МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2005

УДК 531.36

© 2005 г. Б.Н. СОКОЛОВ

ГАРАНТИРОВАННАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ НА ДИНАМИКУ СТАБИЛИЗАЦИИ ЕЕ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПРИ РЕЛЕЙНОМ УПРАВЛЕНИИ

Рассматривается задача оценки влияния системы материальных точек на управляемое движение твердого тела при его стабилизации относительно заданного направления. Материальные точки соединены друг с другом и с твердым телом линейными вязкоупругими связями. Движение происходит под действием внешнего возмущения и управляющего момента, компоненты вектора которого релейны и направлены вдоль главных центральных осей инерции недеформированного твердого тела. В канале управления движением имеется фиксированное запаздывание, так что сколь угодно частые переключения управления невозможны. Возникающие под действием сил инерции колебания влияют на движение твердого тела, что необходимо учитывать при формировании стабилизирующего управления. Дана гарантированная оценка величины момента этого воздействия и амплитуды возникающих в результате переключения релейного управления относительных колебаний системы материальных точек. Предполагается, что управляющей стороне кинематическое состояние системы материальных точек не известно. Знание этих оценок позволит при формировании управления использовать гарантирующий подход [1–3], при котором силовое воздействие системы материальных точек на движение твердого тела трактуется как результат действия ограниченной по величине заранее не известной внешней помехи. Работа примыкает к [4–6] и продолжает исследование эффективности релейных регуляторов с запаздыванием в канале управления [7–10] в задаче гарантированной стабилизации. Динамика твердого тела с упругими и диссипативными элементами в предположении о малости периода собственных колебаний и времени их затухания по сравнению с характерным временем движения исследовалась в [11].

Рассматривается конструкция, состоящая из твердого тела P с массой m_P и системы N материальных точек p_i с массами m_i, соединенных друг с другом и с телом P линейными упругими и диссипативными связями. В равновесном, недеформированном, состоянии, когда вся система покоится, каждая материальная точка p_i занимает фиксированное относительно твердого тела P положение o_i. На твердое тело P действуют пары сил, образующие ограниченные возмущающие и управляющие моменты. Предполагается, что управляющее воздействие создается релейными реактивными двигателями, жестко связанными с твердым телом, так что вектор каждого из трех управляющих моментов направлен вдоль соответствующей главной центральной оси инерции недеформированной конструкции. Двигатели имеют фиксированное запаздывание в канале управления тягой, поэтому мгновенные переключения тяги невозможны. Необходимость коррекции изменяющегося под действием внешнего возмущения углового положения твердого тела вынуждает периодически переключать управление, что вызывает упругие колебания под действием сил инерции связанной с телом системы материальных точек. Предполагается, что кинематическое состояние системы точек управляющей стороне не известно. Поэтому при формировании стабилизирующего управления представляется целесообразным использовать гарантирующий подход, трактуя силовое воздействие колеблющихся масс на динамику твердого тела как результат действия ограниченной по величине, но заранее не известной внешней помехи. Оценим сверху величину момента этого воздействия, а также амплитуду относительных колебаний связанных с твердым телом масс. Это позволит при необходимости оценить влияние упругих элементов конструкции на точность ее угловой стабилизации (подобная оценка для частного случая движения конструкции – поступательного – приведена в [10]), а также определить границы отклонения искаженной в результате колебаний формы конструкции от исходной. Свяжем жестко с твердым телом подвижную систему координат $oxyz$ с началом в центре масс и с осями, направленными вдоль главных осей инерции недеформированной конструкции. Введем дополнительно еще две системы координат: неподвижную $OXYZ$ и подвижную $ox'y'z'$, называемую далее сопутствующей, начало которой совпадает с началом связанной системы координат, а направление осей совпадает с направлением соответствующих осей неподвижной системы. Положим

$$R_0 = Oo', \quad \rho_i = o'o_i, \quad r_i = o_i p_i, \quad R_i = R_0 + \rho_i + r_i \tag{1}$$

Пусть ω – вектор абсолютной угловой скорости вращения жестко связанной с телом P системы координат $oxyz$. Тогда производные по времени в сопутствующей и связанной системах координат соответственно удовлетворяют соотношению

$$\dot{r} = r' + \omega \times r \tag{2}$$

где r – произвольный вектор. Уравнения малых колебаний системы материальных точек запишем в форме уравнений Лагранжа. Определим смещение r_k материальной точки p_k относительно положения равновесия o_k вектором обобщенных координат $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$, связанных с r_k зависимостью

$$r_k = \sum_{i=1}^{n} H_{ki} q_i \tag{3}$$

где компоненты векторов H_{ki} в связанной системе координат постоянны. Кинетическая энергия T точек p_k в их движении относительно твердого тела с учетом представления (3) записывается в виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i r_i'^2 = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}), \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k (H_{ki}, H_{kj})$$

Отсюда получаем уравнения малых колебаний точек под действием сил инерции

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q \tag{4}$$

Здесь A, B, C – симметричные постоянные положительно определенные матрицы масс, диссипации и упругой потенциальной энергии, Q – вектор обобщенных сил, обусловленных силами инерции, с компонентами

$$\begin{gathered} Q_j = -\sum_{s=1}^{N} H_{sj} m_s (w_s^c + w_s^e) \\ w_s^e = \ddot{R}_0 + \omega \times (\omega \times (\rho_s + r_s)) + \dot{\omega} \times (\rho_s + r_s), \quad w_s^c = 2\omega \times r_s' \end{gathered} \tag{5}$$

где w_s^e и w_s^c – переносное и кориолисово ускорения точки p_s соответственно. Рассмотрим теперь движение системы материальных точек и твердого тела в сопутствующей системе координат $ox'y'z'$. По теореме об изменении вектора кинетического момента относительно полюса o имеем

$$dK/dt = M + M_1 + M_2 \tag{6}$$

$$K = \sum_\alpha m_\alpha(\rho_\alpha + r_\alpha)\times(\rho_\alpha + r_\alpha)^\bullet = J\circ\omega + \sum_{i=1}^N m_i[r_i\times(\omega\times\rho_i + \dot r_i) + \rho_i\times\dot r_i]$$

$$J\circ\omega = \sum_\alpha m_\alpha\rho_\alpha\times(\omega\times\rho_\alpha),\quad J = \sum_\alpha m_\alpha(\rho_\alpha^2 E - \rho_\alpha\rho_\alpha) \tag{7}$$

Здесь K – вектор кинетического момента; J – тензор инерции недеформированной конструкции, диагональный в связанной системе координат $oxyz$; $\rho_\alpha\rho_\alpha$ – диадное произведение; индекс α означает, что суммирование распространяется на все материальные точки конструкции, в том числе на те, которые составляют твердое тело, так что $\Sigma_\alpha m_\alpha = m_P + \Sigma_i m_i$ ($i = 1, 2\ldots N$). Для точек твердого тела следует положить $r_\alpha = r'_\alpha = 0$, так как относительно связанной системы координат эти точки неподвижны. Вектор управляющего момента $M = (M_x, M_y, M_z)^T$ такой, что его проекции M_ζ на оси связанной системы координат принимают только два значения

$$M_\zeta(t) = \pm M_\zeta^0,\quad \zeta = x, y, z \tag{8}$$

а два последовательных момента t_α, t_β переключения управления на ζ-ом канале удовлетворяют неравенству

$$t_\beta - t_\alpha \ge \Delta t_D \tag{9}$$

где Δt_D – фиксированное запаздывание в канале управления двигателем. Компоненты вектора возмущающего момента M_1 по предположению постоянны в связанной системе координат. Момент сил инерции M_2 относительно полюса o, обусловленный неинерциальностью сопутствующей системы координат, равен

$$M_2 = -\sum_\alpha m_\alpha(\rho_\alpha + r_\alpha)\times\ddot R_0 = \ddot R_0\times\sum_\alpha m_\alpha r_\alpha = \left(m_P + \sum_{i=1}^N m_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^N m_i r_i\times\sum_{k=1}^N m_k\ddot r_k \tag{10}$$

так как $\Sigma_\alpha m_\alpha\rho_\alpha = 0$ в силу выбора связанной системы координат и $\ddot R_0\,\Sigma_\alpha m_\alpha + \Sigma_k m_k\ddot r_k = 0$ в силу равенства нулю главного вектора действующих на конструкцию сил. Продифференцируем, используя соотношение (2), выражение (7) и подставим в (6):

$$\frac{dK}{dt} = J\circ\dot\omega + \omega\times J\circ\omega + \sum_{i=1}^N m_i[r_i\times(\dot\omega\times\rho_i + \omega\times\dot\rho_i + \ddot r_i) + \rho_i\times\ddot r_i] =$$

$$= J\circ\dot\omega + \omega\times J\circ\omega + \sum_{i=1}^N m_i[(r_i + \rho_i)\times\ddot r_i + r_i\times(\omega\times\rho_i)^\bullet] = M + M_1 + M_2 \tag{11}$$

$$\ddot r_i = r_i'' + 2(\omega\times r_i') + \omega\times(\omega\times r_i) + \dot\omega\times r_i,\quad \dot\rho_i = \omega\times\rho_i$$

Примем следующие допущения о порядке малости входящих в соотношения (11) величин:

$$r_i \ll \rho_i,\ \omega r_i',\ \omega^2 r_i,\quad \dot\omega r_i \ll r_i'',\ \dot\omega\rho_i \sim r_i' \tag{12}$$

Эти допущения согласуются с предположением о малости колебаний и выполнены, например, для двигающихся по эллиптическим орбитам конструкций типа космических антенн, ориентация которых относительно заданного направления обеспечивается релейными реактивными двигателями. Окончательно с учетом (12) имеем $|M_2| \ll |M|$ и

$$\ddot{R}_0 = -\left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \sum_{k=1}^{N} m_k r_k'' \tag{13}$$

$$(A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq)_j = Q_j \tag{14}$$

$$\begin{aligned} Q_j &= -\sum_{s=1}^{N} (H_{sj} m_s, \ddot{R}_0 + \dot{\omega} \times \rho_s) = \\ &= \left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{s,i=1}^{N} (H_{sj}, H_{ik}) m_s m_i\right) \ddot{q}_k + \sum_{s=1}^{N} (H_{sj} m_s, \rho_s \times \dot{\omega}) \end{aligned} \tag{15}$$

$$J \circ \dot{\omega} + \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i \times r_i'' = M + M_1 \tag{16}$$

Наличие второго слагаемого в левой части уравнения (16) обусловлено воздействием упругих элементов конструкции на ее движение как жесткое тело. Оценим величину этого воздействия. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ – произвольный вектор. Обозначим

$$\breve{a} = \begin{Vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad J = \begin{Vmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{Vmatrix}$$

и преобразуем соотношения (13)–(16), записанные в проекциях на оси связанной системы координат. Выразим $\dot{\omega}$ из (16):

$$\dot{\omega} = J^{-1}\left(-\sum_{i=1}^{N} m_i \breve{\rho}_i \sum_{i=1}^{n} H_{ik} \ddot{q}_k + M + M_1\right)$$

и подставим в (15)

$$\begin{aligned} Q_j &= \left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{s,i=1}^{N} (H_{sj}, H_{ik}) m_s m_i\right) \ddot{q}_k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{N} m_s H_{sj}^T \breve{\rho}_s^T\right) J^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \breve{\rho}_i H_{ik}\right) \ddot{q}_k - \sum_{s=1}^{N} m_s H_{sj}^T \breve{\rho}_s^T J^{-1} (M + M_1) \end{aligned}$$

Перенося слагаемые, содержащие $\ddot{q}_k$, в левую часть уравнения (14), получим

$$\begin{aligned} (D\ddot{q} + B\dot{q} + Cq)_j &= -G_j(M + M_1) \\ G_j &= \sum_{s=1}^{N} m_s H_{sj}^T \breve{\rho}_s^T J^{-1} \end{aligned} \tag{17}$$

где матрица D имеет компоненты

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k(H_{ki}, H_{kj}) - \left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \sum_{s,k=1}^{N} m_s m_k (H_{si}, H_{kj}) - \left(\sum_{s=1}^{N} m_s H_{si}^T \breve{\rho}_s^T\right) J^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \breve{\rho}_k H_{kj}\right)$$

Утверждение. Матрица D симметрична и положительно определена. Симметрия матрицы D следует из ее определения. Для доказательства положительной определенности достаточно проверить, что

$$\sum_{k=1}^{N} m_k (r_k'')^2 \geq \left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \sum_{s,k=1}^{N} m_s m_k (r_s'', r_k'') + \sum_{s=1}^{N} m_s r_s''^T \breve{\rho}_s^T J^{-1} \sum_{k=1}^{N} m_k \breve{\rho}_k r_k'' \tag{18}$$

при всевозможных векторах $r_k'' = \Sigma_i H_{ki} q_i''$ $(i = 1, 2\ldots N)$. Причем нестрогое неравенство обращается в равенство только при $r_k'' = 0$ для всех k. Рассмотрим следующую квадратичную относительно $q_1'', q_2'', \ldots, q_n''$ форму:

$$L(q_1'', q_2'', \ldots, q_n'') = \sum_{\alpha} m_\alpha (R'' - \breve{\rho}_\alpha \dot{\omega} + r_\alpha'')^2 \geq 0 \tag{19}$$

$$R'' = -\left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \sum_{s=1}^{N} m_s r_s'', \quad \dot{\omega} = -J^{-1} \sum_{i=1}^{N} m_i \breve{\rho}_i r_i'' \tag{20}$$

После преобразований с учетом введенных обозначений и равенства $\Sigma_\alpha m_\alpha \rho_\alpha = 0$ получим

$$L(q_1'', q_2'', \ldots, q_n'') = -\left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i''\right)^2 -$$

$$- \sum_{s=1}^{N} m_s r_s'' \breve{\rho}_s^T J^{-1} \sum_{k=1}^{N} m_k \breve{\rho}_k r_k'' + \sum_{i=1}^{N} m_i (r_i'')^2$$

Таким образом неравенства (18) и (19) при обозначениях (20) эквивалентны, что доказывает неотрицательную определенность матрицы D (17). Для доказательства положительной определенности заметим, что знак равенства в (19) возможен, только если при всех α:

$$R'' - \breve{\rho}_\alpha \dot{\omega} + r_\alpha'' = 0 \tag{21}$$

Для точек, относящихся к твердому телу P, выполнено $r_\alpha \equiv 0$, и, следовательно, для этих точек после замены R'' и $\dot{\omega}$ на их значения (20) имеем

$$\breve{\rho}_\alpha J^{-1} \sum_{i=1}^{N} m_i \breve{\rho}_i r_i'' = \left(\sum_{\alpha} m_\alpha\right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i''$$

Это равенство должно быть выполнено при произвольных ρ_α, относящихся к твердому телу, что возможно только при условии

$$\sum_{i=1}^{N} m_i r_i'' = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \breve{\rho}_i r_i'' = 0$$

Поэтому согласно (20) $R'' = 0$ и $\dot{\omega} = 0$, и из соотношения (21) следует $r_i'' = 0$ при всех i. Положительная определенность матрицы D (17) доказана.

Пусть характеристическое уравнение системы (17) $\det(\lambda^2 D + \lambda B + C) = 0$ имеет n пар комплексно сопряженных корней. Решение уравнения (17) на участке (t_0, t_1) постоянства управления имеет вид

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \exp(\lambda_i(t-t_0)) + \bar{\alpha}_i \bar{\xi}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t-t_0)) - C^{-1}G(M+M_1) \tag{22}$$

Черта над символом означает его комплексно сопряженное значение, α_i – неопределенные коэффициенты, которые следует искать либо из начальных условий, либо из условий непрерывности обобщенных координат и скоростей в момент переключения управления $M(t)$ (8), (9). Собственный вектор ξ_i удовлетворяет уравнению $(\lambda_i^2 D + \lambda_i B + C)\xi_i = 0$ или $d_i\lambda_i^2 + b_i\lambda_i + c_i = 0$, где $d_i = (D\xi_i, \bar{\xi}_i)$, $b_i = (B\xi_i, \bar{\xi}_i)$, $c_i = (C\xi_i, \bar{\xi}_i)$ – действительные положительные коэффициенты. Отсюда следует: $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ при всех i. Предположим, что в момент t_1 одна из компонент M_ζ ($\zeta = x, y, z$) (8) вектора управления M поменяла свое значение с $M_\zeta(t_1 - 0) = M_\zeta^0$ на $M_\zeta(t_1 + 0) = -M_\zeta^0$. Обозначим соответствующее изменение вектора управления через $\Delta M(t_1) = M(t_1 + 0) - M(t_1 - 0)$. Пусть β_i – соответствующие коэффициенты при экспоненциальных функциях в представлении (22) после переключения управления. Для их определения воспользуемся условиями "сшивки" решений в момент переключения

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \exp(\lambda_i(t_1-t_0)) + \bar{\alpha}_i \bar{\xi}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t_1-t_0)) + \\ + C^{-1}G\Delta M(t_1) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \xi_i + \bar{\beta}_i \bar{\xi}_i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \xi_i \exp(\lambda_i(t_1-t_0)) + \bar{\lambda}_i \bar{\alpha}_i \bar{\xi}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t_1-t_0)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i \xi_i + \bar{\lambda}_i \bar{\beta}_i \bar{\xi}_i\end{gathered} \tag{23}$$

Будем искать коэффициенты β_i, $\bar{\beta}_i$ в виде

$$\beta_i = \alpha_i \exp(\lambda_i(t_1-t_0)) + \gamma_i, \quad \bar{\beta}_i = \bar{\alpha}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t_1-t_0)) + \bar{\gamma}_i \tag{24}$$

Подставим эти коэффициенты в условия "сшивки" (23). После упрощений получим линейную систему $2n$ уравнений для $2n$ неизвестных $\gamma_i = \gamma_i(\Delta M(t_1))$, $\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i(\Delta M(t_1))$:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \xi_i + \bar{\gamma}_i \bar{\xi}_i = C^{-1}G\Delta M(t_1), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i \xi_i + \bar{\lambda}_i \bar{\gamma}_i \bar{\xi}_i = 0$$

Следовательно, γ_i от α_j не зависят и определяются только вектором $C^{-1}G\Delta M$. На участке $[t_0, t_1]$ постоянства управления в качестве критерия интенсивности k-й моды колебаний примем величину $|\beta_k|$ (24):

$$\begin{aligned}|\beta_k| &= |\alpha_k \exp\mathrm{Re}(\lambda_k(t_1-t_0)) + \gamma_k(\Delta M(t_1))| \le \\ &\le |\alpha_k| \exp(\mathrm{Re}\lambda_k(t_1-t_0)) + |\gamma_k(\Delta M(t_1))|\end{aligned} \tag{25}$$

Максимум достигается при $\arg\alpha_k + \arg\exp(\lambda_k(t_1 - t_0)) = \arg\gamma_k$. Моменты t_i переключения управления определяются только фазовым состоянием тела P. При формировании управления с бесконечным числом переключений на бесконечном интервале стабилизации при неизвестном кинематическом состоянии системы материальных точек управляющая сторона не застрахована против реализации любой (в том числе и доставляющей максимум в (25)) фазы в момент переключения. Поэтому при игровом подходе управляющая сторона должна считать оценку (25) достижимой. Допустим теперь, что в три последовательных момента t_i ($i = 1, 2, 3$) произошли изменения управления на величины $\Delta M_\zeta = \Delta M(t_i)$ последовательно в каждом из трех каналов $\zeta = x, y, z$ соответственно. Трижды используя формулу (25) приходим к следующей оценке интенсивности k-ой моды колебаний после третьего переключения:

$$|\beta_k| \le |\alpha_k|\exp(\mathrm{Re}\lambda_k(t_3 - t_0)) + \sum_{i=1}^{3}|\gamma_k(\Delta M(t_i))|\exp(\mathrm{Re}\lambda_k(t_3 - t_i)) \le$$

$$\le |\alpha_k|\exp(\mathrm{Re}\lambda_k(t_3 - t_0)) + \sum_{\zeta = x, y, z}|\gamma_k(\Delta M_\zeta)|$$

Допустим теперь, что продолжительность каждого участка постоянства управления на каждом из трех каналов не меньше Δt, где $\Delta t \ge \Delta t_D$. В качестве t_0 может быть принят любой момент переключения управления. Следовательно, после достаточного большого числа переключений все значения $|\beta_k|$ не будут превосходить β_k^*, где β_k^* удовлетворяет уравнению

$$\beta_k^* = \beta_k^*\exp(\mathrm{Re}\lambda_k\Delta t) + \sum_{\zeta = x, y, z}|\gamma_k(\Delta M_\zeta)|$$

Отсюда будем иметь

$$\beta_k^* = \sum_{\zeta = x, y, z}|\gamma_k(\Delta M_\zeta)|(1 - \exp(\mathrm{Re}\lambda_k\Delta t))^{-1} \tag{26}$$

Примем в качестве установившейся амплитуды колебаний конструкции на бесконечном периоде стабилизации величину

$$A_m = \frac{1}{2}[\overline{\lim}_{t\to\infty}(l, q(t)) - \underline{\lim}_{t\to\infty}(l, q(t))]$$

Здесь l – заданный вектор, черта сверху и снизу означает верхний и нижний пределы соответственно. Подставляя в это соотношение $q(t)$ (22), где коэффициенты α_i и t_0 заменим на β_i и t_1, и используя формулу (26), получим гарантированную оценку амплитуды относительных колебаний системы материальных точек под действием сил инерции

$$A_m \le 2\sum_{k=1}^{n}|(l, \xi_k)|\beta_k^* + \max_M|(l, C^{-1}GM)|, \quad M = (\pm M_x^0, \pm M_y^0, \pm M_z^0)^T$$

С увеличением времени запаздывания Δt величина оценки, как и следовало ожидать, уменьшается. Оценим теперь величину проекции M_e вектора $\Sigma m_i\rho_i \times r_i''$ (14) на оси связанной системы координат

$$M_e = \left|\left(e, \sum_{i=1}^{N} m_i\rho_i \times r_i''\right)\right| = |(H, \ddot{q})| \tag{27}$$

где e – один из ортов связанной системы и вектор $H \in R^n$ имеет компоненты $H_s = (e, \Sigma m_i \rho_i \times H_{is})$. Продифференцируем дважды $q(t)$ (22) и подставим результат в (27), используя оценку (26):

$$M_e = \left| \sum_i \lambda_i^2 \alpha_i(H, \xi_i) + \bar{\lambda}_i^2 \bar{\alpha}_i(H, \bar{\xi}_i) \right| \le 2 \sum_i |\lambda_i|^2 |(H, \xi_i)| \beta_i^*$$

Подставляя в это соотношение значение β_i^* (26), получим гарантированную оценку влияния упругих элементов конструкции на ее движение при периодическом переключении управления

$$M_e \le 2 \sum_i |\lambda_i|^2 |(H, \xi_i)| \sum_{\zeta = x, y, z} |\gamma_i(\Delta M_\zeta)| (1 - \exp(\mathrm{Re}\lambda_i \Delta t))^{-1}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. *Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г.* Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 402 с.
5. *Гаушус Э.В., Смольянинов Н.Д.* Исследование релейной системы стабилизации летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 5–13.
6. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. 368 с.
7. *Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др.* Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997. 302 с.
8. *Иванова В.Ф., Соколов Б.Н.* Максимальная гарантированная точность релейного регулятора в одномерной задаче стабилизации // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 26–36.
9. *Соколов Б.Н.* О структуре максимально экономичного одноканального релейного регулятора гарантированной точности // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 17–33.
10. *Соколов Б.Н.* Одноканальный релейный регулятор в задаче гарантированной стабилизации поступательных движений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 10–16.
11. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.

Москва

Поступила в редакцию
14.05.2003