

УДК 539.3

© 2005 г. Н.Д. ВАЙСФЕЛЬД

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН НА ДЕФЕКТАХ В СФЕРИЧЕСКИ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Рассматривается сферически слоистая среда, подвергающаяся воздействию упругой нестационарной волны. Упругие параметры среды скачкообразно меняются на сферических поверхностях, где имеются дефекты в виде трещин либо тонких жестких включений. Метод решения задач дифракции волн на таких дефектах основан на введении вместо смещений и напряжений новых неизвестных функций, линейно связанных с ними. Дальнейшее их представление через решения волновых уравнений, позволяет решить задачу для произвольного числа слоев. Метод проиллюстрирован для случая дифракции нестационарной волны кручения на межфазной трещине, расположенной в двухслойной среде. Задача сводится к интегральному уравнению, которое решается приближенно. Получена формула и численно исследовано значение коэффициента интенсивности напряжений.

1. Введение. Задачи концентрации напряжений для межфазных дефектов в сферически-слоистой среде в статической постановке исследовались ранее в [1, 2]. Так, в [1] решена осесимметричная задача для упругой среды со сферическим включением, ослабленной межфазной трещиной, в [2] решена задача о межфазном разрезе в двухслойной толстостенной сферической оболочке. Динамические задачи исследованы в меньшей степени. Здесь нужно отметить работы [3–5], посвященные решению задач дифракции волн на сферических препятствиях. Метод решения некоторых основных канонических задач нестационарной динамики межфазных трещин предложен в [6]. Задачи о распространении магнитоупругих волн сдвига в периодически-слоистой среде, а также о напряженном состоянии слоистых сферических оболочек решены в [7, 8]. В публикуемой работе решается нестационарная задача дифракции волн на межфазной трещине, расположенной в сферически слоистой среде.

2. Постановка задачи. В неограниченной сферически слоистой упругой среде имеются дефекты типа трещин или тонких включений, расположенные на сферических поверхностях смены упругих постоянных. Их поверхность в сферической системе координат r, θ, φ описывается соотношениями:

$$r = R_i, \quad \omega_{1i} \leq \theta \leq \omega_{2i}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (i = \overline{0, m}) \quad (2.1)$$

Поверхности $r = R_i$ являются поверхностями смены упругих постоянных среды, которые обозначаются $\mu_i, G_i; c_i^{(1)}, c_i^{(2)}$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в i -м слое; $R_{-1} = 0, R_{m+1} = \infty$. В момент времени $t = 0$ со средой взаимодействует упругая нестационарная волна, набегающая из бесконечности. Требуется определить волновое поле в такой среде.

3. Метод решения. Согласно подхода, предложенного в [9], вместо смещений u_r, u_θ, u_φ и напряжений $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{r\varphi}$ в каждом i -м слое ($i = \overline{0, m}$) вводятся новые неизвестные функции u_r, z, z^* и τ, τ^* :

$$\sin \theta \left\| \begin{matrix} z_{pn}(r, \theta) \tau_{pn}(r, \theta) \\ z_{pn}^*(r, \theta) \tau_{pn}^*(r, \theta) \end{matrix} \right\| = \sin \theta \left\| \begin{matrix} u_{\theta pn}(r, \theta) \tau_{\theta pn}(r, \theta) \\ u_{\varphi pn}(r, \theta) \tau_{\varphi pn}(r, \theta) \end{matrix} \right\| - \quad (3.1)$$

$$- i n \left\| \begin{matrix} u_{\varphi pn}(r, \theta) \tau_{r\varphi pn}(r, \theta) \\ u_{\theta pn}(r, \theta) \tau_{r\theta pn}(r, \theta) \end{matrix} \right\|$$

Здесь $f_{pn}(r, \theta)$ – трансформанта Лапласа–Фурье смещений и напряжений

$$f_p(r, \theta, \varphi) = \int_0^{\infty} e^{-pn} f(r, \theta, \varphi, t) dt, \quad f_{pn} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\varphi} f_p(r, \theta, \varphi) d\varphi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Использование формул связи смещений упругой среды с волновыми потенциалами Φ, Ψ, Ω [3] приводит в пространстве трансформант Лапласа–Фурье к соотношениям для неизвестных функций

$$u_{pn}(r, \theta) = \Phi'_{pn} + \frac{1}{r} \nabla_n \Omega_{pn}(r, \theta), \quad rz_{pn}(r, \theta) = -\nabla_n [\Phi_{pn}(r, \theta) + (r\Omega_{pn})'] \quad (3.2)$$

$$z_{pn}^*(r, \theta) = \nabla_n \Psi_{pn}(r, \theta), \quad \nabla_n f_{pn}(r, \theta) = \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \frac{[\sin \theta f_{pn}^*]}{\sin \theta}$$

где штрих обозначает производную по переменной r , точка – производную по θ . Трансформанты Лапласа–Фурье волновых функций в каждом слое должны удовлетворять уравнениям

$$[r^2 \Phi'_{pn}(r, \theta)]' - \nabla_n \Phi_{pn}(r, \theta) - \frac{r^2 p^2}{c_1^2} \Phi_{pn}(r, \theta) = 0 \quad (3.3)$$

где c_1 обозначает скорость распространения продольных волн в i -м слое. Поскольку в каждом слое она будет своя, чтобы различать их вводится обозначение $c_i^{(1)}$ ($i = \overline{0, m}$). Функции Ψ, Ω удовлетворяют (3.3), где вместо c_1 следует взять c_2 – скорость распространения поперечных волн в i -м слое $c_i^{(2)}$ ($i = \overline{0, m}$). К (3.3) применяется интегральное преобразование Лежандра

$$f_{pnk}(r) = \int_0^{\pi} \sin \theta P_k^{|n|}(\cos \theta) f_{pn}(r, \theta) d\theta \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.4)$$

Далее общее решение уравнений (3.3) подставляется в соотношения (3.2), к которым также предварительно применяется преобразование (3.4).

В результате получим выражения для смещений и напряжений каждого i -го слоя ($i = \overline{0, m}$):

$$u_{pnk}(r) = \sqrt{R} r^2 p c_1^{-1} [X_{pnk}^0 I_v^+(p c_1^{-1} r) + Y_{pnk}^0 K_v^+(p c_1^{-1} r)] + \quad (3.5)$$

$$+ p^2 r^2 c_2^{-1} k(k+1) [X_{pnk}^1 I_v^+(p c_2^{-1} r) + Y_{pnk}^1 K_v^+(p c_2^{-1} r)]$$

$$z_{pnk}(r) = k(k+1) \{ \sqrt{R} (p c_1 r)^{-1} [X_{pnk}^0 I_v^+(p c_1^{-1} r) + Y_{pnk}^0 K_v^+(p c_1^{-1} r)] +$$

$$+ \sqrt{R} (p c_2 r)^{-1/2} [X_{pnk}^1 I_v^+(p c_2^{-1} r) + Y_{pnk}^1 K_v^+(p c_2^{-1} r)] \}$$

$$\begin{aligned}
 z_{pnk}^*(r) &= (rR_p c_2)^{-1/2} k(k+1) [X_{pnk} I_\nu(p c_2^{-1} r) + Y_{pnk} K_\nu(p c_2^{-1} r)] \\
 r^2 \sigma_{pnk}(r) &= 2G \{ [X_{pnk}^0 I_\nu(p c_1^{-1} r) + Y_{pnk}^0 G_\nu^+(p c_1^{-1} r) + k(k+1) \times \\
 &\times [X_{pnk}^1(p c_2 r I_\nu^+(p c_2^{-1} r) - (p c_2 r)^{-1/2} I_\nu(p c_2^{-1} r)) + Y_{pnk}^1(p c_2 r K_\nu^+(p c_2^{-1} r) - (p c_2 r)^{-1/2} K_\nu(p c_2^{-1} r))] \} \\
 r^2 \tau_{pnk}(r) &= 2Gk(k+1) \{ X_{pnk}^0 [(p c_1^{-1} r)^{-1/2} I_\nu(p c_1^{-1} r) + (p c_1 r) I_\nu^+(p c_1^{-1} r)] + \\
 &+ Y_{pnk}^0 [(p c_1^{-1} r)^{-1/2} K_\nu(p c_1^{-1} r) - (p c_2 r) K_\nu^+(p c_2^{-1} r)] + X_{pnk}^1 I_\nu(p c_2^{-1} r) + Y_{pnk}^1 G_\nu^1(p c_2^{-1} r) \} \\
 r \tau_{pnk}^*(r) &= Gk(k+1) \{ X_{pnk} [(p c_1^{-1} r) I_\nu^+(p c_1^{-1} r) + (p c_2 r)^{-1/2} I_\nu(p c_2^{-1} r)] + \\
 &+ Y_{pnk} [p c_2 r K_\nu^+(p c_2^{-1} r) - (p c_2 r)^{-1/2} K_\nu(p c_2^{-1} r)] \} \\
 \nu &= k + 1/2, \quad I_\nu^\pm(z) = z^{\frac{3}{2}} [k I_\nu(z) - z I_{\nu \pm 1}(z)].
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

формулы для $K_\nu^\pm(z)$ – аналогичны, но вместо $I_\nu(z)$ следует подставить $K_\nu(z)$, $X_{pnk}^{0,1}$, $Y_{pnk}^{0,1}$, X_{pnk} , Y_{pnk} – произвольные постоянные.

Поле смещений и напряжений для соответствующего i -го слоя строится в виде

$$i T(r, \theta, \varphi, t) = i T^1(r, \theta, \varphi, t) + i T^0(r, \theta, \varphi, t) \quad (i = \overline{0, m}) \tag{3.7}$$

где $i T^0 = [i \mu_r^0, i z^0, i z^{0*}, i \sigma_r^0, i \tau_r^0, i \tau^{0*}]$ – вектор, компоненты которого смещения и напряжения, вызванные действующими в i -м слое нестационарными объемными силами, а $i T^1$ – вектор, содержащий искомые смещения и напряжения i -го слоя, трансформанты которых определяются в (3.5), (3.6). Введем скачки искомых функций $i z_{pn}^*$ и $i \tau_{pn}^*$ и их трансформант

$$\left\| \begin{array}{l} i z_{pn}^*(R_i - 0, \theta) - i z_{pn}^*(R_i + 0, \theta) \\ i \tau_{pn}^*(R_i - 0, \theta) - i \tau_{pn}^*(R_i + 0, \theta) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \langle i z_{pn}^*(R_i, \theta) \rangle \\ \langle i \tau_{pn}^*(R_i, \theta) \rangle \end{array} \right\| \tag{3.8}$$

$$\int_{\omega_{ii}}^{\omega_{2i}} \sin \xi \left\| \begin{array}{l} \langle i z_{pn}^*(R_i, \xi) \rangle \\ \langle i \tau_{pn}^*(R_i, \xi) \rangle \end{array} \right\| P_k^{|\eta|}(\cos \xi) d\xi = \left\| \begin{array}{l} i z_{pnk}^{*1} \\ i \tau_{pnk}^{*1} \end{array} \right\| \tag{3.9}$$

С учетом скачков (3.9) и представления (3.7), условие непрерывности смещений и напряжений при $r = R_i$ ($i = \overline{0, m}$) записывается так:

$$\begin{aligned}
 i z_{pnk}^*(R_i) + i z_{pnk}^{*0}(R_i) - i z_{pnk}^*(R_i) - i z_{pnk}^{*0}(R_i) &= i z_{pnk}^{*1} \\
 i \tau_{pnk}^*(R_i) + i \tau_{pnk}^{*0}(R_i) - i \tau_{pnk}^*(R_i) - i \tau_{pnk}^{*0}(R_i) &= i \tau_{pnk}^{*1}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Чтобы обеспечить регулярность искомых функций $i \mu_{pnk}(r)$, $i z_{pnk}(r)$, $i z_{pnk}^*(r)$, $i \sigma_{pnk}(r)$, $i \tau_{pnk}(r)$, $i \tau_{pnk}^*(r)$ в нуле и на бесконечности, требуется в соотношениях (3.5), (3.6), ко-

торые для каждого i -го слоя определяются своими упругими параметрами μ_i , G_i , $c_i^{(1)}$, $c_i^{(2)}$ и произвольными коэффициентами ${}_iX_{pnk}$, ${}_iY_{pnk}$, ${}_iX_{pnk}^0$, ${}_iY_{pnk}^0$, положить

$${}_0Y_{pnk} \equiv {}_0Y_{pnk}^0 \equiv {}_0Y_{pnk}^1 = 0, \quad {}_{m+1}X_{pnk} \equiv {}_{m+1}X_{pnk}^0 \equiv {}_{m+1}X_{pnk}^1 = 0 \quad (3.11)$$

Остается определить оставшиеся коэффициенты.

Неизвестные коэффициенты ${}_iX_{pnk}$ и ${}_iY_{pnk}$ определяются из условия непрерывности (3.10) с учетом формул (3.5):

$$\begin{aligned} k(k+1)\{\eta_i^{-1/2}[_iX_{pnk}I_v(\eta_i) + {}_iY_{pnk}K_v(\eta_i)] - \eta_i^1[_{i+1}X_{pnk}I_v(\eta_i^1) + {}_{i+1}Y_{pnk}K_v(\eta_i^1)]\} &= {}_iZ_{pnk}^* \\ k(k+1)R_i^{-1}\{[_iX_{pnk}(\eta_i I_v^+(\eta_i) - \eta_i^{-1/2}I_v(\eta_i)) + {}_iY_{pnk}(\eta_i K_v^+(\eta_i) - \eta_i^{-1/2}K_v(\eta_i))]G_i - \} \\ - \{[_{i+1}X_{pnk}(\eta_i^1 I_v^+(\eta_i^1) - (\eta_i^1)^{-1/2}I_v(\eta_i^1)) + {}_{i+1}Y_{pnk}(\eta_i^1 K_v^+(\eta_i^1) - (\eta_i^1)^{-1/2}K_v(\eta_i^1))]G_{i+1}\} &= {}_iT_{pnk}^* \\ \eta_i = R_i p(c_i^{(2)})^{-1}, \quad \eta_i^1 = R_i p(c_{i+1}^{(2)})^{-1}, \quad {}_iZ_{pnk}^* = {}_i z_{pnk}^{*1} + {}_{i+1} z_{pnk}^{*0}(R_i) - {}_i z_{pnk}^{*0}(R_i) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$${}_iT_{pnk}^* = {}_i \tau_{pnk}^{*1} + {}_{i+1} \tau_{pnk}^{*0}(R_i) - {}_i \tau_{pnk}^{*0}(R_i)$$

Полученную систему уравнений (3.12), введя векторы

$$x_i = \begin{Bmatrix} {}_iX_{pnk} \\ {}_iY_{pnk} \end{Bmatrix}, \quad f_i = \begin{Bmatrix} {}_iZ_{pnk}^* \\ {}_iT_{pnk}^* \end{Bmatrix} \quad (i = \overline{0, m+1})$$

можно записать в виде

$$a_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, \quad x_{i+1} = c_i x_i - b_i^{-1} f_i; \quad c_i = b_i^{-1} a_i \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} a_i &= \begin{Bmatrix} k(k+1)\eta_i^{-1/2}I_v(\eta_i) & k(k+1)\eta_i^{-1/2}K_v(\eta_i) \\ k(k+1)R_i^{-1}(\eta_i I_v^+(\eta_i) - \eta_i^{-1/2}I_v(\eta_i))G_i & k(k+1)R_i^{-1}(\eta_i K_v^+(\eta_i) - \eta_i^{-1/2}K_v(\eta_i))G_i \end{Bmatrix} \\ b_i &= \begin{Bmatrix} -k(k+1)\eta_i^1 I_v(\eta_i^1) & -k(k+1)\eta_i^1 K_v(\eta_i^1) \\ -k(k+1)R_i^{-1}(\eta_i^1 I_v^+(\eta_i^1) - (\eta_i^1)^{-1/2}I_v(\eta_i^1))G_{i+1} & -k(k+1)R_i^{-1}(\eta_i^1 K_v^+(\eta_i^1) - (\eta_i^1)^{-1/2}K_v(\eta_i^1))G_{i+1} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Это позволяет получить ее решение в следующей форме:

$$\begin{aligned} x_i &= c_{j-1}^{(0)} x_0 - \sum_{l=0}^{j-1} c_{j-1}^{(l+1)} b_l^{-1} f_l \quad (i = \overline{0, m}) \\ c_j^{(l)} &= c_j, \quad c_{j-1}^{(l)}, \dots, c_l \quad (l < j), \quad c_j^{(l)} = c_j \quad (l = j), \quad c_j^{(l)} = I \quad (l > j) \end{aligned} \quad (3.14)$$

где I – единичная матрица.

Чтобы разрешить систему (3.13), согласно схемы решения подобных систем, предложенной в [10], надо найти вектора

$$x_0 = \begin{Bmatrix} {}_0X_{pnk} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad x_{m+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ {}_{m+1}Y_{pnk} \end{Bmatrix}$$

Для этого положим $i = m$ в (3.13), и подставим выражение для x_m , взятое из (3.14). В результате получаем

$$B_m \begin{pmatrix} {}_0X_{pnk} \\ 0 \end{pmatrix} - b_m \begin{pmatrix} 0 \\ {}_0Y_{pnk} \end{pmatrix} = f_m + \sum_{l=0}^{m-1} D_l^{(m)} f_l \quad (3.15)$$

$$B_m = a_m c_{m-1}^{(0)}, \quad D_l^{(m)} = a_m c_{m-1}^{(l+1)} b_l^{-1}$$

Разрешив уравнение (3.15), определяем неизвестные коэффициенты ${}_0X_{pnk}$ и ${}_0Y_{pnk}$. Таким образом, формулы (3.14) определяют коэффициенты в формулах для функций $z_{pnk}^*(r)$ и $\tau_{pnk}^*(r)$.

Аналогичная схема применяется для определения коэффициентов ${}_0X_{pnk}^{0,1}$ и ${}_0Y_{pnk}^{0,1}$ ($i = \overline{0, m+1}$), при этом используются условия непрерывности функций $u_{pnk}(r)$, $z_{pnk}(r)$, $\sigma_{pnk}(r)$ и $\tau_{pnk}(r)$ на каждой сферической поверхности, аналогичные (3.10).

Определив оставшиеся коэффициенты и подставив их в (3.5), (3.6), найдем трансформанты искоемых функций. В результате обращения этих трансформант получаем решение, выраженное через неизвестные скачки. Для их определения необходимо использовать условие на дефекте, что приводит к решению интегрального либо интегро-дифференциального уравнения относительно искоемых трансформант скачков.

Намеченную схему проиллюстрируем на примере частного случая поставленной задачи.

4. Задача о дифракции нестационарной упругой волны кручения на межфазной трещине, расположенной в двухслойной среде. Ставится задача о дифракции упругой нестационарной волны кручения [11]:

$$u_{\phi}^0(r, \theta, t) = \sin \theta [H(c_1^{(2)} t - r \cos \theta) - H(c_1^{(2)} r - r \cos \theta - t_0)] \quad (4.1)$$

на межфазной трещине (1.1) ($H(z)$ – единичная функция Хевисайда, t_0 – длительность импульса), расположенной в двухслойной среде ($i = 0, 1$). Предполагается, что берега трещины ($\omega_{10} = 0$, $\omega_{20} = \omega$, $r = R$) свободны от напряжений

$$\sigma(R, \theta, \varphi, t) = 0, \quad \tau_{r\theta}(R, \theta, \varphi, t) = 0 \quad (4.2)$$

Необходимо определить волновое поле и напряженное состояние при нулевых начальных условиях.

Так как имеет место осевая симметрия, то во всех вышеперечисленных формулах следует взять $n = 0$. Решение разыскивается в виде (3.7), где $i = 0, 1$. Для отыскания неизвестных коэффициентов ${}_iX_{pnk}$, ${}_iY_{pnk}$, ${}_0X_{pnk}^{0,1}$, ${}_0Y_{pnk}^{0,1}$ в формулах (3.5), (3.6) ($i = 0, 1$) нужно воспользоваться формулами (3.14), где следует взять $m = 0$. Тогда получаем такие выражения для коэффициентов ${}_0X_{pnk}$ и ${}_1Y_{pnk}$:

$${}_1Y_{pnk} = \frac{a_0 f_1 - b_1 f_0}{\Delta_{pnk}}, \quad {}_0X_{pnk} = \frac{a_1 f_0 - b_0 f_1}{\Delta_{pnk}}, \quad \Delta_{pnk} = a_0 a_1 - b_0 b_1 \quad (4.3)$$

где вид коэффициентов a_i , b_i определяется формулами (3.13). Найденные в (4.3) значения коэффициентов подставляются в (3.5). Смещения и напряжения будут определены, если будут найдены скачки z_{pnk}^{*1} , τ_{pnk}^{*1} .

Считается, что берега трещины не нагружены, т.е. $\langle \tau_{p0}^*(R, \theta) \rangle = 0$ и значит

$$\tau_{p0k}^{*1} = 0 \quad (4.4)$$

Проведем обращение трансформант Лежандра смещений и напряжений по формуле

$$f_{p0}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k0} f_{p0k}(r) P_k(\cos \theta), \quad \sigma_{k0} = \frac{2k+1}{2}$$

Для напряжений получим

$$r\tau_{p0}^*(r, \theta) = \int_0^{\omega} X_p(R, \xi) \sin \xi M_k(p, \theta, \xi) d\xi - f_p(\theta) \quad (4.5)$$

$$X_p(R, \xi) = \langle z_{p0}^*(R, \xi) \rangle = \frac{2G_0}{\sin \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sin \xi \langle u_{\varphi}(R, \xi) \rangle)$$

Чтобы получить уравнение для определения неизвестного скачка $X_p(R, \xi)$, воспользуемся равенством нулю напряжений на берегах трещины $r = R \pm 0$ и реализуем условие

$$\tau_{p0}^*(R-0, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \omega \quad (4.6)$$

Подставив (4.5) в (4.6), получим уравнение для определения искомого скачка $X_p(R, \xi) \equiv X_p(\xi)$:

$$\int_0^{\omega} X_p(\xi) \sin \xi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi) Q_k(p) d\xi = f_p(\theta) \quad (4.7)$$

$$Q_k(p) = [pq_1 K_{\nu}^+(pq_1) - (pq_1)^{-1/2} K_{\nu}(pq_1)] [pq_0 I_{\nu}^+(pq_0) - (pq_0)^{-1/2} I_{\nu}(pq_0)] \Delta_{\nu}^{-1} \quad (4.8)$$

$$q_1 = R(c_1^{(2)})^{-1}, \quad q_0 = R(c_0^{(2)})^{-1}, \quad \nu = k + 1/2$$

$$f_p(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta) \{ [{}_1z_{p0k}^*(pq_1 I_{\nu}^+(pq) - (pq_1)^{-1/2} I_{\nu}(pq_1))] a_1(R) - \quad (4.9)$$

$$- {}_1\tau_{p0k}^* [(pq_1 I_{\nu}^+(pq) - (pq_1)^{-1/2} I_{\nu}(pq_1))] b_0(R) \} \Delta_{\nu}^{-1}$$

$$\Delta_{\nu} = (q_0)^{-1/2} I_{\nu}(pq_0) K_{\nu+1}(pq_1) - (q_1)^{-1/2} K_{\nu}(pq_1) I_{\nu+1}(pq_0) \quad (4.10)$$

Если воспользоваться соотношением [10]:

$$\nabla_0 P_k(\cos \theta) = \begin{cases} k(k+1) P_k(\cos \theta) & (k = 1, 2, \dots) \\ 0 & k = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\nabla_0 = \sin^{-1} \theta [\sin \theta f^*(r, \theta)]$$

то интегральное уравнение (4.5) запишется в виде

$$\nabla_0 \int_0^{\omega} X_p(\xi) \sin \xi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2k(k+1)} P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi) Q_k(p) d\xi = f_p(\theta) \quad (4.12)$$

В ядре полученного интегро-дифференциального уравнения (4.12) выделим сингулярную часть. С этой целью исследуем поведение $Q_k(p)$ при $k \rightarrow \infty$. Используя зависимость [12]:

$$I_\nu(x)K_\mu(\xi) = \frac{2^{\mu-\nu}}{2\pi\sqrt{\nu\mu}} e^{\nu-\mu} \left(\frac{\mu}{\xi}\right)^\mu \left(\frac{x}{\nu}\right)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{\nu\mu}\right)\right] \quad (4.13)$$

получаем, что поведение $Q_k(p)$ при $k \rightarrow \infty$ описывается соотношением:

$$Q_k(p) = k \left[-q^* + O\left(\frac{1}{k}\right)\right], \quad q^* = \frac{1}{2\sqrt{q_0 q_1}}, \quad \frac{2k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} \left[2 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] \quad (4.14)$$

В (4.12) произведем разбиение ядра на две суммы:

$$\nabla_0 \int_0^\omega X_p(\xi) \sin \xi \left(\sum_{k=0}^N + \sum_{k=N+1}^\infty \right) \frac{2k+1}{2k(k+1)} P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi) Q_k(p) d\xi = f_p(\theta) \quad (4.15)$$

Величина N здесь выбирается так, чтобы в асимптотических представлениях (4.14) можно было ограничиться главным членом. Добавим и вычтем в скобках в (4.15) сумму

$$\sum_{k=0}^N \frac{2k+1}{k(k+1)} P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi) (-kq^*) \quad (4.16)$$

а в полученном после этого ряду используем представления (4.14). В результате найдем новое приближенное представление ядра интегро-дифференциального уравнения (4.12), которое отличается от исходного тем меньше, чем больше выбирается значение величины N :

$$\nabla_0 \int_0^\omega X_p(\xi) \sin \xi [-S_0(\theta, \xi) + S_1(\theta, \xi) + S_2(\theta, \xi, p)] d\xi = \frac{2}{q^*} f_p(\theta) \quad (4.17)$$

$$S_0 = \sum_{k=0}^\infty P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi), \quad S_1 = \sum_{k=0}^N \gamma_k P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi), \quad \gamma_k = \frac{2k+1}{k(k+1)}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^N \frac{2k+1}{k(k+1)} P_k(\cos \theta) P_k(\cos \xi) Q_k(p)$$

Введем обозначение

$$Y_p(\theta) = \int_0^\omega X_p(\xi) \sin \xi [-S_0(\theta, \xi) + S_1(\theta, \xi) + S_2(\theta, \xi, p)] d\xi \quad (4.18)$$

Оно позволяет записать (4.17) в виде дифференциального уравнения

$$\nabla_0 Y_p(\theta) = 2f_p(\theta)/q^* \quad (4.19)$$

общее регулярное в нуле решение которого, имеет вид [13]

$$Y_p(\theta) = C_1(p) + Y_p^1(\theta), \quad Y_p^1(\theta) = \int_0^\theta G(\theta, t) f_p(t) dt \quad (4.20)$$

$$G(\theta, t) = \begin{cases} -1/2 \ln(1 - \cos\theta)(1 + \cos t) + \ln 2 - 1/2, & \cos\theta \leq \cos t \\ -1/2 \ln(1 + \cos\theta)(1 - \cos t) + \ln 2 - 1/2, & \cos\theta \geq \cos t \end{cases} \quad (4.21)$$

где неизвестная произвольная постоянная $C_1(p)$ разыскивается из условия замкнутости трещины, которое можно записать в виде

$$\int_0^{\omega} \sin \xi X_p(\xi) d\xi = 0 \quad (4.22)$$

Учитывая (4.18) и (4.20), уравнение (4.15) запишется в виде

$$\int_0^{\omega} X_p(\xi) \sin \xi [S_0(\theta, \xi) - S_1(\theta, \xi) - S_2(\theta, \xi, p)] d\xi = -\frac{1}{2q^*} (C_1(p) + Y_p^1(\theta)) \quad (4.23)$$

Далее, если учесть, что [14]

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos\theta) P_k(\cos\xi) = \frac{W_0(\operatorname{tg}\theta/2, \operatorname{tg}\xi/2)}{\cos\theta/2 \cos\xi/2}, \quad W_0(x, y) = \int_0^{\infty} J_0(tx) J_0(ty) dt$$

и сделать замену переменных

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = ax, \quad \operatorname{tg}(\xi/2) = ay, \quad a = \operatorname{tg}(\omega/2)$$

то (4.23) запишем так

$$\int_0^1 W_0(x, y) y X_p^*(y) dy - \int_0^1 S_2(x, y, p) y X_p^*(y) dy = -\frac{1}{2q^*} (C_1(p) + F_p(x) - 2q^* \sum_{k=0}^N \gamma_k P_k(\cos(2 \operatorname{arctg} ax)) \tilde{C}_k(p)) \quad (4.24)$$

$$F_p(x) = \frac{Y_p^1(2 \operatorname{arctg} ax)}{[1 + (ax)^2]^{1/2}}, \quad X_p^*(x) = \frac{2a X_p(2 \operatorname{arctg} ax)}{[1 + (ax)^2]^{3/2}}$$

$$\tilde{C}_k(p) = \int_0^1 P_k(\cos(2 \operatorname{arctg} ay)) y X_p^*(y) dy$$

К обеим частям уравнения (4.23) применим обратное преобразование Лапласа

$$\int_0^1 W_0(x, y) y X^*(y, t) dy - \iint_{00}^{t1} S_2(x, y, t - \tau) y X^*(y, \tau) dy d\tau = -\frac{1}{2q^*} (C_1(t) + F(x, t) - 2q^* \sum_{k=0}^N \gamma_k P_k(\cos(2 \operatorname{arctg} ax)) \tilde{C}_k(t)) \quad (4.25)$$

Перейдем к определению оригиналов для функций $S_2(x, y, p)$ и $F(x, p)$. Можно убедиться, что в плоскости комплексного переменного p эти функции не имеют точек ветвления

ния, и чтобы воспользоваться теоремой разложения [15] для отыскания указанных оригиналов, необходимо найти корни трансцендентного уравнения $\Delta_\nu = 0$, $\nu = k + 1/2$ ($k = 0, 1, \dots, N$). При этом будем предполагать, что корни вещественные и не кратные. Для вычисления этих корней $x_j^{(k)}$ ($j = 0, 1, \dots$) используются формулы представления функций Бесселя полуцелого индекса через элементарные функции [16], которые подставляются в данное уравнение. При $k = 0$, например, указанное трансцендентное уравнение приводится к виду $\text{th } x = x\sqrt{q}/[2(x\sqrt{z} - \sqrt{q})]$, $x = pq$, $q = Rc_0^{(2)}$, $z = Rc_1^{(2)}$.

Для больших значений аргумента это уравнение приводится к уравнению $\text{th } x = \sqrt{q}/(2\sqrt{z})$, которое имеет единственный вещественный корень $x_*^{(0)}$. Если оставить в силе предположение о вещественности корней и дополнительно предположить, что все корни будут меньше $x_*^{(0)}$, то отсюда будет следовать, что корней в трансцендентном уравнении будет конечное число, и в соответствующей теореме разложения ряд перейдет в конечную сумму. Действительно, численный анализ показал, что для случая $k = 0$ найденные корни всегда меньше $x_*^{(0)}$. Это утверждение остается в силе и для других значений k . Таким образом, предлагаемый подход справедлив при условии, что трансцендентное уравнение $\Delta_\nu = 0$, $\nu = k + 1/2$ ($k = 0, 1, \dots, N$) имеет вещественные и не кратные корни.

Решение уравнения (4.25) строится с помощью дискретизации уравнения по времени, для чего временной интервал $[0; T]$, на протяжении которого исследуется взаимодействие волны кручения со средой, разбивается на отрезки $[\tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1}]$ с шагом $h = T/M$, $\tilde{t}_k = kT/M$ ($k = \overline{1, M}$), а интеграл по переменной \tilde{t} в (4.25) заменяется квадратурной формулой Симпсона с коэффициентами A_k :

$$\int_0^1 W_0(x, y) y X^{(n)}(y) dy - \sum_{k=0}^M A_k \int_0^1 S_2(x, y, t_n - \tilde{t}_k) X^{(k)}(y) dy =$$

$$= -\frac{1}{2q^*} \left(C_1(t_n) + F(x, t_n) - 2q^* \sum_{j=0}^N \gamma_j P_j(\cos(2 \arctg ax)) \tilde{C}_j(t_n) \right) \quad (4.26)$$

$$X^*(y, \tilde{t}_k) = X^{(k)}(y), \quad C_1(\tilde{t}_n) = C_1^{(n)}, \quad \tilde{C}_j(\tilde{t}_n) = \tilde{C}_j^{(n)}$$

Для определения $N + 2$ неизвестных констант, входящих в систему интегральных уравнений (4.26), имеются дополнительные условия (4.22) и (4.24), которые с учетом применения к ним обратного преобразования Лапласа и дискретизации по времени, запишем в виде

$$\int_0^1 \sin(2 \arctg ay) X^{(n)}(y) dy = 0$$

$$\tilde{C}_j^{(n)} = \int_0^1 P_j(\cos(2 \arctg ay)) y X^{(n)}(y) dy$$

Структура правой части уравнений, входящих в (4.26), а также необходимость разбивать решения в классе функций с особенностью порядка $(-1/2)$ на концах интер-

вала, а также наличие спектрального соотношения (5.5) из [17], требует искать решение в виде

$$X^{(n)}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{0(n)}(1-y^2)^{\frac{1}{2}} P_m^{0, \frac{1}{2}}(1-2y^2) + C_1^{(n)} \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{1(n)}(1-y^2)^{\frac{1}{2}} P_m^{0, \frac{1}{2}}(1-2y^2) + \sum_{j=0}^N \gamma_j \tilde{C}_j^{(n)} \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{j(n)}(1-y^2)^{\frac{1}{2}} P_m^{0, \frac{1}{2}}(1-2y^2) \quad (4.27)$$

Дальнейшее применение стандартной схемы метода ортогональных многочленов [17] сводит (4.26) к последовательностям бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$Y_l X_l^{i(n)} - \sum_{k=0}^M A_k \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{i(k)} B_{kml} = F_l^{i(n)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (n = \overline{1, M}) \quad (i = 0, 1) \quad (4.28)$$

$$Y_l = \frac{\pi(2l-1)!!^2}{(2l!!)^2}, \quad B_{kml} = \sqrt{8} a \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy S_2(ax, ay, t_n - \tilde{t}_k) P_m^{0, \frac{1}{2}}(1-2y^2) P_l^{0, \frac{1}{2}}(1-2x^2)}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2}} dx dy$$

$$F_l^0 = \sqrt{8} \int_0^1 \frac{F^n(x) P_l^{0, \frac{1}{2}}(1-2x^2) x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad F_l^1 = \sqrt{8} \int_0^1 \frac{P_l^{0, \frac{1}{2}}(1-2x^2) x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$F_l^2 = F_l^j = \frac{-q^* \sqrt{8}}{2} \int_0^1 \frac{P_j(\cos(2a \operatorname{arctg} ax)) P_l^{0, \frac{1}{2}}(1-2x^2) x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (j = \overline{0, N})$$

Таким образом, для определения $X^{0(1)}$ получаем такую систему

$$Y_l X_l^{0(1)} - \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{0(1)} B_{ml} = F_l^{0(1)} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.29)$$

Используя найденные из системы (4.29) значения, последующие определяем из рекуррентного соотношения

$$Y_l X_l^{0(j)} - \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{0(j)} B_{jml} = F_l^{0(j)} - \sum_{k=1}^{j-1} A_k \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{0(k)} B_{kml} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (j = \overline{2, M}) \quad (4.30)$$

Следовательно, для конкретного значения $X_l^{0(j)}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений вида (4.29), которая решается численно с помощью метода редукции; применимость метода базируется на доказательстве сходимости рядов

$$Q_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |B_{ml}|^2, \quad Q_2 = \sum_{l=0}^{\infty} |F_l^i|^2$$

что можно сделать по схеме, указанной в [17]. Аналогичным образом вычисляются неизвестные коэффициенты $X_l^{j(j)}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) ($j = \overline{0, 1, \dots, M}$), которые после их оп-

ределения подставляются в соотношения (4.27). Это приводит к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных констант $C_1^{(n)}$, $\tilde{C}_j^{(n)}$.

5. Вычисление коэффициента интенсивности напряжений. Для рассматриваемой задачи коэффициент интенсивности напряжений будет определяться формулой

$$K_{111}^P = \lim_{\theta \rightarrow \omega+0} \tau_{r\varphi}^P(R, \theta) \sqrt{2\pi R(\theta - \omega)} \quad (5.1)$$

$$\tau_{r\varphi}^P(R, \theta) = \frac{1}{\sin\theta} \int_0^\theta \tau_{p0}^*(R, \tilde{t}) \sin \tilde{t} d\tilde{t} \quad (5.2)$$

С учетом замены переменных и выполненной выше дискретизации уравнения по времени, выражение для вычисления коэффициента интенсивности примет вид:

$$K_{111}^{(n)} = K_{111}(t_n) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{2\pi Ra} \sqrt{x-1} \tau_0^*(x, t_n) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_0^{*(n)}(x) = & \int_0^1 W_0(x, y) y X^{(n)}(y) dy - \sum_{k=1}^M \int_0^1 S_2(ax, ay, t_n - \tilde{t}_k) y X^{(k)}(y) dy + \\ & + \frac{1}{2q^*} \left(C_1(t_n) + F(x, t_n) - 2q^* \sum_{j=0}^N \gamma_j P_j(\cos(2 \arctg ax)) \tilde{C}_j(t_n) \right) \quad (n = \overline{1, M}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Три последних слагаемых в (5.4) не внесут какого-либо вклада в коэффициент интенсивности напряжений в силу непрерывности. Под знак интеграла в первом слагаемом подставляется ряд (4.27). Согласно (3.42) из [14] для $x > 1$ имеем:

$$\int_0^1 \frac{W_0(x, y) P_k^{0, \frac{1}{2}}(1-2y^2) y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{\Gamma(k+1/2) x^{-2k-1}}{2\Gamma(3/2+2k)k!} F\left(\frac{3}{2}+k, \frac{1}{2}+k; \frac{3}{2}+2k; x^{-2}\right) \quad (5.5)$$

Там же (формула (3.46)) показано, что поведение интеграла (5.5) при $x \rightarrow 1+0$ имеет вид:

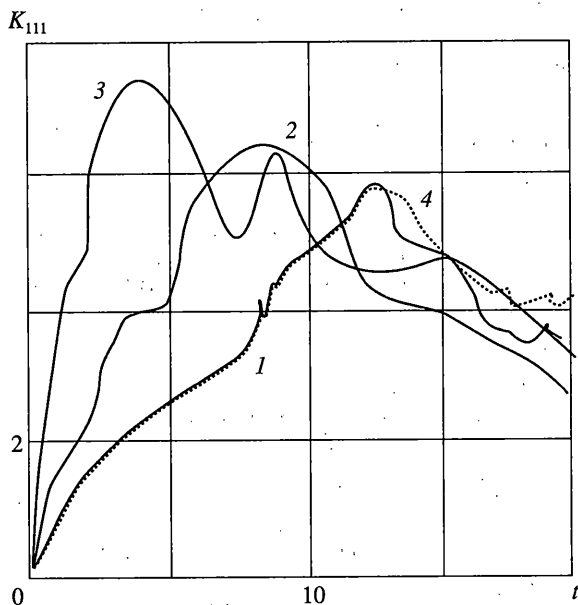
$$\int_0^1 \frac{W_0(x, y) P_k^{0, \frac{1}{2}}(1-2y^2) y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{2\Gamma(k+3/2)}{(-1)^k \Gamma(1/2)k! \sqrt{x^2-1}} + O(1), \quad x \rightarrow 1+0 \quad (5.6)$$

Подставив (5.6) в первое слагаемое (5.4) и выполнив предельный переход, получаем

$$K_{111}^{(n)} = \sqrt{2\pi Ra} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k!)^2} \left(X_k^{0(n)} - C_1^{(n)} X_k^{1(n)} + \sum_{j=0}^N \gamma_j \tilde{C}_j^{(n)} X_k^{j(n)} \right) \quad (n = \overline{1, M}) \quad (5.7)$$

где $X_k^{i(n)}$, $\tilde{X}_k^{j(n)}$ – определяются из систем (4.28).

Решение редуцированных бесконечных систем проводилось по методу Зейделя; оказалось, что для достижения необходимой точности метода редукции ($\epsilon = 10^{-6}$) нужно сохранять 8–14 членов ряда (4.27). Для достижения требуемой точности в (4.27) достаточно выбирать значение N от 2 до 4. График, приведенный на фигуре, демонстрирует зависимость величины КИН от безразмерного времени $\tau = tc_0^{(2)}/R$ для различ-



ных значений отношения скоростей в средах $c_0^{(2)}/c_1^{(2)}$. Угол раствора трещины выбирался равным $\omega = 29^\circ$. Кривые 1–3 соответствуют $c_0^{(2)}/c_1^{(2)} = 1, 1/2, 1/10$, а кривая 4 соответствует случаю не межфазной трещины ($c_0^{(2)}/c_1^{(2)} = 1$) и получена в работе [18]. Как видно из графиков, с уменьшением этого отношения отмечается рост абсолютных значений КИН, при этом пик наступает раньше, после чего наблюдается их стабилизация к постоянной величине. При расчетах было выявлено, что чем меньше отношение скоростей, тем больше членов ряда (4.27) надо сохранять и тем больше следует выбирать значение N в соотношении (4.27). Так, при $c_0^{(2)}/c_1^{(2)} = 1/2$ достаточно выбрать $N = 2$, а при $c_0^{(2)}/c_1^{(2)} = 1/10$ значение N следует взять равным 4.

Как видно, до момента времени $t = 10$ результаты расчета для случая $c_0^{(2)}/c_1^{(2)} = 1$ совпадают практически точно, для времен из интервала $[10, 15]$ наблюдается расхождение результатов, а для $t > 15$ графики носят существенное различие. Численный расчет показал, что при значениях времени до 10 счет стабилен, при значениях времени из интервала $[10, 15]$ происходит нарастание погрешности, а для $t > 15$ счет становится неустойчивым. Это объясняется накоплением погрешности в правой части систем вида (4.30). Таким образом, предложенный способ решения задачи позволяет оценить механические характеристики в начальные моменты времени после начала взаимодействия, что важно для случая неограниченной среды, содержащей дефект.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко М.А. Осесимметричная задача для упругой среды со сферическим включением, ослабленной трещиной на межфазной границе // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 7. С. 39–44.
2. Смирнов С.А. Напряженное состояние двухслойной толстостенной сферической оболочки с разрезами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1991. № 9. С. 97–101.

3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 707 с.
4. Головчан В.Т., Гузь А.Н. К решению задач дифракции упругих волн на сферических полостях. // Прикл. механика. 1972. Т. 8. Вып. 9. С. 118–122.
5. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
6. Шмегера С.В. Метод решения плоских начально-краевых задач динамической теории упругости // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 263–274.
7. Левченко В.В. Магнитоупругие объемные волны сдвига в периодически-слоистой среде // Прикл. механика. 2001. Т. 37. № 4. С. 76–81.
8. Марчук М.В., Хомяк Н.Н. К решению задачи о напряженном состоянии слоистых сферических оболочек по уточненной теории на основе смешанного метода конечных элементов // Прикл. механика. 2001. Т. 37. № 12. С. 94–102.
9. Попов Г.Я. О решении динамических задач концентрации упругих напряжений возле дефектов в сферически слоистых средах // ДАН РАН. 1998. Т. 360. № 4. С. 483–487.
10. Попов Г.Я. Задачи концентрации упругих напряжений возле дефектов в сферически слоистых средах // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 840–853.
11. Грилицкий Д.В., Поддубняк А.П. Рассеяние нестационарной волны кручения на жесткой неподвижной сфере в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 5. С. 86–92.
12. Bateman H., Erdelyi A. Tables of Integral Transforms. N.y. etc.: McGraw-Hill, 1954. 340 p.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
14. Назаренко О.А., Попов Г.Я. О дифракции упругих волн на сферических дефектах // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 835–847.
15. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1979. 415 с.
16. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
17. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
18. Вайсфельд Н.Д., Попов Г.Я. Задача о дифракции волны кручения на сферической трещине // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Львів, 1999. Вип. 2. Т. 2. С. 260–264.

Одесса

Поступила в редакцию
17.03.2003