МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2005

УДК 593.3

 Р.Л. САЛГАНИК

ТЕРМО- И ПОРОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ, СЛОИ КОТОРОЙ РАБОТАЮТ НА ИЗГИБ (КОНТИНУАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Выводятся, в континуальном приближении, уравнения линейно неупругого деформирования многослойной структуры, слои которой взаимно проскальзывают и работают на изгиб. При этом неупругость деформирования предполагается порожденной либо изменениями температуры (термоупругость), либо изменениями порового давления (для пористого материала, содержащего в порах флюид; пороупругость). Таким образом, рассматривается частный случай неупругости, когда нет отличия в деформационном поведении материала при его нагружении и разгрузке. Предполагается, что слои плоские, а их материал однороден и изотропен. Градиенты температуры или порового давления предполагаются сравнительно небольшими, позволяющими пренебречь изменениями температуры или порового давления по толщине слоя. Деформирование каждого слоя в структуре описывается на основе обычной теории слабого изгиба пластин с учетом того, что на этот слой действуют контактирующие с ним соседние слои. Характерные масштабы изменения всех изучаемых полей, как функций координат, предполагаются превышающими толщины слоев настолько, что применимо континуальное описание деформирования рассматриваемой структуры. Предполагается, что действует нормальное к слоям равномерно распределенное (и потому не влияющее на их прогибы) давление, предотвращающее возникновение отслоений. Предполагается также, что влиянием продольного нагружения слоев на их прогибы можно пренебречь. Рассмотрен способ сведения задач к задачам, которые решаются для однородных уравнений упругого деформирования структуры. Приведен иллюстративный пример. Рассмотрены возможности приложения полученных результатов.

1. Введение. Уравнения и задачи термоупругости для многослойных структур, состоящих из чередующихся жестких и мягких слоев, рассмотрены при дискретной схеме описания слоев и относительно плавном изменении температуры по толщине слоя в [1]. Это сделано в предположении, что для жестких слоев выполнены гипотезы обычной теории пластин, а для мягких слоев преобладающую роль играют их трансверсальные деформации. Ниже, в континуальном приближении, рассматривается термоупругое и пороупругое (т.е. связанное с давлением флюида, находящегося в порах материала) деформирование многослойной структуры, состоящей из плоских слоев, находящихся в непосредственном контакте друг с другом и работающих на изгиб (согласно обычной теории слабого изгиба пластин), благодаря их взаимному проскальзыванию. Это деформирование, предполагаемое здесь вызванным линейным отклонением сопротивления материала деформированию от идеально упругого сопротивления вследствие либо изменения температуры, либо изменения порового давления, представляет собой частный случай неупругости [2], когда нет отличий в деформационном поведении материала при его нагружении и разгрузке. Используемое ниже континуальное описание (приближение) деформирования рассматриваемой структуры базируется на подходе, предложенном в [3] для массива, состоящего из большого числа взаимно проскальзывающих балок-стержней, и развитом в [4] для массива, образованного большим числом взаимно проскальзывающих слоев-пластин. Это континуальное описание справедливо, если в область существенного изменения соответствующим образом усредненного прогиба слоев попадает достаточно большое их число и прогиб, как функция координат точек эквивалентной сплошной среды, моделирующей рассматриваемую структуру, изменяется достаточно плавно.

В принципе, подход [4] должен получаться из подхода [1] путем выполнения в рамках подхода [1] надлежащего предельного перехода (в сочетании с определенным упрощением подхода [1]). Исследование такого перехода представляет собой отдельную задачу, выходящую за рамки данной работы. Здесь отметим, что, как показано в [5], подход [4] применим также для континуального описания распределения прогибов слоев в многослойной структуре, где между слоями, работающими на изгиб согласно обычной теории изгиба, имеются достаточно податливые прослои, деформирование которых можно описывать подобно деформированию основания в теории изгиба балки на упругом основании. Получающийся при этом приближенный результат справедлив и, когда прослои сцеплены со слоями, и, когда они могут скользить по слоям (если допустимо пренебречь эффектами, связанными с коэффициентом Пуассона). Данное обстоятельство сближает подход [4] (в случае наличия между слоями указанных достаточно податливых прослоев) с подходом [1].

Привлекательность континуального подхода [4], который применим для решения прикладных задач, где не требуется высокая точность, заключается в том, что он приводит к сравнительно простым уравнениям. Это позволяет, для ряда основных задач, получать в достаточной мере обозримые аналитические решения, чем облегчается проведение параметрического анализа. Когда же желательно достижение большей точности, эти аналитические решения могут быть использованы в качестве исходного приближения при решении соответствующих задач непосредственно численными методами или (для случая наличия в рассматриваемой структуре указанных достаточно податливых прослоев) посредством применения более сложных теорий, рассматриваемых в [1, 6].

При обобщении подхода [4] на рассматриваемый здесь случай линейной неупругости (при условии непосредственного контакта слоев друг с другом, т.е. отсутствия прослоев типа мягких слоев в [1]) предполагается, что градиенты температуры или порового давления сравнительно невелики, вследствие чего допустимо пренебречь изменениями температуры или порового давления по толщине слоя.

2. Основные уравнения. Рассмотрим сначала уравнения линейных термо- и пороупругости в однородном и изотропном материале (сплошной среде), а затем выведем соответствующие уравнения деформирования многослойной структуры. Деформации всюду будут предполагаться малыми.

Введем декартову систему координат x_i ($i = 1, 2, 3$). Будем использовать следующие обозначения: σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, u_i – компоненты вектора смещения, δ_{ij} – символ Кронекера. При этом по индексу (индексам), стоящим после запятой, производится частное дифференцирование по соответствующей координате (соответствующим координатам) и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Частное дифференцирование по времени обозначается точкой сверху.

2.1. Математические описания термо- и пороупругости сплошной среды. Как известно, в определенном приближении, математические описания термо- и пороупругости, кратко рассматриваемые ниже для целей дальнейшего анализа, аналогичны [2].

Пусть K – модуль объемного сжатия, G – модуль сдвига, α – коэффициент линейного теплового расширения, представляющие собой константы, ΔT – отклонение температуры от некоторой постоянной температуры отсчета. В дальнейшем отклонение ΔT предполагается относительно малым. Тогда, определяющие уравнения имеют следующий вид [2, (15.1)] (термоупругость):

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) - 3K\alpha\Delta T\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.1}$$

Положим (пороупругость)

$$S = K - \frac{Q^2}{R}, \quad \bar{\alpha} = \frac{Q+R}{R}f \tag{2.2}$$

где f – пористость, предполагаемая далее постоянной, Q и R, параметры (константы), входящие в комбинированный упругий потенциал, составленный из потенциалов энергии упругих деформаций твердого тела и жидкой фазы [2, (15.14)]. Тогда, определяющие уравнения получаются из (2.1), если вместо K подставить S, вместо ΔT подставить избыточное (в алгебраическом смысле) давление $\bar{p}$, вызывающее течение находящейся в порах жидкости, которую будем считать слабосжимаемой, и вместо $3K\alpha$ подставить $\bar{\alpha}$ [2, (15.17)].

2.2. Уравнения термо- и пороупругости многослойной структуры, описываемой в континуальном приближении. Будем отождествлять ось x_3 с осью z и считать ее перпендикулярной плоскостям слоев в структуре. Правило суммирования по повторяющимся индексам, очевидно, не должно применяться к индексу z.

Выведем уравнения термоупругости. Рассмотрим сначала один слой (тонкую пластину). Выше было предположено, что можно пренебречь изменениями температуры на расстояниях порядка толщины слоя. Отсюда следует, что воздействие температуры на изгиб может проявиться только через ее влияние на нормальные напряжения, действующие на данный слой со стороны контактирующих с ним слоев (отметим, что когда это не так, роль температуры можно учесть аналогично тому, как это сделано в [7, пп. 14, 38]). Поэтому, учитывая сделанное выше предположение о возможности пренебречь влиянием продольного нагружения слоев на их прогибы, считая для простоты толщину всех слоев h одинаковой и рассматривая сначала статические (точнее, квазистатические) условия, приходим к следующему (ср. [4], (1.1)–(1.3)). Уравнение равновесия слоя имеет вид

$$Dw_{,\alpha\alpha\beta\beta} = P + Z, \quad D = \lfloor Eh^3/12(1-\nu^2)\rfloor \tag{2.3}$$

Здесь w – прогиб слоя, P, Z – нормальные нагрузка и компонента объемной силы, отнесенные к единице площади поверхности слоя, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона слоя соответственно (индексы, стоящие после запятой, означают частное дифференцирование по соответствующей координате; греческие индексы принимают значения 1, 2 и по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2). Далее имеем $P = -hq_{,z}$, где q – давление, оказываемое на данный слой контактирующими с ним слоями. Это давление можно представить складывающимся из давления $q^{(0)}$, которое предполагается не меняющимся вдоль слоев и потому не влияет на их прогиб, и давления, связанного с прогибом слоев (давление $q^{(0)}$ предполагается достаточно большим для того, чтобы предотвратить возникновение отслоений в рассматриваемой многослойной структуре). Давление q равно по величине и противоположно по знаку нормальному напряжению вдоль оси z, что, с учетом (2.1), позволяет записать:

$$-q = -q^{(0)} + E_a w_{,z} + 3K\alpha\Delta T \tag{2.4}$$

Здесь предположено, что не связанная с изменением температуры составляющая напряжения вдоль оси z пропорциональна $w_{,z}$. Соответственно E_a – эффективный модуль упругости (в том смысле, что он учитывает шероховатость контактов между слоями). В итоге, с учетом вышеприведенных равенств, из (2.3) находим (вклад межслойных границ в эффект термоупругости считаем пренебрежимо малым):

$$Dw_{,\beta\beta\gamma\gamma} - E_a w_{,zz} - 3K\alpha T_{,z} = -hq^{(0)}_{,z} + Z, \quad K = [E/3(1-2\nu)] \tag{2.5}$$

где под w следует понимать прогиб, усредненный по достаточно большому числу слоев. Отклонение температуры от температуры отсчета следует понимать как усредненное по достаточно большому числу слоев. Отметим, что второй член в уравнении (2.5) не учитывает эффект, связанный с коэффициентом Пуассона. Такое упрощение представляется допустимым, когда большая точность не требуется или не достижима, как это имеет место при решении рассматриваемых здесь прикладных задач. Если слои горизонтальны, а объемная сила Z – гравитационная, то правая часть в (2.5) исчезает (см. [4]).

Изменение температуры можно, с практически достаточной точностью, считать, как и будем далее делать, определяемым простым уравнением теплопроводности [8, (31.5)]:

$$\dot{T} = \chi T_{,kk} + \Theta \tag{2.6}$$

где Θ – распределение тепловыделения, отнесенное к некоторой средней теплоемкости единицы объема, χ – отношение теплопроводности к этой теплоемкости (температуропроводность), предполагаемое постоянным (знак Δ при T можно не писать, так как температура отсчета предполагается постоянной). Под T понимается температура, усредненная по достаточно большому числу слоев. В связи с этим отметим, что, поскольку межслойные границы могут создавать дополнительное тепловое сопротивление, вместо уравнения (2.6) может понадобиться его обобщение на случай анизотропии [8, §32], учитывающей повышение теплового сопротивления по нормали к слоям по сравнению с его значением вдоль слоев (трансверсальная изотропия) путем перехода к соответствующим эффективным параметрам. Когда член, содержащий T, исчезает, (2.5), естественно, переходит в уравнение, соответствующее случаю упругости [4, (1.6)].

Рассмотрим динамический случай. Переход к нему осуществляется добавлением сил инерции, т.е. добавлением к Z члена $-\rho h\ddot{w}$ (считаем плотность ρ всех слоев одинаковой).

Далее рассмотрим вывод уравнений пороупругости. Уравнение для прогиба в этом случае получается из уравнения (2.5) подстановкой в него $\bar{\alpha}$ вместо $3K\alpha$ и $\bar{p}$ вместо T. Что касается изменения порового давления $\bar{p}$, то с практически достаточной точностью поровое давление можно считать подчиняющимся уравнению, аналогичному уравнению (2.6) (см. [9, (3.90)]), в котором вместо T теперь должно быть подставлено $\bar{p}$ (при соответствующем изменении смысла остальных величин). При этом под $\bar{p}$ надо понимать давление, усредненное по достаточно большому числу слоев. Кроме того, может оказаться необходимым учесть изменение фильтрационного сопротивления, порождаемое межслойными границами, путем перехода к соответствующим эффективным параметрам. В результате, возможно возникновение эффекта трансверсальной изотропии с осью изотропии, перпендикулярной плоскостям слоев (см. [9, п. 3.32]). Можно ожидать, что характерным при этом будет случай уменьшения сопротивления переносу изменений усредненного давления вдоль слоев из-за существенно большей проницаемости межслойных границ по сравнению с проницаемостью самих слоев.

Таким образом, в рассматриваемом приближении для многослойной структуры, имеет место, как и для сплошной среды, аналогия математических описаний пороупругости и термоупругости.

3. Способ сведения задач к задачам, которые решаются для однородных уравнений упругого деформирования структуры. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением только задач термоупругости. Математическая аналогия между задачами термо- и пороупругости (см. п. 2) позволяет переносить результаты решения задач термоупругости на случай пороупругости.

3.1. Общая схема. В рассматриваемом приближении уравнение (2.6) для распределения температуры, обобщенное на случай многослойной структуры, не зависит от прогиба слоев. Поэтому для задач, в которых прогибы слоев не участвуют в формулировках начальных и граничных условий для температуры, распределение температуры можно считать в принципе известным при отыскании распределения прогиба. Отсюда следует, что член в (2.5), содержащий температуру, можно рассматривать как некоторую, в принципе известную, дополнительную объемную силу. Таким образом, приходим к задаче об отыскании распределения прогиба при наличии объемных сил. Это остается справедливым также и в динамическом случае, когда к объемным силам добавляется еще сила инерции. Решение задачи об отыскании распределения прогиба удобно искать в виде суммы (*1*) какого-либо частного решения уравнения (2.5), и (*2*) решения соответствующего однородного уравнения (получающегося из (2.5) приравниванием нулю его правой части и члена, содержащего температуру). Это, допустимо вследствие линейности уравнения (2.5). Решение (*1*) можно, предполагая область, где ищется решение, бесконечной, найти в виде свертки данного распределения объемных сил с фундаментальным решением для сосредоточенной силы в бесконечной области. Представив решение уравнения (2.5) в виде суммы решений (*1*) и (*2*) и воспользовавшись граничными условиями, можно свести задачу к отысканию решения (*2*), удовлетворяющего соответствующим образом измененным граничным условиям. Поясним вопрос об этом изменении граничных условий на примере рассмотренных в [5] смешанных задач для полубесконечной области с границей, параллельной плоскостям слоев, считая распределение температуры известным и правую часть (2.5) нулевой. При этом на одной части границы задано распределение прогиба w, а на другой – нормального к ней давления q. Указанное изменение граничных условий состоит, во-первых, в прибавлении к q распределения $3K\alpha\Delta T$ на границе (см. (2.4)) и, во-вторых, в вычитании из w и q распределений соответствующих величин на границе, полученных из решения (*1*). Затем для получения искомого решения можно воспользоваться результатами работы [5] (отметим, что в [5] во втором соотношении (2.1) вместо β должно быть β^2, а в левой части первого соотношения (4.21) пропущен множитель $1/r$). Если задача изначально ставится для бесконечной области, то решение (*1*) (удовлетворяющее соответствующим условиям на бесконечности) является полным ее решением.

3.2. Иллюстративный пример. Рассмотрим указанную задачу для бесконечной области и условий плоской деформации в пренебрежении динамическими эффектами (квазистатическое напряженно-деформированное состояние). Неравномерное распределение температуры можно при этом считать созданным источниками или стоками тепла, находящимися внутри рассматриваемой многослойной структуры. Предположим для простоты, что объемные силы отсутствуют. Тогда единственной величиной, эквивалентной объемной силе, которая останется в уравнении (2.5), будет $F_T = 3K\alpha T_{,z}$. Отсюда, считая напряжения, связанные с изгибом слоев, исчезающими на бесконечности, находим

$$w(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_T(\xi,\zeta,t)\,w_{F1}(x-\xi, z-\zeta)\,d\xi\,d\zeta \qquad (3.1)$$

где t – время, а $w_{F1}(x, z)$ – соответствующее фундаментальное решение, являющееся решением для единичной сосредоточенной силы, которое имеет следующий вид (в чем можно убедиться непосредственной проверкой) [10]:

$$w_{F1}(x, z) = -\frac{1}{4E_a\beta}\left[2\sqrt{\frac{\beta|z|}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\beta|z|}\right)+x\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\beta|z|}}\right)\right],\quad \beta = \sqrt{D/hE_a} \tag{3.2}$$

где $\operatorname{erf}\xi$ – функция ошибок.

4. Заключение. Остановимся на некоторых возможных приложениях развитой выше схемы описания линейного термо- или пороупругого деформирования многослойной структуры в континуальном приближении. Применительно к геологическим слоистым структурам, эта схема может быть эффективной для учета роли пороупругости при анализе явлений изгибного деформирования и разрушений, вызываемых проведением подземных или открытых работ, например, в ситуациях типа рассмотренных в [11, рис. 7.5, 8.1]. Применительно к инженерным многослойным структурам (например, покрытиям), эта схема может, в частности, оказаться эффективной для анализа и оценки явлений изгибного деформирования и разрушения, происходящих при воздействии локального нагрева, когда возникают значительные зоны расслоения, например, в результате потери устойчивости от достаточно сильного локального продольного сжатия слоев, вызванного этим нагревом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00376).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
3. *Sonntag G.* Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung // Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1957. Bd. 23. H. 1/2. S. 3–8.
4. *Салганик Р.Л.* Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 48–56.
5. *Салганик Р.Л.* Смешанные статические граничные задачи для многослойных упругих структур, образованных работающими на изгиб слоями (континуальное приближение) // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 88–97.
6. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
9. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
10. *Salganik R.L., Ustinov K.B.* Crack-like formation of failure-decided angle points on middle planes of the layers resistant to bending in multi-layer structure – a continuum model // Internat. J. Fract. 2004. V. 128. P. 41–48.
11. *Гудман Р.* Механика скальных пород. М.: Стройиздат, 1987. 232 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.08.2003