежуточной конфигурации, или одной из форм (1.4) эволюционного уравнения. При этом продемонстрируем возможности развиваемого, но слабо используемого аппарата дифференцирования скалярных и тензорных функций тензорного аргумента по тензорному аргументу [11, 12].

Основные соотношения, которые будут использованы, помимо известных производных от инвариантов по аргументу, следующие:

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{A}/\partial\mathbf{A} &= \mathbf{C}_{II}^{IV}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} = \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \\ \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{S}} &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{S}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{S}) \\ \frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial\mathbf{S}} &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{S}} \overset{*}{\mathbf{B}} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{S}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{S}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{S}) \\ \frac{\partial(F(\mathbf{S})\mathbf{A}(\mathbf{S}))}{\partial\mathbf{S}} &= \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{S})F(\mathbf{S})}{\partial\mathbf{S}} = F(\mathbf{S})\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{S})}{\partial\mathbf{S}} + \mathbf{A}(\mathbf{S})\frac{\partial F(\mathbf{S})}{\partial\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{S} – тензоры второго ранга, \mathbf{C}_{II}^{IV} – второй изотропный тензор четвертого ранга и F – скалярная функция тензорного аргумента. Операция $\overset{*}{\mathbf{B}}$ в выражении $\mathbf{H}^{IV} \overset{*}{\mathbf{B}}$ означает позиционное скалярное умножение тензора второго ранга \mathbf{B} справа на n -й базисный вектор тензора четвертого ранга \mathbf{H}^{IV} .

Используя полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$, тензор Φ представляется в виде $\Phi = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{R}^T$, и первое уравнение (2.3) приводится к виду (1.1), где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_1 &= 2(J^{-1}\mathbf{U}^2 - J\mathbf{g})c_1(\mathbf{U}) + 2(J^{-1}I_1\mathbf{U}^2 - J^{-1}\mathbf{U}^4 - 2J\mathbf{g})c_2(\mathbf{U}) + 2\sigma J\mathbf{g} \\ I_i(\mathbf{C}) &= I_i(\mathbf{U}^2) = I_i(\Phi) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В отличие от функции отклика материала $\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U})$ работы [1], функция (2.7) зависит и от \mathbf{U} , и от σ . Представляя σ в виде $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon\eta$, где σ_0 – величина σ в промежуточной конфигурации, а η – ее приращение, получаем, используя первое соотношение второй строки зависимостей (2.6):

$$\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}, \sigma) = \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}_0, \sigma_0) + \left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{g}}_1}{\partial\mathbf{U}} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{g}}_1}{\partial\sigma}\eta \right) \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon \quad (2.8)$$

Тогда первое уравнение (2.3) переписывается относительно промежуточной конфигурации в виде первого расширенного соотношения (1.3):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{d} + \tilde{\mathbf{L}}_1^{\text{IV}} \cdot \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{L}}_1^{\text{II}} \eta \quad (2.9)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_1^{\text{II}} = \mathbf{R}_0 \cdot \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\substack{\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0}} \cdot \mathbf{R}_0^T$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_1^{\text{IV}} = \mathbf{R}_0 \cdot \left((\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{U}_0^{1/2}) \cdot \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_1}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\substack{\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0}} \cdot \mathbf{R}_0^T \right) \cdot (\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{U}_0^{1/2})^T \quad (2.10)$$

Здесь \mathbf{R}_0 и \mathbf{U}_0 – ортогональный тензор и симметричный положительно определенный тензор чистой деформации в полярном разложении градиента места \mathbf{F}_0 , переводящего начальную конфигурацию в промежуточную, а операция \cdot в выражении $\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^{\text{IV}}$ означают позиционное скалярное умножение тензора второго ранга \mathbf{A} слева на n -й базисный вектор тензора четвертого ранга \mathbf{H}^{IV} .

Используя известные выражения для производных от инвариантов по аргументу и соотношения (2.6), имеем

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial I_3(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = J\mathbf{U}^{-1}, \quad \frac{\partial J^{-1}}{\partial \mathbf{U}} = -J^{-1}\mathbf{U}^{-1}, \quad \frac{\partial I_1(\mathbf{U}^2)}{\partial \mathbf{U}} = 2\mathbf{U}$$

$$\frac{\partial I_3(\mathbf{U}^2)}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial J^2}{\partial \mathbf{U}} = 2J^2\mathbf{U}^{-1}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial \mathbf{U}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}^{n-i} \cdot \mathbf{C}_{\text{II}}^{\text{IV}} \cdot \mathbf{U}^{i-1} \quad (\mathbf{U}^0 = \mathbf{g})$$

Последняя производная для целого положительного n . Эти выражения позволяют определить из соотношения (2.7) выражение $\partial \tilde{\mathbf{g}}_1 / \partial \mathbf{U}$ (учитывая обязательно последнюю строку в (2.6)), что, в свою очередь, конкретизирует выражения (2.8)–(2.10). Последнее записывается в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{d} +$$

$$+ 2J_0^{-1} [2\Phi_0 \cdot \mathbf{e} - (\Phi_0 + J_0^2 \mathbf{g}) I_1(\mathbf{e})] c_1(\mathbf{U}_0) + 4J_0 (\Phi_0 - J_0^2 \mathbf{g}) (p_1 + q_1 (J_0^2 - 1)) I_1(\mathbf{e}) +$$

$$+ 2J_0^{-1} [2(\Phi_0 \Phi_0 \cdot \mathbf{e}) + I_1(\Phi_0) \Phi_0 \cdot \mathbf{e} - 2\Phi_0^2 \cdot \mathbf{e}] -$$

$$- (I_1(\Phi_0) \Phi_0 - \Phi_0^2 + 2J_0^2 \mathbf{g}) I_1(\mathbf{e})] c_2(\mathbf{U}_0) + \quad (2.11)$$

$$+ 4J_0 (I_1(\Phi_0) \Phi_0 - \Phi_0^2 - 2J_0^2 \mathbf{g}) (p_2 + q_2 (J_0^2 - 1)) I_1(\mathbf{e}) + 2J_0 (\sigma_0 I_1(\mathbf{e}) + \eta) \mathbf{g}$$

$$c_i(\mathbf{U}_0) = k_i + p_i (J_0^2 - 1) + (1/2) q_i (J_0^2 - 1)^2 \quad (i = 1, 2)$$

где величины с индексом (0) отнесены к достигнутой промежуточной конфигурации \mathbf{K}_1 и поэтому известны. Приближенное соотношение (2.11) сводится к точному делением на приращение времени перехода из промежуточной конфигурации в текущую и предельным переходом, устремляя промежуточную конфигурацию к текущей. В результате получаем эволюционное уравнение с производной Яуманна (вытекает из первой строки выражения (2.11)), правая часть которого есть все остальные строки, где опущен индекс (0) (промежуточная конфигурация совпадает с текущей) и \mathbf{e} пере-

ходит в тензор деформации скорости $\mathbf{D} = (1/2)(\tilde{\nabla} \mathbf{v} + (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T)$ ($\tilde{\nabla}$ – оператор Гамильтона в текущей конфигурации, а \mathbf{v} – скорость перемещения). Заметим, что приводя первое уравнение (2.3) к другой, отличной от (1.1), форме представления из равенств (1.2), получим в эволюционном уравнении другую коротационную производную, но однозначно определенную.

Используя выражения (2.5), второе соотношение (2.3) представляется в виде

$$\frac{\alpha_0 \eta - 2(\alpha_0 p_1 + (J_0^2 - 1)Q_1)A - 2(\alpha_0 p_2 + (J_0^2 - 1)Q_2)B}{1 + Q_1(\hat{I}_{10} - 3) + Q_2(\hat{I}_{20} - 3)} = 2J_0^2 I_1(\mathbf{e}) \quad (2.12)$$

$$A = \Phi_0 \cdot \mathbf{e} - J_0^2 I_1(\mathbf{e}), \quad B = I_1(\Phi_0) \Phi_0 \cdot \mathbf{e} - \Phi_0^2 \cdot \mathbf{e} - 2J_0^2 I_1(\mathbf{e}) \quad (2.13)$$

$$\alpha_0 \frac{\sigma_0 - p_1(\hat{I}_{10} - 3) - p_2(\hat{I}_{20} - 3)}{1 + Q_1(\hat{I}_{10} - 3) + Q_2(\hat{I}_{20} - 3)} = J_0^2 - 1, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\chi_{20}} \quad (2.14)$$

Так же как и (2.11), соотношение (2.12) легко сводится к эволюционному. Уравнения (2.11)–(2.14) определяют поведение слабосжимаемого упругого материала относительно промежуточной конфигурации.

3. Определяющие соотношения вязкоупругости. Для описания кинематики упруго-неупругого процесса обычно используется известное разложение Ли $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IV}$, где \mathbf{F}_{IV} – градиент неупругих деформаций, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную, \mathbf{F}_E – градиент упругих деформаций, переводящий промежуточную конфигурацию в текущую. Например, в [13–19] такое представление используется для описания конечных вязкоупругих деформаций. Промежуточная конфигурация определяется из текущей, возникающей в упругопластических или вязкоупругих процессах, путем упругой разгрузки до нулевых напряжений. Причем, эта конфигурация определяется с точностью до ортогональных преобразований и требуются дополнительные предположения для исключения этой неоднозначности. Например, в [20, 21] авторы полагают отсутствие вязкого спина $\mathbf{W}_V = 0$, входящего в представление для тензора градиента скорости $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}_E + \mathbf{L}_V = (\mathbf{D}_E + \mathbf{W}_E) + (\mathbf{D}_V + \mathbf{W}_V)$, где \mathbf{D}_E и \mathbf{D}_V – тензоры деформации скорости для упругой и вязкой деформаций соответственно.

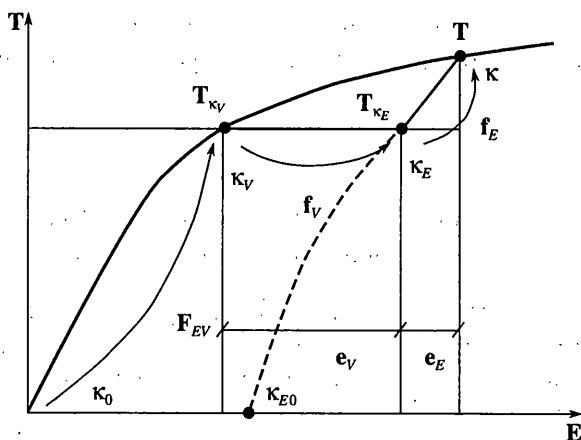
Здесь, придерживаясь концепции наложения малых деформаций на конечные, и подхода, изложенного в работе [1], представим градиент места в виде композиции малых упругих, малых вязких и конечных вязкоупругих деформаций

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{F}_{EV} \quad (3.1)$$

где градиент места \mathbf{F}_{EV} переводит начальную конфигурацию в первую промежуточную κ_V . Градиент \mathbf{f}_V переводит конфигурацию κ_V во вторую тоже промежуточную конфигурацию κ_E . И, наконец, градиент \mathbf{f}_E переводит конфигурацию κ_E в текущую с радиус-вектором \mathbf{R} . Причем, конфигурации κ_V , κ_E и текущая близки между собой, что формализуется выражениями

$$\mathbf{R}_{\kappa_E} = \mathbf{R}_{\kappa_V} + \varepsilon \mathbf{u}_V, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\kappa_E} + \varepsilon \mathbf{u}_E \quad (3.2)$$

где ε – малый параметр (положительная величина), а \mathbf{u}_V и \mathbf{u}_E – векторы вязких и упругих перемещений, последовательно переводящие конфигурацию κ_V в κ_E и κ_E в текущую. Соотношения (3.2) и позволяют определить \mathbf{f}_V и \mathbf{f}_E .



Фиг. 1

Градиенту F_{EV} соответствует накопленное напряженное состояние T_{κ_V} (фиг. 1). Градиент f_V переводит конфигурацию κ_V с этим напряженным состоянием в конфигурацию κ_E , не меняя при этом напряженного состояния в смысле соотношения $T_{\kappa_V} \cdot T_{\kappa_V} = T_{\kappa_E} \cdot T_{\kappa_E}$ (это также следует из фиг. 1). Аналогично [1], напряженное состояние в конфигурации κ_E , но для вязкого процесса, определяется соотношением

$$T_{\kappa_E} = T_{\kappa_V} + \varepsilon d_V \cdot T_{\kappa_V} - \varepsilon T_{\kappa_V} \cdot d_V \quad (3.3)$$

где $d_V = (\nabla_{\kappa_V} u_V - (\nabla_{\kappa_V} u_V)^T)/2$ – тензор малых вязких поворотов. Напряжения T_{κ_E} являются начальными для кинематики, определяемой упругим градиентом места f_E , и поэтому, в соответствии с уравнением состояния (2.11), все величины которого, в отличие от предыдущего раздела, связанного только с упругостью, помечены здесь индексом (E), т.е. определяются упругим законом, тензор истинных напряжений запишется в виде

$$\begin{aligned} T &= T_{\kappa_E} + \varepsilon d_E \cdot T_{\kappa_E} - \varepsilon T_{\kappa_E} \cdot d_E + \varepsilon \tilde{L}_{1E}^{IV} \cdot e_E + \tilde{L}_{1E}^{\Pi} \eta \\ e_E &= (\nabla_{\kappa_E} u_E + (\nabla_{\kappa_E} u_E)^T)/2, \quad d_E = (\nabla_{\kappa_E} u_E - (\nabla_{\kappa_E} u_E)^T)/2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\tilde{L}_{1E}^{IV} \cdot e_E + \tilde{L}_{1E}^{\Pi} \eta$ определяется второй – четвертой строками соотношения (2.11), в которых σ_0 и η находятся из выражений (2.12)–(2.14) для упругой кинематики. Подставляя выражение (3.3) в соотношение (3.4) и сохраняя только линейные по ε слагаемые, приходим к уравнению

$$T = T_{\kappa_V} + \varepsilon d \cdot T_{\kappa_V} - \varepsilon T_{\kappa_V} \cdot d + \varepsilon \tilde{L}_{1E}^{IV} \cdot e_E + \tilde{L}_{1E}^{\Pi} \eta \quad (3.5)$$

где $d = d_E + d_V$ – полный малый вязкоупругий поворот при переходе из конфигурации κ_V , с накопленными в ней за счет градиента места F_{EV} напряжениями T_{κ_V} , в текущую. Это приближенное уравнение сводится к точному (дифференциальному,

эволюционному), деля его на приращение времени перехода из конфигурации κ_V в актуальную и устремляя промежуточные конфигурации к текущей ($\kappa_V \rightarrow \kappa_E \rightarrow \kappa$). В результате получаем

$$\mathbf{T}^J = \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E + \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II} \dot{\eta} \quad (3.6)$$

где $\mathbf{T}^J \equiv \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}$ – автоматически получающаяся объективная производная Яуманна и $\dot{\mathbf{e}}_E \equiv \mathbf{D}_E$ (\mathbf{D}_E – тензор деформации скорости упругих перемещений). Аргументами же у тензоров четвертого ранга $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV}$ и второго ранга $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II}$ являются те же самые кинематические величины, что и в соотношении (3.5), но не в промежуточной, а в текущей конфигурации. Тензор деформации скорости упругих перемещений определяется через тензор деформации скорости полных перемещений известным соотношением $\dot{\mathbf{e}}_E = \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_V$ (см., например, [22–24]). Для дальнейшей конкретизации определяющего соотношения (3.6) необходимо задать эволюционный закон для деформации скорости вязких перемещений $\dot{\mathbf{e}}_V$. Примем его в самом простом виде [25]:

$$\dot{\mathbf{e}}_V = \frac{1}{\mu} \mathbf{T} \quad (3.7)$$

где μ – коэффициент вязкости, и в результате получаем эволюционное определяющее уравнение, записанное через истинное напряжение, скорость его изменения, деформацию скорости полных перемещений и полную упругую кинематику (через последнюю определяются тензоры $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV}$ и $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II}$):

$$\mathbf{T}^J = \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{1}{\mu} \mathbf{T} \right) + \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II} \dot{\eta} \quad (3.8)$$

Это соотношение должно быть дополнено уравнениями (2.12) и (2.13), приведенными к эволюционной форме.

Отметим, что в отличие от упругопластичности, рассмотренной в [1], следствием закона для вязкой деформации в форме (3.7) является вязкоупругое изменение объема

$$J = J_{\kappa_V} (1 + \varepsilon I_1(\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_V)) = J_{\kappa_V} (1 + \varepsilon I_1(\mathbf{e}))$$

где $I_1(\mathbf{e}_V) \neq 0$ и $J_{\kappa_V} = I_3(\mathbf{F}_{EV})$ определяет накопленное вязкоупругое изменение объема в конфигурации κ_V .

Покажем, что полученное определяющее уравнение удовлетворяет термодинамическому неравенству Клаузиуса – Дюгема $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\Psi} \geq 0$ для изотермического процесса, где ρ – плотность материала в текущей конфигурации, Ψ – свободная энергия единицы массы в текущей конфигурации и, применяя результаты [1] к вязкоупругому материалу, имеем $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\mathbf{e}}_V$. Аналогично [1], полагаем свободную энергию функцией только величин, определяющих упругий процесс. Так как \mathbf{T} и \mathbf{D} объективные тензоры, то $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ – инвариантный по отношению к любому жесткому вращению комплекс; ρ – инвариантная величина, отсюда и скалярная функция Ψ тоже инвариантная величина и поэтому аргументами у нее могут быть только инвариантные величины (на это в свое время обратил внимание В.А. Пальмов [26]). В данном случае такими аргументами будут S_E – мера Коши – Грина упругой деформации и σ :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(\mathbf{C}_E, \sigma) = \Psi(\mathbf{C}_{E*} + 2\varepsilon \mathbf{F}_{E*}^T \cdot \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}_{E*}, \sigma_* + \varepsilon \eta) = \\ &= \Psi(\mathbf{C}_{E*}, \sigma_*) + \varepsilon \left(\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_E} \right|_{\substack{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*} \\ \sigma = \sigma_*}} \cdot (2\mathbf{F}_{E*}^T \cdot \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}_{E*}) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*} \\ \sigma = \sigma_*}} \eta \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь значок (*) в индексах обозначает упругую величину, соответствующую промежуточной конфигурации κ_V (в отличие, например, от \mathbf{F}_{EV} – вязкоупругого градиента места, переводящего начальную конфигурацию в конфигурацию κ_V). Тогда, учитывая, что $\Psi(\mathbf{C}_E, \sigma) - \Psi(\mathbf{C}_{E*}, \sigma_*) = \Delta\Psi$ – малое конечное приращение Ψ , $\varepsilon \mathbf{e}_E = \Delta \mathbf{e}_E$ – малое конечное приращение \mathbf{e}_E , $\varepsilon \eta = \Delta \eta$ – малое конечное приращение η , деля выражение (3.9) на Δt – малое конечное время перехода из промежуточной конфигурации в текущую, получаем в пределе при стремлении промежуточной конфигурации к текущей

$$\dot{\Psi} = 2 \left(\mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_E} \cdot \mathbf{F}_E^T \right) \cdot \dot{\mathbf{e}}_E + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \dot{\eta}$$

Введем для каждой точки тела конфигурацию κ_{E0} , получающуюся путем чисто упругой разгрузки до нулевых напряжений текущей конфигурации, возникающей в данном случае в вязкоупругом процессе (см. фиг. 1, где штриховая линия определяет какой-либо нелинейный закон упругости). Естественно, в каждой точке тела будет вообще-то своя конфигурация κ_{E0} (т.е. эти конфигурации несовместимы), изменяемая в процессе деформирования и определяемая только вязким градиентом места \mathbf{F}_V . Введем якобианы $J_V = \rho_0/\rho_E$ и $J_E = \rho_E/\rho$, где ρ_0 – плотность массы в начальной конфигурации, а ρ_E – плотность массы в конфигурации κ_{E0} . Тогда, учитывая что $J = \rho_0/\rho$, получаем $J = J_V J_E$ и $\rho = J^{-1} \rho_0 = J_E^{-1} \rho_E$. Подставляя теперь выражения для \mathbf{D} , $\dot{\Psi}$ и ρ в неравенство Клаузиуса – Дюгема, имеем

$$\left(\mathbf{T} - 2J_E^{-1} \rho_E \mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_E} \cdot \mathbf{F}_E^T \right) \cdot \dot{\mathbf{e}}_E + \left(J_E^{-1} \rho_E \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \right) \dot{\eta} + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_V \geq 0$$

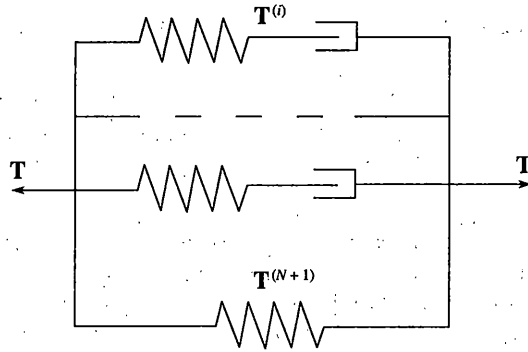
Отсюда следует, что

$$\mathbf{T} = 2J_E^{-1} \rho_E \mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_E} \cdot \mathbf{F}_E^T, \quad J_E^{-1} \rho_E \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = 0, \quad \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_V \geq 0$$

Вводя упругий потенциал (для изотермического процесса совпадающий со свободной энергией) на единицу упругодеформированного объема $W = \rho_E \Psi$, получим

$$\mathbf{T} = 2J_E^{-1} \mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}_E} \cdot \mathbf{F}_E^T, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0, \quad \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_V \geq 0$$

Как уже отмечалось выше, упругий потенциал записывается для каждой точки тела относительно разных начальных упругих конфигураций κ_{E0} , определяемых в данном случае градиентом \mathbf{F}_V . В частности, задав W в виде $W = \hat{W} + \sigma(J^2 - 1) - (\alpha/2)(\sigma - \chi_1)^2$, где \hat{W} функция только от инвариантов \hat{I}_1 и \hat{I}_2 (см. (2.2)), приходим к определяющим уравнениям (2.1), (2.3), где, в общем случае, величины k_i, p_i, q_i ($i = 1, 2$) и χ_{20} зависят от \mathbf{F}_V . Закон же (3.7) удовлетворяет неравенству $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_V \geq 0$ при условии $\mu \geq 0$.



Фиг. 2

В [1] рассматривался упругопластический процесс, для которого, как известно для многих материалов, параметры, определяющие упругость, слабо зависят от пластичности. В контексте настоящей статьи это означает, что упругий потенциал практически не зависит от начальной конфигурации K_{E0} , определяемой пластическим градиентом места F_p , и в [1] величины $k_i, p_i, q_i (i = 1, 2)$ и χ_{20} полагались константами. Ниже будем полагать, что все сказанное об упругопластическом процессе относится и к вязкоупругому. Справедливость же такой посылки проверим возможностью описать такой моделью поведение реального материала.

4. Модель вязкоупругого тела. С позиции структурно-механической аналогии определяющее соотношение (3.8) вязкоупругого поведения материала (также как и в [1] для упругопластического поведения) есть не что иное, как последовательное соединение упругого и вязкого (пластического) элементов – напряжения одинаковые, полная деформация скорости (но не скорость деформации) есть сумма деформаций скорости упругого и вязкого (пластического) элементов. Но соотношение (3.8) имеет лишь одно время релаксации и, конечно, не может описать поведение реальных материалов. Для построения на его основе моделей реальных сред будем использовать структурно-механические аналоги. Такой подход получил в последнее время широкое распространение (см., например, [14, 16–19, 20, 21, 27, 28]). В качестве структурного аналога модели вязкоупругого деформируемого твердого тела примем параллельное соединение N вязкоупругих и одной упругой ветвей (фиг. 2). В каждой ветви кинематику процесса деформирования будем определять наложением малых деформаций на конечные. Все это приводит к аддитивности упругих потенциалов каждой ветви в неравенстве Клаузиуса – Дюгема предыдущего раздела, следствием чего является суммирование напряжений параллельных ветвей модели и ее термодинамическая допустимость (доказательство последнего аналогично проведенному в конце предыдущего раздела).

Обозначим $T^{(i)}$ напряжения в i -й вязкоупругой или упругой ветвях. Тогда

$$T = \sum_{i=1}^{N+1} T^{(i)} \tag{4.1}$$

причем уравнению равновесия удовлетворяет тензор полных напряжений T , но не его слагаемые.

Так как при параллельном соединении полные градиенты места каждой ветви одинаковы, то в соответствии с (3.1) справедливо соотношение

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_E^{(i)} \cdot \mathbf{f}_V^{(i)} \cdot \mathbf{F}_0 \quad \forall i \quad (4.2)$$

где $\mathbf{f}_E^{(i)}$ и $\mathbf{f}_V^{(i)}$ – градиенты малых упругих и малых вязких деформаций в i -й ветви и \mathbf{F}_0 – накопленный градиент места (один и тот же для любой ветви модели). В чисто упругой ветви (пусть для нее $i = N + 1$) $\mathbf{f}_V^{(N+1)} = \mathbf{g}$. Следствием уравнения (4.2) является равенство полных малых градиентов перемещений, деформаций и поворотов для всех ветвей модели:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}_E^{(i)} + \mathbf{h}_V^{(i)}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T) = \mathbf{e}_E^{(i)} + \mathbf{e}_V^{(i)}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} - \mathbf{h}^T) = \mathbf{d}_E^{(i)} + \mathbf{d}_V^{(i)} \\ \mathbf{h}_V^{(N+1)} &= \mathbf{e}_V^{(N+1)} = \mathbf{d}_V^{(N+1)} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для каждой из ветвей уравнения состояния в соответствии с (3.5) примут вид

$$\mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{T}_0^{(i)} + \varepsilon \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_0^{(i)} - \varepsilon \mathbf{T}_0^{(i)} \cdot \mathbf{d} + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV(i)} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_V^{(i)}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II(i)} \eta^{(i)} \quad (4.4)$$

Здесь $\eta^{(i)}$ и $\sigma_0^{(i)}$ (последняя входит в тензоры $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV(i)}$ и $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II(i)}$) определяются выражениями (2.12)–(2.14) для соответствующих ветвей. Тогда из (4.1) получаем уравнение состояния для всей модели

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \varepsilon \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_0 - \varepsilon \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{d} + \varepsilon \sum_{i=1}^{N+1} (\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV(i)} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_V^{(i)}) + \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II(i)} \eta^{(i)})$$

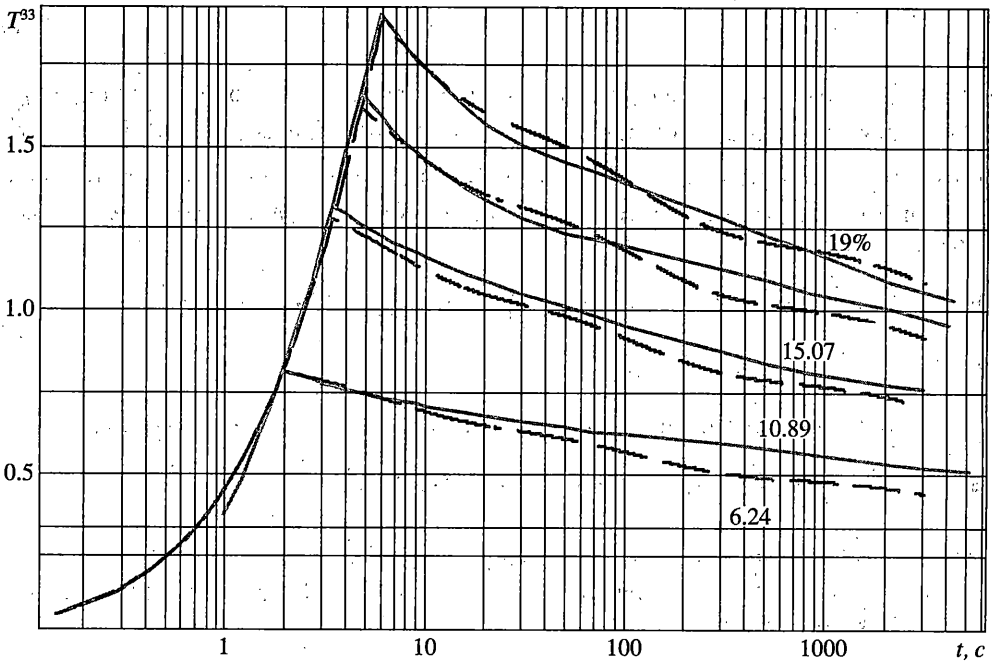
Отсюда вытекает точное эволюционное соотношение

$$\mathbf{T}^J = \sum_{i=1}^{N+1} (\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV(i)} \cdot (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_V^{(i)}) + \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II(i)} \dot{\eta}^{(i)}), \quad \dot{\mathbf{e}}_V^{(i)} = \frac{1}{\mu^{(i)}} \mathbf{T}^{(i)}, \quad \dot{\mathbf{e}}_V^{(N+1)} = 0$$

где $\mu^{(i)}$ и $\mathbf{T}^{(i)}$ – коэффициент вязкости и напряжение в i -ой вязкоупругой ветви.

Для упрощения определения параметров модели по экспериментальным данным полагаем далее, что все тензоры четвертого ранга $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV(i)}$ одинаковы, как и тензоры второго ранга $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II(i)}$. Таким образом модель имеет семь материальных параметров $k_1, k_2, p_1, p_2, q_1, q_2, \chi_{20}$ и дискретный релаксационный спектр (N коэффициентов вязкости).

Параметры модели при $N = 4$ были идентифицированы по данным экспериментов для вязкоупругого высоконаполненного полимера на основе полидиенэпоксиуретана. Параметры, отвечающие за слабую упругую сжимаемость, заимствовались из работ [7, 8], в которых для подобного материала рассмотрены зависимости “модуля сдвига” G и “объемного модуля” B от изменения объема. В этих работах были получены следующие значения: $p_1 + p_2 = 1.425 G$, $q_1 + q_2 = 673.97 G$, $\chi_{20} = 769.4$ МПа. Идентификация остальных параметров ($k_1, k_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$) осуществлялась по результатам экспериментов на одноосное растяжение – релаксацию образцов с учетом полной истории деформирования [29]. Использовался метод сканирования в варианте, предложенном в [30]. Были получены следующие значения: $k_1 = 0.4$ МПа, $k_2 = 0.1$ МПа, $\mu_1 = 0.2$ МПа · с, $\mu_2 = 4.1$ МПа · с, $\mu_3 = 250.0$ МПа · с, $\mu_4 = 1.1 \cdot 10^5$ МПа · с. Результаты идентификации приведены на фиг. 3. Сплошной линией показаны экспериментальные данные (истинное осевое напряжение \mathbf{T}^{33} , скорость растяжения до фиксации де-



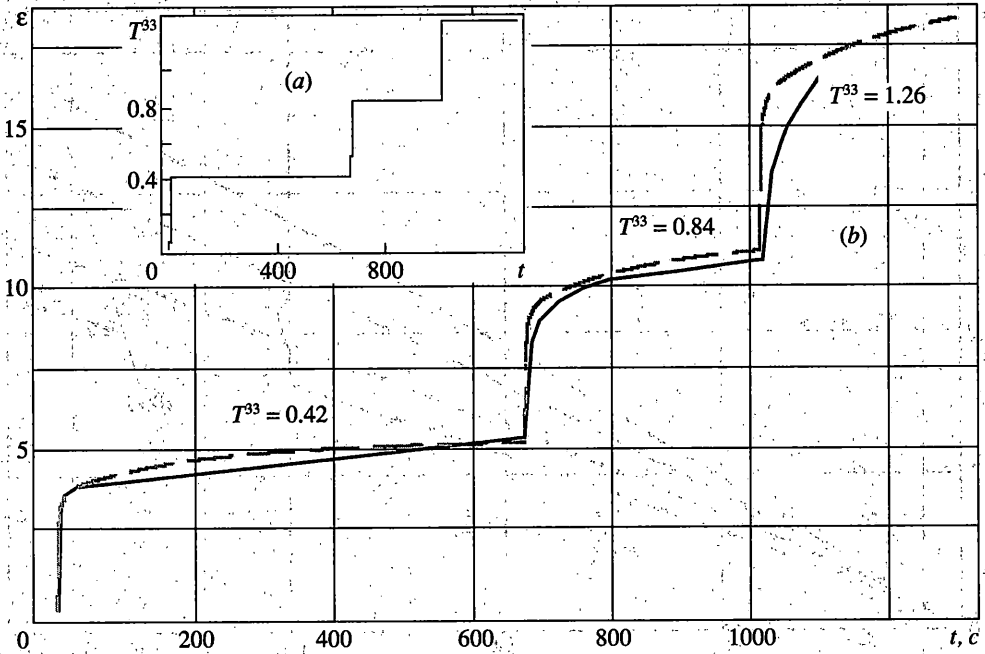
Фиг. 3

формации – 100 мм/мин, $T = 20^\circ\text{C}$) штриховой – результаты, полученные по идентифицированной по этому же эксперименту модели. Кривые соответствуют различным уровням фиксирования деформации. Максимальная относительная погрешность составила не более 9%. Идентифицированная таким образом модель аттестовывалась на таких же экспериментах одноосного растяжения–релаксации, но с меньшими скоростями растяжения (10 мм/мин, 1 мм/мин). Здесь максимальная относительная погрешность не превышала 10%. Другая независимая проверка результатов идентификации осуществлялась сравнением с серией экспериментов на ползучесть со “ступенчатым” нагружением при различной ширине “ступеньки” (фиг. 4, а). На фиг. 4, б приведены данные эксперимента для одного из режимов нагружения (сплошная линия) и результаты его описания идентифицированной моделью (штриховая кривая). Как видно, модель демонстрирует удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. Для всех режимов нагружения погрешность в описании моделью экспериментальных данных составила не более 12%. Отметим, что наибольший вклад в погрешность внесли третьи ступени нагружения, соответствующие началу разрушения материала.

5. Простой сдвиг при наложении сжатия. Для дальнейшего анализа поведения построенной модели рассматривалась задача о простом сдвиге при наложении сжатия

$$\mathbf{R} = (x_1 + \lambda_1 t x_2) \mathbf{i} + (1 - \lambda_2 t) x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \quad (5.1)$$

где λ_1, λ_2 – скорости сдвига и осадки, t – время. Задачу можно решать как в скоростях, так и в приращениях. Приведем алгоритм решения для второго случая. Учитывая однородность полей деформаций и напряжений (уравнение равновесия удовлетворяется тождественно), он сводится к следующему.



Фиг. 4

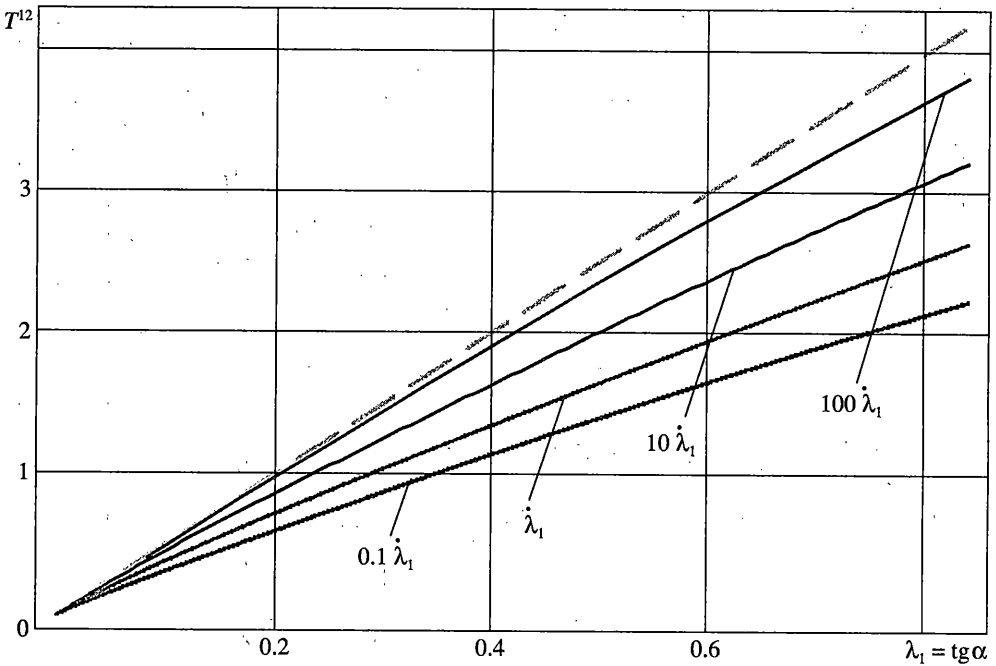
(а) Разбивая заданную кинематику на последовательность достаточно малых шагов, находим из (5.1) приращение перемещений $\mathbf{u} = \lambda_1(t - t_0)x_2\mathbf{i} - \lambda_2(t - t_0)x_2\mathbf{j}$ при переходе из промежуточной конфигурации, определяемой моментом времени t_0 , в текущую t , полный градиент малых перемещений

$$\mathbf{h} = \frac{\lambda_1(t - t_0)}{1 - \lambda_2 t_0} \mathbf{ij} - \frac{\lambda_2(t - t_0)}{1 - \lambda_2 t_0} \mathbf{jj} \quad (5.2)$$

полные тензоры малых деформаций и поворотов

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1(t - t_0)}{1 - \lambda_2 t_0} (\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) - \frac{\lambda_2(t - t_0)}{1 - \lambda_2 t_0} \mathbf{jj}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1(t - t_0)}{1 - \lambda_2 t_0} (\mathbf{ij} - \mathbf{ji})$$

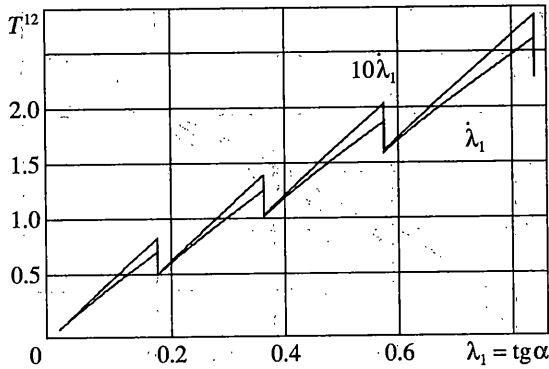
(б) Пусть в момент времени t_0 мы знаем в каждой ветви напряжения $\mathbf{T}_0^{(i)}$ (а, значит, и \mathbf{T}_0) и $\mathbf{F}_{E0}^{(i)}$ — упругие градиенты места, по которым вычисляются меры упругих деформаций Фингера $\Phi_{E0}^{(i)}$, и $\sigma_0^{(i)}$ (последнее определяется из соотношения (2.14), зная $\Phi_{E0}^{(i)}$). В начальный момент времени ($t_0 = 0$) $\mathbf{T}_0^{(i)} = 0$, $\Phi_{E0}^{(i)} = \mathbf{g}$ и $\sigma_0^{(i)} = 0$. Известные $\Phi_{E0}^{(i)}$ и $\sigma_0^{(i)}$ позволяют для каждой ветви найти суммы $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV(i)} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_V^{(i)}) + \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{II(i)} \eta^{(i)}$, которые определяются последними тремя строками соотношения (2.11), в которых, в свою очередь, $\eta^{(i)}$ определяется из соотношений (2.12), (2.13), а \mathbf{e} , являясь во втором разделе



Фиг. 5

малыми чисто упругими деформациями, заменяются на $\mathbf{e} - \mathbf{e}_V^{(i)}$ ($\mathbf{e}_V^{(i)} = \mathbf{T}_0^{(i)}(t - t_0)/\mu^{(i)}$). В результате определяющие уравнения (4.4) позволяют найти в каждой ветви напряжения $\mathbf{T}^{(i)}$ (а, значит, и \mathbf{T}) в момент времени t .

(с) Определяем упругие градиенты места $\mathbf{F}_E^{(i)}$, соответствующие этим напряжениям: $\mathbf{F}_E^{(i)} = \mathbf{F}_{E0}^{(i)} + \mathbf{h}_E^{(i)} \cdot \mathbf{F}_{E0}^{(i)}$ (см. (2.4)), для чего необходимо найти $\mathbf{h}_E^{(i)}$. Для чисто упругой ветви, в силу (4.3), $\mathbf{h}_E^{(N+1)} = \mathbf{h}$, где \mathbf{h} определяется соотношением (5.2). Для вязкоупругих ветвей $\mathbf{h}_E^{(i)}$ можно найти по-разному и один из вариантов (не обязательно самый эффективный) изложен ниже. Поскольку в соотношении (4.4) $\mathbf{e} - \mathbf{e}_V^{(i)} = \mathbf{e}_E^{(i)}$ — симметричная часть $\mathbf{h}_E^{(i)}$, и учитывая, что теперь все остальные слагаемые в (4.4) известны, можем его трактовать как тензорное уравнение относительно неизвестных $\mathbf{h}_E^{(i)}$. Но при этом будем иметь только 6 независимых уравнений (в силу симметрии тензоров напряжений) для 9-ти неизвестных. Поэтому приведем симметричный тензор $\mathbf{T}^{(i)}$ (4.4) к несимметричному тензору Пиолы — Кирхгофа первого рода $\mathbf{P}_I^{(i)} = \mathcal{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{(i)}$, где $\mathcal{J} = I_3(\mathbf{F})$, а \mathbf{F} — известный градиент полных деформаций. В результате для каждой вязкоупругой ветви получаем систему 9-ти уравнений с 9-тью неизвестными — координатными составляющими тензора $\mathbf{h}_E^{(i)}$, решив которую, находим $\mathbf{F}_E^{(i)}$.



Фиг. 6

(d) Зная $T^{(i)}$, $F_E^{(i)}$ и $\sigma^{(i)}$ ($\sigma^{(i)} = \sigma_0^{(i)} + \eta^{(i)}$) и полагая их начальными для следующего шага нагружения (кинематического для данной задачи), т.е. снабжая индексом "0", переходим к п. (b), если нагрузка не исчерпана полностью.

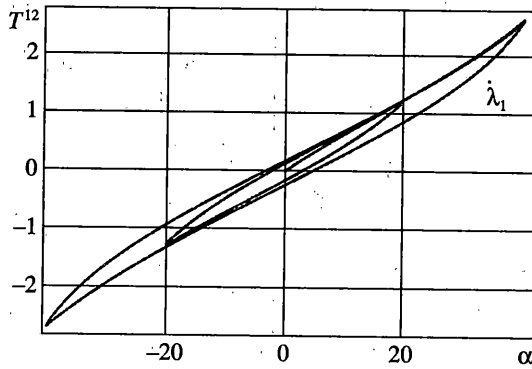
Отметим, что при решении краевой задачи будет, естественно, и другой алгоритм ее реализации.

На фиг. 5 приведены результаты расчетов при сдвиге до 40° с различной скоростью и нулевом сжатии ($\dot{\lambda}_1 = 0.08391 \text{ c}^{-1} \sim \pi/45$, $\dot{\lambda}_2 = 0$). Шаг по времени принят $1 \cdot 10^{-5} \text{ c}$. Показана зависимость напряжения сдвига T^{12} от величины сдвига λ_1 ($\lambda_1 = \tan \alpha$, где α – угол сдвига; штриховая линия – упругое решение, сплошные линии – вязкоупругие решения). Модель корректно описывает зависимость вязкоупругих свойств материала от скорости нагружения: с увеличением скорости материал начинает вести себя более "упруго", вязкоупругое решение стремится к упругому.

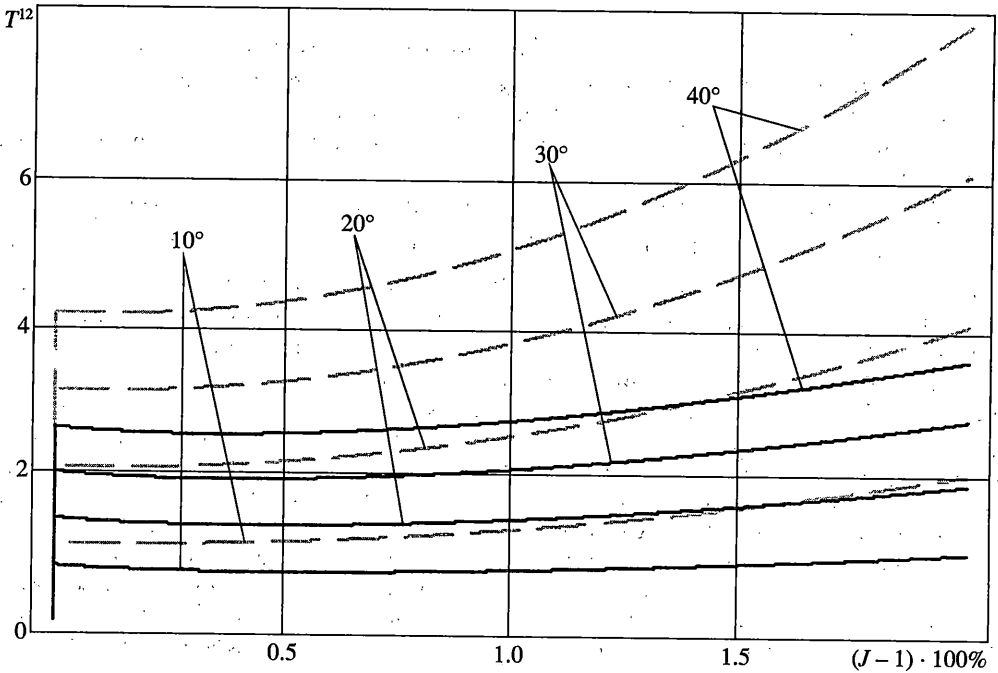
Результаты расчета при сдвиге с периодической релаксацией приведены на фиг. 6. Весь интервал сдвига разбивался на 4 участка (10° , 20° , 30° , 40°), деформирование на каждом из которых осуществлялось с постоянной скоростью. При достижении конца каждого участка осуществлялась фиксация угла сдвига в течение периода, в 5 раз превышающего период сдвига, в результате чего напряжения в материале релаксировали. Осуществляя этот процесс с большей скоростью, уровень напряжений к концу каждого участка также увеличивается. Уровень напряжений, до которого происходит полная релаксация, остается постоянным и не зависит от скорости достижения исходного напряжения.

На фиг. 7 приведены результаты расчета при циклическом нагружении с увеличением амплитуды сдвига (сдвиги до 20° и 40° при одной и той же постоянной скорости $\dot{\lambda}_1$). Проявление вязкоупругих свойств в этом случае выражается в возникновении гистерезисной петли, связанной с потерей части накопленной энергии на работу релаксационных механизмов в материале. Соответственно, с увеличением амплитуды увеличивается общая площадь петли и потери энергии возрастают.

Следующая серия расчетов связана с анализом взаимовлияния слабой упругой сжимаемости и вязкости материала на решение задачи. На фиг. 8 приведены усилия, необходимые для осуществления сдвига до 10° , 20° , 30° и 40° , и их изменение при последующем сжатии до 1.5%. Все расчеты проводились для постоянных скоростей сдвига $\dot{\lambda}_1 = 0.08391 \text{ c}^{-1}$ и сжатия $\dot{\lambda}_2 = 0.002 \text{ c}^{-1}$. Штриховыми линиями показано чисто

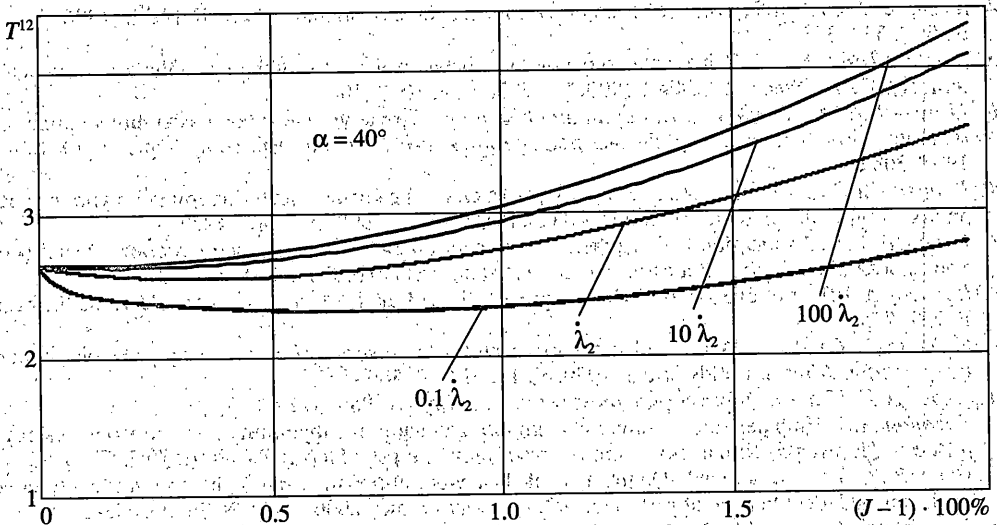


Фиг. 7



Фиг. 8

упругое решение и для него явно виден эффект уменьшения угла сдвига с увеличением сжатия при фиксированном напряжении сдвига. Как показано в [7–9], этот эффект связан с увеличением “модуля сдвига” материала. Эффект значительно слабее для вязкоупругого материала, так как вязкие механизмы, отвечающие за релаксацию напряжения, конкурируют с упругими, приводящими к увеличению “модуля сдвига”, и преобладают на участке достаточно малого сжатия. Поэтому здесь возникает локальное падение напряжений (ямка). С увеличением сжатия напряжения начинают расти, т.е. эффект слабой упругой сжимаемости начинает проявляться сильнее. С увеличением скорости сжатия материал за одно и то же время успевает мень-



Фиг. 9

ше отрелаксировать и решение стремится к упругому, что и продемонстрировано на фиг. 9.

Таким образом, построенная модель проявляет заложенные в нее свойства вязкости и слабой упругой сжимаемости.

6. Заключение. Основываясь на результатах работы [1], построено определяющее соотношение вязкоупругого материала при конечных деформациях. Кинематика процесса определяется наложением малых вязких и малых упругих деформаций на конечные вязкоупругие. Получен общий вид определяющего соотношения в приращениях и его точный эволюционный аналог. Осуществлена конкретизация уравнения состояния, используя упругий закон для слабосжимаемого материала и линейно-вязкий закон для описания вязких свойств. Показано, что полученные уравнения удовлетворяют термодинамическому неравенству Клаузиуса – Дюгема.

С привлечением имитационного подхода построена модель вязкоупругого слабосжимаемого деформируемого твердого тела с дискретным спектром времен релаксации. Осуществлены идентификация параметров модели по данным экспериментов и независимая проверка модели, показавшая удовлетворительное совпадение с результатами других экспериментов. Проанализировано качественное поведение модели на задаче простого сдвига при наложении сжатия.

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред УрО РАН по разделам Программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (2003 г.) и интеграционной Программы УрО РАН, СО РАН и ДвО РАН при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 01-01-96494 и 03-01-00554).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новокшианов Р.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 77–95.
2. Трудделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. Ogden R.W. Non-Linear Elastic Deformations. Chichester: Horwood, 1984. 532 p.

4. Anand L. A constitutive model for compressible elastomeric solids // *Comput. Mech.* 1996. V. 18. № 5. P. 339–355.
5. Lambert-Diani J., Rey C. New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers // *Eur. J. Mech. A. Solids.* 1999. V. 18. № 6. P. 1027–1043.
6. Мошев В.В., Свистков А.Л., Гаришин О.К. и др. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. Екатеринбург: УрО РАН, 1997. 508 с.
7. Кузнецова В.Г., Роговой А.А. Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // *Изв. РАН. МТТ.* 1999. № 4. С. 64–77.
8. Роговой А.А., Кузнецова В.Г. Эффект учета слабой сжимаемости эластомеров. Осесимметричная задача. Аналитическое решение // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 6. С. 27–37.
9. Rogovoy A. Effect of elastomer slight compressibility // *Eur. J. Mech. A. Solids.* 2001. V. 20. № 5. P. 757–775.
10. Cescotto S., Fonder G. A finite element approach for large strain of nearly incompressible rubber-like materials // *Int. J. Solids Struct.* 1979. V. 15. № 8. P. 589–605.
11. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
12. Роговой А.А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // *Вестн. ПермГТУ. Динамика и прочность машин.* Пермь: ПермГТУ, 2001. № 2. С. 83–90.
13. Haupt P., Lion A., Backhaus E. On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. № 26. P. 3633–3646.
14. Holzapfel G.A., Simo J.C. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes // *Int. J. Solids Struct.* 1996. V. 33. № 20–22. P. 3019–3034.
15. Lion A. On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures // *J. Mech. Phys. Solids.* 1997. V. 45. № 11/12. P. 1805–1834.
16. Lion A. A physically based method to represent the thermomechanical behaviour of elastomers // *Acta Mech.* 1997. V. 123. № 1–4. P. 1–25.
17. Miehe C., Keck J. Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation // *J. Mech. Phys. of Solids.* 2000. V. 48. № 2. P. 323–365.
18. Nedjar B. Frameworks for finite strain viscoelastic-plasticity based on multiplicative decompositions. P. I: Continuum formulations // *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 2002. V. 191. № 15–16. P. 1541–1562.
19. Reese S., Govindjee S. A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects // *Int. J. Solids Struct.* 1998. V. 35. № 26–27. P. 3455–3482.
20. Bergstrom J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers // *J. Mech. Phys. Solids.* 1998. V. 46. № 5. P. 931–954.
21. Boyce M.C., Socrate S., Lana P.G. Constitutive model for the finite deformation stress-strain behavior of poly(ethylene terephthalate) above the glass transition // *Polymer.* 2000. V. 41. № 6. P. 2183–2201.
22. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
23. Palmov V.A. Large strains in viscoelastoplasticity // *Acta Mech.* 1997. V. 125. № 1–4. P. 129–139.
24. Пальмов В.А. Сравнение методов декомпозиции деформации в нелинейной вязкоупругости и упругопластичности // *Упругость и неупругость.* М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 81–87.
25. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
26. Пальмов В.А. Принципы термодинамики в теории определяющих уравнений // *Математические методы механики деформируемого твердого тела.* М.: Наука, 1986. С. 112–118.
27. Bonet J. Large strain viscoelastic constitutive models // *Int. J. Solids Struct.* 2001. V. 38. № 17. P. 2953–2968.
28. Tervoort T.A., Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Govaert L.E. A constitutive equation for the elasto-viscoplastic deformation of glassy polymers // *Mech. Time-Dependent Materials.* 1998. V. 1. № 3. P. 269–291.
29. Кузнецов Г.Б., Адамов А.А. Отчет о НИР: Развитие феноменологических уравнений нелинейной теории ползучести наполненного полимера. Т. 2. Пермь: Ин-т механики сплошных сред УрО РАН, 1975. 108 с.
30. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: Ин-т механики сплошных сред УрО РАН, 2003. 412 с.