МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2005

УДК 539.312, 539.377

© 2005 г. А.Д. ЧЕРНЫШОВ

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ

Задача термоупругости в общей постановке разбивается на три более простые. В первой задаче подбором находятся граничные функции, которые должны удовлетворять только граничным условиям. Вторая задача с однородными граничными и неоднородными начальными условиями введением специальных ξ-переменных и отделением времени приводится к задаче о нахождении собственных функций и собственных значений (СФЗ). Для ее решения получена линейная алгебраическая система, как результат выполнения граничных условий в точках деления криволинейной границы тела на мелкие части. После получения СФЗ решение третьей задачи с однородными граничными и начальными условиями находится при помощи спектральных разложений искомых функций и неоднородных слагаемых в связной системе дифференциальных уравнений.

Термоупругая модель используется при расчетах элементов различного рода двигателей, механизмов и в других случаях. Модель достаточно сложная даже в своем линейном варианте. Тем более трудно получать решения краевых и начально-краевых задач для тел со сложной криволинейной формой.

Задачи термоупругости бывают связные и несвязные. В несвязной постановке [1–4] в уравнении теплопроводности не учитывается влияние объемной деформации и потому его решают независимо от уравнений движения. В случае связной постановки [1–3] уравнения движения и теплопроводности содержат все неизвестные величины, что существенно осложняет их рассмотрение. Таких решений получено небольшое количество, где в частности показано, что учет связности слабо влияет на поля температуры, напряжений и деформаций. Следует отметить, что влияние может быть существенным только в случаях быстрого изменения объемной деформации. Это имеет место при взрывах, тепловых ударах.

Известные методы решения термоупругих задач в большинстве случаев основаны на использовании потенциалов [5], интегральных преобразований [6, 7]. В других случаях используют методы Ритца [4], Бубнова–Галеркина [8], вариационных принципов [9], конечно-разностных методов [9, 10]. Эффективность этих методов ограничена в случаях, когда тело имеет сложную криволинейную форму. Об этом свидетельствует малое количество работ с решениями начально-краевых задач для термоупругих тел. Ниже предлагается следующий численно-аналитический метод.

Для термоупругого материала уравнения движения в перемещениях (u, v) и теплопроводности запишем в декартовых координатах [1]:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)u_{xx}+(\lambda+\mu)v_{xy}+\mu u_{yy}-\gamma T_x+\tilde{G}_1 = \rho u_{tt} \\
&(\lambda+2\mu)v_{yy}+(\lambda+\mu)u_{xy}+\mu v_{xx}-\gamma T_y+\tilde{G}_2 = \rho v_{tt} \qquad (1)\\
&a^2\Delta T-\eta(u_{xt}+v_{yt})+\tilde{q} = T_t, \quad \gamma = (3\lambda+2\mu)\alpha_t, \quad \eta = \gamma T_0/C\rho
\end{aligned}
$$

где Δ – оператор Лапласа, α_t – коэффициент температурного расширения, T_0 – начальная абсолютная температура тела; λ, μ – коэффициенты упругости, C – удельная теплоемкость, ρ – плотность, $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ – массовые силы, $\tilde{q}$ – внутренний источник тепла.

Пусть форма тела – ограниченная область Ω с кусочно-гладкой границей Γ. Для системы (1) граничные и начальные условия запишем в виде

$$u|_\Gamma = F_1(t, x_\Gamma, y_\Gamma), \quad v|_\Gamma = F_2(t, x_\Gamma, y_\Gamma), \quad T|_\Gamma = F_0(t, x_\Gamma, y_\Gamma) \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x, y), \;\; u_t|_{t=0} = \tilde{\psi}_1(x, y), \;\; v|_{t=0} = \tilde{\varphi}_2(x, y), \;\; v_t|_{t=0} = \tilde{\psi}_2(x, y), \\ T|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x, y) \end{gathered} \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) имеем связную систему трех уравнений относительно u, v и T, т.к. каждое уравнение содержит все три неизвестные. Здесь первые два уравнения гиперболического типа, а третье – параболического. Неизвестные u, v и T представим суммой трех функций, зависящих от x, y и t:

$$u = M_1 + u^{(1)} + v^{(1)}, \quad v = M_2 + u^{(2)} + v^{(2)}, \quad T = M_0 + u^{(0)} + v^{(0)} \tag{4}$$

Функции $M_b (b = 0, 1, 2)$ назовем граничными. Их найдем простым подбором так, чтобы выполнялись граничные условия (2). При этом M_b могут и не удовлетворять системе (1), но должны быть дважды дифференцируемыми по всем своим переменным, т.е.

$$M_b|_\Gamma = F_b(t, x_\Gamma, y_\Gamma), \quad M_b \in C^2_{\Omega, t \ge 0} \; (b = 0, 1, 2) \tag{5}$$

Пусть $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ удовлетворяют следующей однородной системе:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)u^{(1)}_{xx} + \mu u^{(1)}_{yy} = \rho u^{(1)}_{tt} \\ &(\lambda + 2\mu)u^{(2)}_{yy} + \mu u^{(2)}_{xx} = \rho u^{(2)}_{tt}, \quad a^2 \Delta u^{(0)} = u^{(0)}_t \end{aligned} \tag{6}$$

с однородными граничными:

$$u^{(b)}|_\Gamma = 0 \; (b = 0, 1, 2) \tag{7}$$

и неоднородными начальными условиями:

$$u^{(b)}|_{t=0} = \tilde{\varphi}_b - M_b|_{t=0} = \varphi_b \; (b = 0, 1, 2), \quad u^{(c)}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}_c - M_{ct}|_{t=0} = \psi_c \; (c = 1, 2) \tag{8}$$

Система (6) является однородной и несвязной, а задача (6)–(8) ключевой, так как из ее решения будем находить СФЗ. Если u, v и T из (4) подставить в (1)–(3), то с учетом (5)–(8) для $v^{(b)} (b = 0, 1, 2)$ будем иметь следующую неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)v^{(1)}_{xx} + (\lambda + \mu)v^{(2)}_{xy} + \mu v^{(1)}_{yy} - \gamma v^{(0)}_x + G_1 = \rho v^{(1)}_{tt} \\ &G_1 = \tilde{G}_1 + (\lambda + 2\mu)M_{1xx} + (\lambda + \mu)(M_{2xy} + u^{(2)}_{xy}) + \mu M_{1yy} - \gamma(M_{0x} + u^{(0)}_x) - \rho M_{1tt} \\ &(\lambda + 2\mu)v^{(2)}_{yy} + (\lambda + \mu)v^{(1)}_{xy} + \mu v^{(2)}_{xx} - \gamma v^{(0)}_y + G_2 = \rho v^{(2)}_{tt} \\ &G_2 = \tilde{G}_2 + (\lambda + 2\mu)M_{2yy} + (\lambda + \mu)(M_{1xy} + u^{(1)}_{xy}) + \mu M_{2xx} - \gamma(M_{0y} + u^{(0)}_y) - \rho M_{2tt} \end{aligned} \tag{9}$$

$$a^2\Delta v^{(0)} - \eta(v^{(1)}_{xt} + v^{(2)}_{yt}) + q = v^{(0)}_t$$

$$q = \tilde{q} + a^2\Delta M_0 - \eta(M_{1xt} + M_{2yt} + u^{(1)}_{xt} + u^{(2)}_{yt}) - M_{0t}$$

Из (2), (5) и (7) таким же образом получим однородные граничные условия

$$v_b|_\Gamma = 0 \quad (b = 0, 1, 2) \tag{10}$$

а из (3) и (8) однородные начальные условия

$$v^{(b)}|_{t=0} = 0 \quad (b = 0, 1, 2); \quad v^{(c)}_t|_{t=0} = 0 \quad (c = 1, 2) \tag{11}$$

Рассмотрим задачу (6)–(8). Вначале будем искать частные решения системы (6) без учета начальных условий. Для этого в функциях $u^{(b)}$ отделим временную переменную следующим образом

$$u^{(c)} = (A_c\cos\nu_c t + B_c\sin\nu_c t)U_c(x, y) \ (c = 1, 2); \quad u^{(0)} = A_0 e^{-\nu_0^2 a^2 t}U_0(x, y) \tag{12}$$

где A_0, A_c, B_c $(c = 1, 2)$ и $\nu_b (b = 0, 1, 2)$ – неизвестные постоянные. Подставляя (12) в (6) и (7), для U_b получим следующие уравнения с граничными условиями

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)U_{1xx} + \mu U_{1yy} + \rho\nu_1^2 U_1 = 0, \quad \Delta U_0 + \nu_0^2 U_0 = 0 \\ &(\lambda + 2\mu)U_{2yy} + \mu U_{2xx} + \rho\nu_2^2 U_2 = 0, \quad U_b|_\Gamma = 0 \quad (b = 0, 1, 2) \end{aligned} \tag{13}$$

Нахождение таких $\nu_b (b = 0, 1, 2)$, при которых существуют нетривиальные решения U_b системы (13) для заданной Ω, называется задачей о СФЗ. Обычно подобные краевые задачи решают методом Ритца, Бубнова–Галеркина, интегральными преобразованиями, конечно-разностными методами. Ниже предлагается следующий численно-аналитический метод.

В области Ω выберем за полюс какую-нибудь точку O с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ так, чтобы любой луч E, проведенный через O под любым углом θ к оси x, пересекал границу Γ только в двух точках D^+ и D^-. Введем новую геометрическую переменную ξ равенством

$$\xi = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta, \quad \mathbf{r} \in \Omega \tag{14}$$

где $\mathbf{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ – единичный вектор вдоль луча E. Переменная ξ обладает следующими дифференциальными свойствами:

$$\mathrm{grad}\,\xi = \mathbf{n}, \quad \mathrm{grad}\,F(\xi) = F'(\xi)\mathbf{n}, \quad \Delta F(\xi) = F''(\xi) \tag{15}$$

Будем искать частные решения системы (13) без учета граничных условий, когда U_b зависят только от одной переменной ξ. Полагая $U_b = P_b(\xi)$, перепишем (13) при помощи (15) в виде несвязной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &P''_c(\xi) + \nu_c^{*2}(\theta)P_c(\xi) = 0 \quad (c = 1, 2), \quad P''_0(\xi) + \nu_0^2 P_0(\xi) = 0 \\ &\nu_1^*(\theta) = \nu_1\sqrt{\rho/[(\lambda + \mu)\cos^2\theta + \mu]}, \quad \nu_2^*(\theta) = \nu_2\sqrt{\rho/[(\lambda + \mu)\sin^2\theta + \mu]} \end{aligned} \tag{16}$$

Общее решение системы (16) имеет вид

$$\begin{aligned} &P_c(\nu_c) = K_c\cos(\nu_c^*(\theta)\xi) + L_c\sin(\nu_c^*(\theta)\xi) \quad (c = 1, 2) \\ &P_0(\nu_0) = K_0\cos(\nu_0\xi) + L_0\sin(\nu_0\xi) \end{aligned} \tag{17}$$

где K_b и $L_b (b = 0, 1, 2)$ – произвольные постоянные, которые будем считать функциями углового параметра θ. При изменении θ в пределах $[0, \pi)$ множество точек пересечения D^+ образуют границу Γ^+, а множество точек D^- – границу Γ^-. Вся граница Γ будет состоять из двух частей Γ^+ и Γ^-. При различных θ в точке O будем иметь пучок лучей E. При $\theta = \pi$ положение прямой E совпадет с ее положением при $\theta = 0$. Если продолжить поворот прямой E в пределах $\theta \in [\pi, 2\pi)$, то точками D^+ и D^- граница Γ будет пройдена второй раз, что является излишним. Этими соображениями и обоснованы пределы изменения θ в нижеследующих определенных интегралах и конечных суммах (18).

Функции $P_b(\nu_b)$ ($b = 0, 1, 2$) из (17) тождественно удовлетворяют системе (13) при любом θ, поэтому при помощи интегральной суперпозиции по θ решений (17) можно построить следующее решение системы (13):

$$U_b(\nu_b) = \int_0^\pi [K_b(\theta)\cos(\nu_b^*(\theta)\xi) + L_b(\theta)\sin(\nu_b^*(\theta)\xi)]d\theta +$$

$$+ \sum_{i=1}^n [K_{bi}^*\cos(\nu_b^*(\theta_i)\xi_i) + L_{bi}^*\sin(\nu_b^*(\theta_i)\xi_i)], \quad \nu_0^* = \nu_0 \tag{18}$$

$$\xi_i = (x - x_0)\cos\theta_i + (y - y_0)\sin\theta_i \ (b = 0, 1, 2); \quad 0 \le \theta_i < \pi \ (i = 1\ldots n)$$

где $K_b(\theta)$, $L_b(\theta)$ – неизвестные суммируемые в смысле Лебега функции от θ; K_{bi}^*, L_{bi}^* и θ_i – неизвестные коэффициенты и углы в конечных суммах; n – неизвестное количество слагаемых. Для нахождения всех перечисленных неизвестных подставим $U_b(\nu_b)$ из (18) в граничные условия (7):

$$U_b(\nu_b)|_\Gamma = \int_0^\pi [K_b(\theta)\cos(\nu_b^*(\theta)\xi_\Gamma) + L_b(\theta)\sin(\nu_b^*(\theta)\xi_\Gamma)]d\theta +$$

$$+ \sum_{i=1}^n [K_{bi}^*\cos(\nu_b^*(\theta_i)\xi_{i\Gamma}) + L_{bi}^*\sin(\nu_b^*(\theta_i)\xi_{i\Gamma})] = 0, \ (b = 0, 1, 2), \ 0 \le \theta_i < \pi \ (i = 1\ldots n) \tag{19}$$

$$\xi_\Gamma = (x_\Gamma - x_0)\cos\theta + (y_\Gamma - y_0)\sin\theta, \quad \xi_{i\Gamma} = (x_\Gamma - x_0)\cos\theta_i + (y_\Gamma - y_0)\sin\theta_i$$

Таким образом, получили следующую задачу о СФЗ: из трех независимых между собой однородных интегральных уравнений (19) найти такие три спектра СЗ $\{\nu_{bi}\}$, при которых существуют нетривиальные решения $U_b(\nu_b)$. Поэтому интервал $[0, \pi)$ разобьем на мелкие секторы $\Delta\theta_j$ ($j = 1\ldots m$) и представим интегралы в (18) и (19) конечными суммами. Причем, заранее неизвестно, в какие секторы $\Delta\theta_j$ попадут дискретные углы θ_i из конечных сумм. Для преодоления этой неопределенности предположим, что углы θ_i попадут в каждый малый сектор $\Delta\theta_j$. Если, допустим, в какой-то сектор не попадут углы θ_i из конечных сумм, то соответственные K_{bi}^*, L_{bi}^* будут равны нулю. Итак, функции $U_b(\nu_b)$ из (18) приближенно представим суммами

$$U_b(\nu_b) = \sum_{j=1}^m [K_{bj}\cos(\nu_b^*(\theta_j)\xi_j) + L_{bj}\sin(\nu_b^*(\theta_j)\xi_j)], \quad K_{bj} = K_b(\theta_j^*)\Delta\theta_j + K_{bj}^*$$

$$\xi_j = (x - x_0)\cos\theta_j + (y - y_0)\sin\theta_j, \quad 0 \le \theta_j < \pi, \quad L_{bj} = L_b(\theta_j^*)\Delta\theta_j + L_{bj}^* \tag{20}$$

где θ_j^* – некоторые средние значения углов θ в секторах $\Delta\theta_j$. Постоянные K_{bj}, L_{bj} состоят из двух частей. Первые части типа $K_b(\theta_j^*)\Delta\theta_j$ зависят от способа разбиения, а вторые части типа K_{bj}^* не зависят от этого способа. Данное свойство и используем для нахождения величин K_{bj}^*, L_{bj}^* и их количества n в конечных суммах выражений (18) и (19). Если при уменьшении $\Delta\theta_j$ порядок некоторых K_{bj}, L_{bj} не изменится, то соответственные K_{bj}^*, L_{bj}^* существуют, а их количество равно искомому n. При построении решения не обязательно искать точки пересечения D^+ и D^- прямых E с границей. Проще просто разбить Γ на мелкие участки независимо от углов θ_j и прямых E так, чтобы количество точек разбиения на Γ было $2m$, т.е. в два раза больше, чем углов θ_j, и в дальнейшем выполнять граничные условия в этих точках. Поэтому, полагая в (19) $\mathbf{r}_\Gamma = \mathbf{r}_k$ $(k = 1\ldots 2m)$, данные граничные условия примут вид

$$U_b(\nu_b)\big|_\Gamma = \sum_{j=1}^{m} [K_{bj}\cos(\nu_b^*(\theta_j)\xi_{kj}) + L_{bj}\sin(\nu_b^*(\theta_j)\xi_{kj})] = 0$$
$$\xi_{kj} = (x_k - x_0)\cos\theta_j + (y_k - y_0)\sin\theta_j, \quad 0 \le \theta_j < \pi \ (k = 1\ldots 2m) \tag{21}$$

В (21) имеем три независимые между собой линейные алгебраические однородные системы, в каждой из них по $2m$ уравнений относительно $2m$ неизвестных K_{bj} и L_{bj} соответственно. Условием существования нетривиального решения этих систем является равенство нулю их определителей

$$\Delta_{b2m} = \left|\cos(\nu_b^*\xi_{kj}),\ \sin(\nu_b^*\xi_{kj})\right| = 0 \ (b = 0, 1, 2) \tag{22}$$

Это и есть искомые характеристические уравнения для нахождения независимых между собою спектров $\{\nu_{bi}, U_b(\nu_{bi})\}$. В [11] доказано, что все корни подобных спектров ν_{bi} действительные и различные. Если в системе (21) положить $\nu_b = \nu_{bi}$, то определители Δ_{b2m} обратятся в ноль. Понимать это будем так, что в каждой из трех систем (21) по одному уравнению становятся зависимыми от всех остальных уравнений соответственной системы и его поэтому можно отбросить. Все уравнения рассматриваемых систем равноправны, тогда отбросим, например, по одному последнему уравнению и получим три укороченные линейные системы с определителями Δ_{b2m-1}. При $\nu_b = \nu_{bi}$ в системах (21) коэффициентам K_{bj} и L_{bj} следует добавить индекс i, т.е. теперь эти коэффициенты будут обозначены K_{bij} и L_{bij}. Данные коэффициенты из укороченных систем (21), находятся с точностью до произвольного множителя, который будет определяться в дальнейшем при выполнении начальных условий. Поэтому вполне можно распорядиться одним из этих коэффициентов и считать его равным 1, например, $L_{bim} = 1$, если только $L_{bim} \ne 0$ (если $L_{bim} = 0$, то никаким произвольным множителем эти коэффициенты невозможно будет сделать равными 1). После отбрасывания по одному уравнению в каждой из трех систем (21) будем иметь укороченные системы, состоящие из $(2m - 1)$ уравнений каждая относительно такого же количества неизвестных K_{bij} и L_{bij}:

$$\sum_{j=1}^{m} K_{bij}\cos[\nu_{bi}^*(\theta_j)\xi_{kj}] + \sum_{j=1}^{m-1} L_{bij}\sin[\nu_{bi}^*(\theta_j)\xi_{kj}] = -\sin[\nu_{bi}^*(\theta_m)\xi_{km}]$$
$$(b = 0, 1, 2)\ (i = 1\ldots\infty)\ (k = 1, \ldots, (2m - 1)) \tag{23}$$

Из трех систем (23) найдем K_{bij} и L_{bij}, подставим их в выражения (20) и определим искомые СФЗ $\{U_b(\nu_{bi})\}$:

$$U_b(\nu_{bi}) = \sum_{j=1}^{m} K_{bij}\cos[\nu_{bi}^*(\theta_j)\xi_j] + \sum_{j=1}^{m} L_{bij}\sin[\nu_{bi}^*(\theta_j)\xi_j]$$
$$(b = 0, 1, 2)\ (i = 1\ldots\infty)\ (j = 1, \ldots, m) \tag{24}$$

Прямое нахождение спектров $\{\nu_{bi}, U_b(\nu_{bi})\}$ в явном виде является ключевым моментом, т.к. тогда можно построить решение задачи (1)–(3) в общем случае. Для этого решение задачи (6)–(8) при помощи (12) представим суммой

$$u^{(c)} = \sum_{i=1}^{\infty}(A_{ci}\cos\nu_{ci}t + B_{ci}\sin\nu_{ci}t)U_c(\nu_{ci}) \ (c = 1, 2), \quad u^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty}A_{0i}U_0(\nu_{0i})e^{-a^2\nu_{0i}^2 t} \quad (25)$$

По построению выражения $u^{(c)}$ и $u^{(0)}$ из (25) удовлетворяют системе (6) и граничным условиям (7) в точках $\mathbf{r}_k$ при любых A_{bi} и B_{ci}. Эти коэффициенты найдем из начальных условий (8), которые принимают следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty}[A_{bi}U_b(\nu_{bi})] = \varphi_b, \quad \sum_{i=1}^{\infty}[\nu_{ci}B_{ci}U_c(\nu_{ci})] = \psi_c \ (b = 0, 1, 2, \ c = 1, 2) \quad (26)$$

Равенства (26) следует рассматривать как разложения Фурье функций φ_b и ψ_c в ряды по функциональным базисам $\{U_b(\nu_{bi})\}$, а A_{bi} и B_{ci} – коэффициенты разложения. Если φ_b и $\psi_c \in L_p^{\alpha}$, то ряды (26) в Ω равномерно сходятся [11] и их коэффициенты разложения находятся по формулам

$$A_{bi} = \iint_{\Omega}\varphi_b U_b(\nu_{bi})ds/N_{bi}, \quad B_{ci} = \iint_{\Omega}\psi_c U_c(\nu_{ci})ds/(\nu_{ci}N_{ci})$$
$$N_{bi} = \iint_{\Omega}U_b^2(\nu_{bi})ds \ (b = 0, 1, 2, \ c = 1, 2) \quad (27)$$

Итак, решение задачи (6)–(8) построено следующим образом: функции $u^{(b)}(b = 0, 1, 2)$ следует взять из (25), коэффициенты A_{bi} и B_{ci} из (27), СФ $U_b(\nu_{bi})$ из (24), а СЗ ν_{bi} из решения характеристических уравнений (22). Далее можно переходить к решению задачи (9)–(11).

Так как три базиса $\{U_b(\nu_{bi})\}$ $(b = 0, 1, 2)$ являются независимыми между собой, то каждую СФ (или ее частные производные по x и y) из одного базиса, можно разложить по СФ другого базиса. В дальнейшем понадобятся следующие спектральные разложения:

$$U_{2xy}(\nu_{2i}) = \sum_{j=1}^{p}\alpha_{ij}^{(1)}U_1(\nu_{1j}), \quad U_{1xy}(\nu_{1i}) = \sum_{j=1}^{p}\alpha_{ij}^{(2)}U_2(\nu_{2j}) \quad (28)$$

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \iint_{\Omega}U_{2xy}(\nu_{2i})U_1(\nu_{1j})ds/N_{1j}, \quad \alpha_{ij}^{(2)} = \iint_{\Omega}U_{1xy}(\nu_{1i})U_2(\nu_{2i})ds/N_{2j} \quad (29)$$

$$U_{1x}(\nu_{1i}) = \sum_{j=1}^{p}\gamma_{ij}^{(1)}U_0(\nu_{0j}), \quad U_{2y}(\nu_{2i}) = \sum_{j=1}^{p}\gamma_{ij}^{(2)}U_0(\nu_{0j})$$

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \iint_{\Omega}U_{1x}(\nu_{1i})U_0(\nu_{0j})ds/N_{0j}, \quad \gamma_{ij}^{(2)} = \iint_{\Omega}U_{2y}(\nu_{2i})U_0(\nu_{0j})ds/N_{0j} \quad (30)$$

$$G_c = \sum_{j=1}^{p}g_{cj}U_c(\nu_{cj}), \quad g_{cj} = \iint_{\Omega}G_c U_c(\nu_{cj})ds/N_{cj} \ (c = 1, 2)$$

$$U_{0x}(\nu_{0i}) = \sum_{j=1}^{p}\alpha_{ij}^{(0)}U_1(\nu_{1i}), \quad U_{0y}(\nu_{0i}) = \sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}^{(0)}U_2(\nu_{2i}), \quad q = \sum_{i=1}^{p}q_iU_0(\nu_{0i}) \quad (31)$$

$$\alpha_{ij}^{(0)} = \iint\limits_{\Omega} U_{0x}(\nu_{0i})U_1(\nu_{1j})ds/N_{1j}, \quad \beta_{ij}^{(0)} = \iint\limits_{\Omega} U_{0y}(\nu_{0i})U_2(\nu_{2j})ds/N_{2j}$$

$$q_i = \iint\limits_{\Omega} qU_0(\nu_{0i})ds/N_{0i}$$

Число слагаемых p в (28)–(31) определяется заданной точностью вычислений. Необходимость в формулах (28)–(31) обусловлена связностью уравнений системы (9). Решение задачи (9)–(11) будем искать в виде

$$v^{(b)} = \sum_{i=1}^{p} T_{bi}(t)U_b(\nu_{bi}) \ (b = 0, 1, 2) \tag{32}$$

где $T_{bi}(t)$ – неизвестные функции, зависящие только от t. Для их нахождения подставим в систему (9) $v^{(b)}$ из (32). При помощи спектральных разложений (28)–(31), а также уравнений (13) после ряда упрощений придем к системе

$$\begin{aligned} \rho T''_{1i} + \rho\nu_{1i}^2 T_{1i} &= (\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ji}^{(1)}T_{2j} - \gamma\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ji}^{(0)}T_{0j} + g_{1i} \\ \rho T''_{2i} + \rho\nu_{2i}^2 T_{2i} &= (\lambda+\mu)\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ji}^{(2)}T_{1j} - \gamma\sum_{j=1}^{p}\beta_{ji}^{(0)}T_{0j} + g_{2i} \\ T'_{0i} + a^2\nu_{0i}^2 T_{0i} &= q_i - \eta\sum_{j=1}^{p}(\gamma_{ji}^{(1)}T'_{1j} + \gamma_{ji}^{(2)}T'_{2j}) \ (i = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{33}$$

Для системы (33) из (11) получим однородные начальные условия:

$$T_{bi}\big|_{t=0} = 0 \ (b = 0, 1, 2); \quad T'_{ci}\big|_{t=0} = 0 \ (c = 1, 2) \tag{34}$$

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений (33) состоит из $3p$ уравнений относительно $3p$ неизвестных T_{0i}, T_{1i} и T_{2i}. Ее решение с однородными начальными условиями (34) может быть записано в квадратурах, например, при помощи метода вариации произвольных постоянных [12].

Будем считать, что система (33) с начальными условиями (34) решена и функции $T_{bi}(b = 0, 1, 2; i = 1\ldots p)$ найдены. Теперь при помощи полученных $T_{bi}(t)$ и $U_b(\nu_{bi})$ по формулам (32) определим $v^{(b)}$. После подстановки $u^{(b)}$ и $v^{(b)}$ в (4) будем иметь искомое решение задачи (1)–(3).

В заключении отметим, что полученное приближенное решение точно удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1), начальные условия (3) могут быть выполнены с любой заданной точностью, что обеспечивается количеством слагаемых p в спектральных разложениях (28)–(32), точно выполняются граничные условия (2) в точках деления границы на мелкие части. Лишь только между этими точками деления граничные условия выполняются приближенно. Частные решения, полученные данным методом, опубликованы в работах [13, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

3. *Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
4. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
5. *Осипов И.О.* К комплексным решениям в потенциалах динамических задач плоской теории упругости анизотропных сред // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 78–89.
6. *Попов Г.Я.* Точные решения некоторых смешанных задач несвязной термоупругости для конечного кругового полого цилиндра с вырезом вдоль образующей // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 694–704.
7. *Ермоленко Г.Ю.* Квадратуры решений первой и второй начально-краевых задач теории упругости для анизотропного материала // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 325–329.
8. *Бабешко В.А., Калинчук В.В.* Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 285–292.
9. *Леонтьев В.Л.* Вариационно-сеточный метод решения задач о собственных колебаниях упругих трехмерных тел, связанной с использованием ортогональных финитных функций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 117–126.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
11. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991. 368 с.
12. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 468 с.
13. *Чернышов А.Д.* Нестационарное течение вязкой жидкости в трубе треугольного сечения // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 199–203.
14. *Чернышов А.Д.* Об одном методе решения линейных динамических задач теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 131–142.

Воронеж

Поступила в редакцию
30.05.2003