МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2005

УДК 539.3

© 2005 г. Н.Г. РЯБЕНКОВ, Р.Ф. ФАЙЗУЛЛИНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКОГО УПРУГОГО ТЕЛА

Предлагается вариант разложения напряженного состояния плоского упругого тела в ряды по малому параметру. Методом асимптотического интегрирования решаются уравнения классической трехмерной теории упругости и иллюстрируются возможности предложенного варианта разложения при построении моделей деформирования пластин и связующих слоев.

1. Введение. Асимптотический метод решения дифференциальных уравнений предполагает наличие малого параметра h. При исследовании напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек в качестве такого параметра обычно принимается половина толщины объекта. Именно таким образом строятся известные процедуры асимптотического решения задачи теории упругости.

Проблема построения асимптотического решения уравнений теории упругости определяется необходимостью выбора формы асимптотических последовательностей. Она осложняется тем, что задача теории упругости в общем случае сводится к системе уравнений, причем эту систему можно записать различными способами [1–3]. Наиболее удачным представляется вариант [1], в котором из уравнений теории упругости посредством соотношений Коши исключены компоненты тензора деформаций. В качестве неизвестных при этом выступают шесть компонент тензора напряжений и три компоненты вектора перемещений произвольной точки тела.

Скорость сходимости асимптотических рядов главным образом зависит от адекватности формы этих рядов и характера решаемой задачи. Хорошую сходимость следует ожидать лишь при удачном подборе рядов для всех девяти неизвестных величин. В данной статье предлагается вариант асимптотического разложения, из которого в первом и втором приближениях следуют основные модели деформирования пластин, а также связующих слоев типа заполнителя в трехслойной пластине или клеевого слоя.

2. Постановка задачи. Введем декартову систему координат o, x, y, z. Рассмотрим тело, ограниченное плоскостями $z = \pm h$ и цилиндрической поверхностью Λ с образующей длиной $2h$, параллельной оси oz. Таким образом, координатная плоскость oxy совпадает со срединной плоскостью тела и ось oz ортогональна срединной плоскости. Контуры Γ, по которым пересекаются плоскости $z = \pm h$ и поверхность Λ, произвольны. Полагаем, что величина $2h$ достаточно мала по сравнению с размерами контура Γ.

В каждой точке тела напряженно-деформированное состояние определяется системой уравнений линейной теории упругости, которую представим в следующей форме:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z}\sigma_z \tag{2.1}$$

$$G_{xy}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] = \tau_{xy}, \quad (x, \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{y}}, z)\;(u, \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{v}}, w)$$

Здесь σ_x, ..., τ_{yz} – компоненты тензора напряжений; u, v, w – компоненты вектора перемещения произвольной точки тела; G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} – модули сдвига материала. Считая тело ортотропным, имеем связь между модулями упругости и коэффициентами Пуассона: $\nu_{xy}E_y = \nu_{yx}F_x$, $\nu_{yz}F_z = \nu_{zy}E_y$, $\nu_{zx}E_x = \nu_{xz}E_z$.

3. Алгоритм асимптотического интегрирования. Решение системы уравнений (2.1) будем искать в виде:

$$u = u_{\mathrm{I}} + u_{\mathrm{II}}, \quad v = v_{\mathrm{I}} + v_{\mathrm{II}}, \ldots, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz\mathrm{I}} + \tau_{yz\mathrm{II}} \tag{3.1}$$

Слагаемые u_{I}, v_{I}, ..., $\tau_{yz\mathrm{I}}$ и u_{II}, v_{II}, ..., $\tau_{yz\mathrm{II}}$ определим двумя независимыми рекуррентными процессами.

Для построения первого процесса компоненты u_{I}, v_{I}, ..., $\tau_{yz\mathrm{I}}$ представим следующими рядами по степеням малого параметра h:

$$\begin{aligned}
&u_{\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-1}u_1^S, \quad v_{\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-1}v_1^S, \quad w_{\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-2}w_1^S\\
&\sigma_{x\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-1}\sigma_{x1}^S, \quad \sigma_{y\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-1}\sigma_{y1}^S, \quad \sigma_{z\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-1}\sigma_{z1}^S\\
&\tau_{xy\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-3}\tau_{xy1}^S\\
&\tau_{xz\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-2}\tau_{xz1}^S, \quad \tau_{yz\mathrm{I}} = \Sigma h^{S-2}\tau_{yz1}^S
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Введем безразмерную переменную $\varsigma = z/h$ и совершим в уравнениях (2.1) преобразование координат. Далее подставим в них ряды (3.2) и приравняем нулю коэффициенты при h^S. В результате получим систему дифференциальных уравнений для определения параметров разложения u_1^S, v_1^S, ..., τ_{yz1}^S. Решение этой системы можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\tau_{xz1}^S = f_x^S - \int_0^{\varsigma}\left(G_{xy}\frac{\partial\gamma^{S-2}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{x1}^{S-2}}{\partial x}\right)d\varsigma\\
&\sigma_{z1}^S = p_z^S - \int_0^{\varsigma}\left(\frac{\partial\tau_{xz1}^S}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz1}^S}{\partial y}\right)d\varsigma\\
&w_1^S = f_z^S + \int_0^{\varsigma}\left(\frac{\sigma_{z1}^{S-2}}{E_z} - \frac{\nu_{zx}}{E_x}\sigma_{x1}^{S-2} - \frac{\nu_{zy}}{E_y}\sigma_{y1}^{S-2}\right)d\varsigma\\
&\tau_{xy1}^S = G_{xy}\gamma^{S-2}, \quad u_1^S = p_x^S + \int_0^{\varsigma}\left(\frac{\tau_{xz1}^S}{G_{xz}} - \frac{\partial w_1^S}{\partial x}\right)d\varsigma\\
&\sigma_{x1}^S = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(\frac{\partial u_1^S}{\partial x} + \nu_{xy}\frac{\partial v_1^S}{\partial y} + \frac{\nu_{xz}+\nu_{yz}\nu_{xy}}{E_z}\sigma_{z1}^S\right) \ (x \rightleftarrows y)\ (u \rightleftarrows v)\\
&\gamma^{S-2} = \frac{\partial v_1^{S-2}}{\partial x} + \frac{\partial u_1^{S-2}}{\partial y} \quad (S = 1, 3, 5, \ldots)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Функции $f_x^S(x, y)$, $f_y^S(x, y)$, $f_z^S(x, y)$ и $p_x^S(x, y)$, $p_y^S(x, y)$, $p_z^S(x, y)$, возникающие при интегрировании, произвольны. Величины с отрицательными верхними индексами следует положить равными нулю.

Для построения второго рекуррентного процесса, в котором определим u_{II}, υ_{II}, … …, $\tau_{yz\text{II}}$, степенные ряды зададим таким образом, чтобы суммарное решение (3.1) содержало все положительные степени малого параметра. Полагаем

$$u_{\text{II}} = \Sigma h^{S-2} u_2^S, \quad \upsilon_{\text{II}} = \Sigma h^{S-2} \upsilon_2^S, \quad w_{\text{II}} = \Sigma h^{S-1} w_2^S$$

$$\sigma_{x\text{II}} = \Sigma h^{S-2} \sigma_{x2}^S, \quad \sigma_{y\text{II}} = \Sigma h^{S-2} \sigma_{y2}^S, \quad \sigma_{z\text{II}} = \Sigma h^{S-2} \sigma_{z2}^S \tag{3.4}$$

$$\tau_{xy\text{II}} = \Sigma h^{S-2} \tau_{xy2}^S, \quad \tau_{xz\text{II}} = \Sigma h^{S-1} \tau_{xz2}^S, \quad \tau_{yz\text{II}} = \Sigma h^{S-1} \tau_{yz2}^S$$

Параметры u_2^S, υ_2^S, …, τ_{yz2}^S находим в виде

$$u_2^S = g_x^S + \int_0^\varsigma \left(\frac{\tau_{xz2}^{S-2}}{G_{xz}} - \frac{\partial w_2^{S-2}}{\partial x} \right) d\varsigma$$

$$\sigma_{z2}^S = g_z^S - \int_0^\varsigma \left(\frac{\partial \tau_{xz2}^{S-2}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz2}^{S-2}}{\partial y} \right) d\varsigma, \quad \tau_{xy2}^S = G_{xy} \left(\frac{\partial u_2^S}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_2^S}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{x2}^S = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \left(\frac{\partial u_2^S}{\partial x} + \nu_{xy} \frac{\partial \upsilon_2^S}{\partial y} + \frac{\nu_{xz} + \nu_{yz}\nu_{xy}}{E_z} \sigma_{z2}^S \right) \tag{3.5}$$

$$w_2^S = q_z^S + \int_0^\varsigma \left(\frac{\sigma_{z2}^S}{E_z} - \frac{\nu_{zx}}{E_x} \sigma_{x2}^S - \frac{\nu_{zy}}{E_y} \sigma_{y2}^S \right) d\varsigma$$

$$\tau_{xz2}^S = q_x^S - \int_0^\varsigma \left(\frac{\partial \sigma_{x2}^S}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy2}^S}{\partial y} \right) d\varsigma \; (\overleftarrow{\underrightarrow{x, y}}) \; (\overleftarrow{\underrightarrow{u, \upsilon}}) \; (S = 1, 3, 5, \ldots)$$

Функции интегрирования $g_x^S(x, y)$, $g_y^S(x, y)$, $g_z^S(x, y)$ и $q_x^S(x, y)$, $q_y^S(x, y)$, $q_z^S(x, y)$ произвольны.

4. Структура первого приближения. В качестве первого приближения примем первые ненулевые члены рядов (3.2), (3.4). Все они будут определяться параметрами u_1^S, υ_1^S, …. τ_{yz1}^S, u_2^S, υ_2^S, …. τ_{yz2}^S помеченными верхним индексом $S = 1$, кроме касательных напряжений $\tau_{xy\text{I}}$, которые определяются параметром τ_{xy1}^3.

Рассмотрим изотропную плиту с модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига $G = E/2(1 + \nu)$. Структура напряженного состояния в первом асимптотическом приближении принимает вид:

$$\sigma_z = p_z^1 + \frac{g_z^1}{h} - \frac{z}{h}\left[\frac{\partial f_x^1}{\partial x} + \frac{\partial f_y^1}{\partial y} \right], \quad u = p_x^1 + \frac{g_x^1}{h} + \frac{z}{h}\left[\frac{f_x^1}{G} - \frac{\partial f_z^1}{\partial x} \right]$$

$$w = q_q^1 + \frac{f_z^1}{h} + \frac{z}{h}\left[\frac{1 - \nu - 2\nu^2}{E(1-\nu)} g_z^1 - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x^1}{\partial x} + \frac{\partial g_y^1}{\partial y} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial p_x^1}{\partial y}+\frac{\partial p_y^1}{\partial x}\right)+\frac{G}{h}\left(\frac{\partial g_x^1}{\partial y}+\frac{\partial g_y^1}{\partial x}\right)+\frac{z}{h}\left[\frac{\partial f_x^1}{\partial y}+\frac{\partial f_y^1}{\partial x}-2G\frac{\partial^2 f_z^1}{\partial x\partial y}\right]\\
\tau_{xz} &= q_x^1+\frac{f_x^1}{h}-\frac{z}{h}\left[\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial g_z^1}{\partial x}+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 g_x^1}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 g_x^1}{\partial y^2}+\frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 g_y^1}{\partial x\partial y}\right]
\end{aligned} \qquad (4.1)$$

$$\sigma_x = \frac{\nu}{1-\nu}\left(p_z^1+\frac{g_z^1}{h}\right)+\frac{E\nu}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial p_y^1}{\partial y}+\frac{1}{h}\frac{\partial g_y^1}{\partial y}\right)+\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial p_x^1}{\partial x}+\frac{1}{h}\frac{\partial g_x^1}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{z}{h}\left[\frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_x^1}{\partial x}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial f_y^1}{\partial y}-\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 f_z^1}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 f_z^1}{\partial y^2}\right)\right] \quad \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{(x, y)}}\ \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{(u, v)}}$$

Таким образом, в первом приближении компоненты вектора перемещения и тензора напряжений представлены линейными полиномами координаты z. Они выражены посредством 12-ти произвольных функций интегрирования f_x^1, g_x^1, p_x^1, q_x^1, ..., q_z^1, зависящих только от координат срединной плоскости. Их следует определить с учетом характера деформированного тела.

5. Расчетные модели первого приближения. Выбирая соответствующим образом функции интегрирования, можно построить различные модели расчета напряженно-деформированного состояния тела. Из соотношений (4.1) в частности следует, что в первом приближении можно построить теории деформирования плит, учитывающие нормальные напряжения σ_z и касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz}. Однако, эти модели будут обладать малой общностью.

Покажем, что из структуры (4.1) следует модель Кирхгофа для расчета пластин. Обозначим $p_x^1 = u_0$, $p_y^1 = v_0$, $f_z^1 = hw_0$, а все остальные функции из набора f_x^1, g_x^1, p_x^1, q_x^1, ..., q_z^1 положим равными нулю. Тогда соотношения (4.1) принимают известный вид:

$$u = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad w = w_0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[e_x+\nu e_y]$$

$$\tau_{xy} = G\left[\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}-2z\frac{\partial w_0}{\partial x\partial y}\right], \quad e_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{(x, y)}}\ \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{(u, v)}}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 – компоненты перемещения произвольной точки срединной плоскости; e_x, e_y – компоненты деформации пластины. Заметить, что в результате получается точная запись гипотезы Кирхгофа.

Асимптотический алгоритм позволяет строить теории деформирования связующего в слоистых конструкциях. В качестве примера рассмотрим модель деформирования [4]. Такая схема часто используется при расчете трехслойных пластин и клеевых соединений [5, 6].

Пусть $u^{\pm} = u(x, y, \pm h)$, $v^{\pm} = v(x, y, \pm h)$, $w^{\pm} = w(x, y, \pm h)$ – значения компонент перемещения на плоскостях $z = \pm h$. Тогда, рассматриваемая модель деформирования представляется в виде:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}(u^+ + u^-)+\frac{z}{2h}(u^+ - u^-)\ \overset{\leftarrow}{\underset{\rightarrow}{(u, v, w)}}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0\\
\tau_{xz} &= \frac{G}{2h}(u^+ - u^-), \quad \tau_{yz} = \frac{G}{2h}(v^+ - v^-), \quad \sigma_z = \frac{E}{2h}(w^+ - w^-)
\end{aligned} \qquad (5.1)$$

Сравнивая соотношения (4.1) и (5.1) получим следующие выражения функций интегрирования:

$$f_x^1 = G\frac{\partial\gamma_z}{\partial x} + C_1 y + C_2, \quad f_y^1 = G\frac{\partial\gamma_z}{\partial y} - C_1 x + C_3, \quad f_z^1 = \gamma_z$$

$$g_x^1 = \gamma_x, \quad g_y^1 = \gamma_y, \quad g_z^1 = \frac{E}{2}(w^+ - w^-)$$

$$p_x^1 = \frac{1}{2}(u^+ + u^-) - \frac{\gamma_x}{h}, \quad p_y^1 = \frac{1}{2}(v^+ + v^-) - \frac{\gamma_y}{h}, \quad p_z^1 = 0$$

$$q_x^1 = -\frac{G}{h}\frac{\partial\gamma_z}{\partial x}, \quad q_y^1 = -\frac{G}{h}\frac{\partial\gamma_z}{\partial y}, \quad q_z^1 = \frac{1}{2}(w^+ + w^-) - \frac{\gamma_z}{h}$$

Здесь γ_x, γ_y, γ_z – произвольные гармонические функции, C_1, C_2, C_3 – константы. Дополнительно имеем следующие условия:

$$u^+ = \frac{1}{2h}\left(\gamma_x + \int_0^x \frac{\partial\gamma_y}{\partial y}dx\right), \quad v^+ = \frac{1}{2h}\left(\gamma_y - \int_0^x \frac{\partial\gamma_x}{\partial y}dx\right)$$

$$u^- = u^+ - \frac{2}{G}(C_1 y + C_2), \quad v^- = v^+ + \frac{2}{G}(C_1 x - C_3) \tag{5.2}$$

$$\nu(w^- - w^+) = \partial\gamma_x/\partial x + \partial\gamma_y/\partial y$$

Таким образом, схема деформирования (5.1) является корректной моделью первого асимптотического приближения только при выполнении условий (5.2). Заметим, что в этом случае касательные напряжения τ_{xz} будут линейной функцией координаты y; τ_{yz} – линейной функцией координаты x. Напряжения σ_z должны быть гармонической функцией.

6. Построение точных решений. Подставим выражения (4.1) в исходную систему (2.1) и сгруппируем члены при нулевой и первой степенях координаты z. В результате получим систему 12-ти дифференциальных уравнений для определения функций f_x^1, g_x^1, p_x^1, q_x^1, ..., q_z^1. В случае изотропного тела эта система распадается на четыре независимые системы уравнений, из которых находим

$$f_x^1 = (4\nu - 3)\psi_x + \frac{\partial\psi_z}{\partial x} + x\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right) + \int_0^x \frac{\partial\psi_y}{\partial y}dx$$

$$g_x^1 = 2(2\nu - 3)\varphi_x + x\left(\varphi_z + \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + \int_0^y \frac{\partial\varphi_z}{\partial x}dy\right) \tag{6.1}$$

$$p_x^1 = 2(4\nu - 3)\theta_x + x\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x} - \frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right), \quad q_x^1 = G\frac{\partial\theta_z}{\partial x} \; (x \leftrightarrows y)$$

$$f_z^1 = \frac{1+\nu}{E}\left[\psi_z + x\left(\psi_x + \int_0^x \frac{\partial\psi_y}{\partial y}dx\right) + y\left(\psi_y + \int_0^y \frac{\partial\psi_x}{\partial x}dy\right)\right]$$

$$g_z^1 = \frac{2E(2\nu - 3)}{1+\nu}\varphi_z, \quad p_z^1 = -\frac{4E\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right), \quad q_z^1 = \theta_z$$

Здесь φ_x, φ_y, φ_z, ψ_x, ψ_y, ψ_z, θ_x, θ_y, θ_z – гармонические функции координат срединной плоскости.

Таким образом, соотношения (4.1) будут точным решением уравнений теории упругости, если f_x^1, g_x^1, p_x^1, q_x^1, ..., q_z^1 посредством соотношений (6.1) выражены через девять гармонических функций. Следует отметить, что построенное решение соответствует только первому асимптотическому приближению, и поэтому не является общим решением задачи теории упругости. Девяти гармонических функций недостаточно для удовлетворения произвольных граничных условий на плоскостях $z = \pm h$ и поверхности Λ.

Представление о том, что асимптотический алгоритм порождает только приближенные решения, не совсем точно отражает суть процесса. Если это происходит при асимптотическом решении одного дифференциального уравнения, то для системы дифференциальных уравнений может сложиться иначе. Именно это и наблюдается при решении уравнений теории упругости.

7. Заключение. Алгоритм, изложенный в п. 3, позволяет строить расчетные модели второго и последующих асимптотических приближений. В m-м приближении все компоненты напряженного состояния будут представлены степенными рядами координаты z с максимальной степенью $S = 2m - 1$. Структура m-го приближения имеет вид:

$$u = \sum_{k=0}^{2m-1} \Omega_k^{(u)} z^k, \ldots, \quad \tau_{yz} = \sum_{k=0}^{2m-1} \Omega_k^{(\tau)} z^k \qquad (7.1)$$

В рядах (7.1) будут присутствовать все положительные степени z; $\Omega_k^{(u)}(x, y)$, ..., $\Omega_k^{(\tau)}(x, y)$ представляют собой дифференциальные комплексы произвольных функций интегрирования f_x^S, g_x^S, p_x^S, q_x^S, ..., q_z^S ($S = 1, 3, \ldots, 2m - 1$). В каждом приближении появляются 12 новых функций, и в ряды (7.1) добавляются две степени координаты z.

Построенный алгоритм без каких-либо принципиальных изменений можно использовать для решения плоской задачи теории упругости [7, 8]. В этом случае из него также следуют точные решения, выраженные полиномами от координат. В первом приближении получаем полиномы второй степени, во втором приближении – полиномы четвертой степени.

Во втором приближении из асимптотического алгоритма можно получить известную модель деформирования балок, в которой касательные напряжения τ_{xz} по толщине определяются законом квадратной параболы. Из алгоритма следует модель деформирования заполнителя в трехслойной балке, в которой напряжения σ_z линейно изменяются по толщине, и другие модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 660–686.
2. *Агаловян Л.А.* О взаимодействии погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы // Изв. АН Арм. ССР. 1977. № 5. С. 30. С. 48–62.

3. *Мальков В.М.* Линейная теория тонкого слоя из малосжимаемого материала // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 52–54.
4. *Болотин В.В.* Основные уравнения теории армированных сред // Механика полимеров. 1965. № 2. С. 27–38.
5. *Goland M., Reissner E.* The stresses in Cemented joints // J. Appl. Mech. 1944. V. 11. № 1. P. A17–A27.
6. *Артюхин Ю.П.* Напряжения в клеевых соединениях // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, 1975. С. 3–27.
7. *Рябенков Н.Г.* Асимптотическое решение задачи теории упругости для тонкого связующего слоя // Тр. 18-й Межд. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов: СГТУ, 1997. Т. 2. С. 142–145.
8. *Рябенков Н.Г.* Один вариант асимптотического метода в теории упругости тонкого слоя // Механика оболочек и пластин. Сб. докл. 20-й Межд. конф. по теории оболочек и пластин. Н. Новгород: НГУ, 2002. С. 254–261.

Казань

Поступила в редакцию
13.05.2003