

УДК 531.36

© 2005 г. В.Н. КОШЛЯКОВ, В.А. СТОРОЖЕНКО

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТЕРЖНЕ

Исследование влияния сил сопротивления на динамику механических систем является весьма актуальной задачей. Часто эту задачу усложняет то обстоятельство, что учет сил сопротивления приводит к появлению в уравнениях возмущенного движения не только диссипативных членов, содержащих обобщенные скорости, но и так называемых неконсервативных позиционных сил. Наличие последних создает определенные трудности в силу недостаточного еще развития методов исследования подобных систем. Эта проблема рассматривалась в [1, 2] для механических систем с двумя степенями свободы. В [3–6] для систем, описываемых уравнениями общего вида n -го порядка решалась задача о приведении уравнений к виду, удобному для применения известных теорем Томпсона–Тэта–Четаева [7]. Методы исследования, применяемые в этих работах, оказались особенно эффективными при рассмотрении динамики симметричных механических систем¹, в частности устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на стержне (струне).

1. Предметом исследования в работах [4–6] было матричное уравнение типа

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{z}} + (\mathbf{D} + H\mathbf{G})\mathbf{z} + (\mathbf{\Pi} + \mathbf{P})\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \quad (1.1)$$

где $\mathbf{z} = \text{col}(z_1, \dots, z_{2n})$ – искомый вектор; $\mathbf{J} = \mathbf{J}^T$ (индекс T означает операцию транспонирования) – матрица, характеризующая инерционные свойства системы; $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$, $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T$, $\mathbf{P} = -\mathbf{P}^T$ – матрицы соответственно диссипативных, гироскопических, потенциальных и неконсервативных позиционных сил. Все матрицы полагаются постоянными и имеющими размерность $2n \times 2n$; $\mathbf{Z}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ – $2n$ -мерный вектор-столбец, содержащий компоненты векторов \mathbf{z} и $\dot{\mathbf{z}}$ в степенях выше первой; $H > 0$ – некоторый скалярный параметр.

В [4–6] показано, что с помощью подстановок

$$\mathbf{z} = \mathbf{L}\boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{D}\dot{\mathbf{L}} + \mathbf{P}\mathbf{L} = 0 \quad (1.2)$$

приводящих к уравнению относительно нового вектора $\boldsymbol{\zeta}$, осуществляется исключение из уравнения (1.1) неконсервативных позиционных структур с матрицей \mathbf{P} .

Для определенного класса механических систем входящие в уравнение (1.1) матрицы могут иметь следующую блочную структуру:

¹ См.: Кошляков В.Н., Стороженко В.А. К исследованию влияния диссипации в симметричных системах связанных твердых тел. Препринт 2003.3. Киев: Ин-т математики НАНУ, 2003. 35 с.

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{G}_1 \\ -\mathbf{G}_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{vmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Pi}_1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{P}_1 \\ -\mathbf{P}_1 & 0 \end{vmatrix}$$

При этом все матрицы \mathbf{J}_1 , \mathbf{D}_1 , \mathbf{G}_1 , $\mathbf{\Pi}_1$, \mathbf{P}_1 , входящие в виде блоков в состав первоначальных матриц, полагаются симметричными и имеющими размерность $n \times n$. В этом случае матричное уравнение (1.1) можно представить в виде системы двух матричных уравнений:

$$\mathbf{J}_1 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}\mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{x} + \mathbf{P}_1 \mathbf{y} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{J}_1 \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{H}\mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{y} - \mathbf{P}_1 \mathbf{x} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}})$$

где $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = \text{col}(y_1, \dots, y_n)$ – новые искомые векторы.

К системе вида (1.4) приводятся, например, уравнения в возмущениях вращательного движения вокруг вертикали системы последовательно соединенных осесимметричных твердых тел (гироскопов Лагранжа), движения осесимметричного тела на струне и т.д. при учете внешнего и внутреннего трений.

Вводя в рассмотрение комплекснозначный вектор

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \quad (1.5)$$

и опуская находящиеся в правых частях уравнений (1.4) члены порядка выше первого относительно компонент векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} , эти уравнения можно привести к виду

$$\mathbf{J}_1 \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{w}} - i\mathbf{H}\mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{w} - i\mathbf{P}_1 \mathbf{w} = 0 \quad (1.6)$$

В полученном матричном уравнении члены, соответствующие гироскопическим и неконсервативным позиционным силам, содержат в качестве множителя мнимую единицу, однако весьма существенным является то, что матрицы этих сил \mathbf{G}_1 и \mathbf{P}_1 при таком преобразовании уже не являются кососимметричными, как в исходном уравнении (1.1), но, так же как и остальные содержащиеся в этом уравнении матрицы, имеют симметричную структуру. Это обстоятельство в ряде случаев упрощает исследование. Заметим также, что порядок уравнения (1.6) в два раза ниже, чем в исходном. В этом уравнении можно осуществить предложенное в [4–6] преобразование

$$\mathbf{w} = \mathbf{L}\xi \quad (1.7)$$

где матрица \mathbf{L} удовлетворяет условию

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{L} - i\mathbf{P}_1 \mathbf{L} = 0 \quad (1.8)$$

Последнее условие можно представить в виде матричного уравнения

$$\mathbf{L} = i\mathbf{A}\mathbf{L} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{P}_1 \text{ при } \det \mathbf{D}_1 \neq 0) \quad (1.9)$$

решение которого в силу предположенного постоянства матриц \mathbf{D}_1 и \mathbf{P}_1 будет

$$\mathbf{L} = \exp(i\mathbf{A}t)\mathbf{L}(0) = (\cos \mathbf{A}t + i\sin \mathbf{A}t)\mathbf{L}(0) \quad (1.10)$$

где $\mathbf{L}(0)$ соответствует начальному отсчету времени. Не уменьшая общности, можно принять $\mathbf{L}(0) = \mathbf{E}^{(n)}$ ($\mathbf{E}^{(n)}$ – единичная матрица размерности $n \times n$). В результате под-

становки вместо исходного уравнения (1.6) получаем матричное уравнение относительно нового вектора ξ :

$$\ddot{\xi} + L^{-1}J_1^{-1}D_1L\dot{\xi} - iL^{-1}VL\dot{\xi} + L^{-1}UL\xi = 0 \quad (1.11)$$

Здесь

$$V = HJ_1^{-1}G_1 - 2A, \quad U = J_1^{-1}(\Pi + HG_1A) - A^2 \quad (1.12)$$

Полученное в результате замены переменных уравнение (1.11) в отличие от исходного уравнения (1.1) не содержит члена, соответствующего неконсервативным позиционным силам. В общем случае матричные коэффициенты уравнения (1.11) являются переменными функциями времени, однако ввиду вещественности матриц P_1 и D_1 вещественной будет и матрица A . Поэтому элементы матрицы преобразования L , определяемой формулой (1.10) представляют собой периодические функции времени.

Рассмотрим частный случай, когда матрицы P_1 и D_1 связаны соотношением

$$P_1 = \Omega D_1 \quad (1.13)$$

где Ω – некоторая скалярная константа. Тогда, согласно (1.9) и (1.10), получим

$$A = \Omega D_1^{-1}D_1 = \Omega E^{(n)} \quad (1.14)$$

и далее

$$L = \exp(i\Omega E^{(n)})E^{(n)} = \exp(i\Omega)E^{(n)} \quad (1.15)$$

Уравнение (1.11) в этом случае будет иметь вид

$$\ddot{\xi} + J_1^{-1}D_1\dot{\xi} - i(HJ_1^{-1}G_1 - 2\Omega E^{(n)})\dot{\xi} + (J_1^{-1}(\Pi - \Omega HG_1) - \Omega^2 E^{(n)})\xi = 0 \quad (1.16)$$

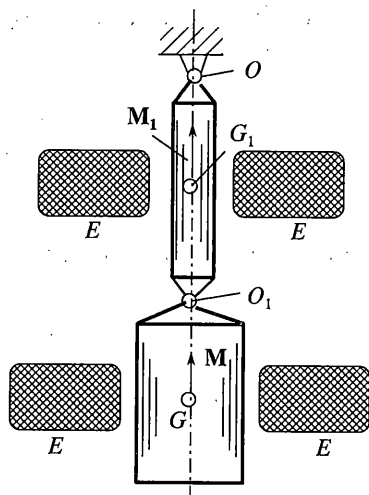
Умножая уравнение (1.16) слева на матрицу J_1 , приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$J_1\ddot{\xi} + D_1\dot{\xi} - i(HG_1 - 2\Omega J_1)\dot{\xi} + (\Pi + \Omega HG_1 - \Omega^2 J_1)\xi = 0 \quad (1.17)$$

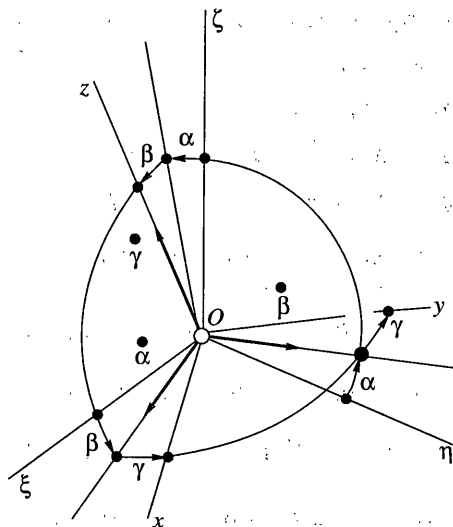
к исследованию которого применимы теоремы Томсона–Тета–Четаева.

Соотношение (1.13) выполняется, например, при рассмотрении вращения с одной и той же угловой скоростью ω системы последовательно соединенных гироскопов Лагранжа, если в качестве опорной выбрана неподвижная система координат и изучается влияние сил внутренней диссипации. Тогда константа Ω равна угловой скорости ω , а матрица преобразования (1.15) описывает переход к вращающейся с угловой скоростью $\Omega = \omega$ системе координат. Известно [8], что при таком переходе неконсервативные члены уравнений, вызванные наличием внутренней диссипации, исчезают. Аналогично, неконсервативные члены от внешней диссипации исчезают при обратном переходе – от вращающейся системы координат к неподвижной. Задача усложняется в случае, когда принимается более сложная модель действующих на систему сил диссипации.

2. Рассмотрим в качестве примера механическую систему, схематически представленную на фиг. 1. Осесимметричное абсолютно твердое тело (весомый стержень) при помощи сферического шарнира подвешено в неподвижной точке O . Ко второму его концу O_1 посредством такого же шарнира присоединено основное осесимметричное тело. Центры шарниров расположены строго на осях динамической симметрии тел, так что в положении статического равновесия точки центры масс тел G , G_1 и точка O_1 расположены на одной вертикали, проведенной через неподвижную точку O . Эта система



Фиг. 1



Фиг. 2

может служить механической моделью высокоскоростной центрифуги, подвешенной на жестком весомере стержне [9]. Будем считать, что на тело, равно как и на стержень, действуют постоянные моменты M и M_1 . Эти моменты направлены вдоль неподвижной вертикали и призваны компенсировать вредное влияние сил сопротивления. Исследуем устойчивость вертикальной формы стационарного движения этой системы.

Текущее положение весомера стержня относительно неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ определим посредством углов Эйлера-Крылова $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (фиг. 2). В свою очередь, аналогичными углами α, β и γ зададим положение тела и жестко связанного с ним трехгранника xuy относительно поступательно перемещающейся системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$ с осями, параллельными соответствующим осям системы $\xi\eta\zeta$.

Уравнения движения будем составлять в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} + M_{q_j} \quad (2.1)$$

где q_j и \dot{q}_j – соответственно обобщенные координаты и скорости механической системы, $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа, Φ – диссипативная функция, M_{q_j} – обобщенные силы по соответствующим координатам, вызванные наличием постоянных вертикальных моментов M и M_1 .

Не останавливаясь на выводе формулы функции Лагранжа L , которую для рассматриваемой системы можно найти в [9], обратимся к диссипативной функции Φ , которую будем рассматривать в следующем виде.

$$\Phi = 1/2(k\omega_x^2 + k\omega_y^2 + \mu\omega_z^2) + 1/2(k_1\omega_{x_1}^2 + k_1\omega_{y_1}^2 + \mu_1\omega_{z_1}^2) \quad (2.2)$$

$$\omega_x = \alpha \cos \beta \cos \gamma + \beta \sin \gamma, \quad \omega_{x_1} = \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \beta_1 \sin \gamma_1$$

$$\omega_y = -\alpha \cos \beta \sin \gamma + \beta \cos \gamma, \quad \omega_{y_1} = -\alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 + \beta_1 \cos \gamma_1 \quad (2.3)$$

$$\omega_z = \alpha \sin \beta + \gamma, \quad \omega_{z_1} = \alpha_1 \sin \beta_1 + \gamma_1$$

где k, k_1, μ, μ_1 – некоторые постоянные величины.

Обобщенные силы M_{q_j} , вызванные наличием постоянных моментов M и M_1 , будут иметь вид

$$\begin{aligned} M_\alpha &= M_{\alpha_1} = 0 \\ M_\beta &= M \sin \alpha, \quad M_{\beta_1} = M_1 \sin \alpha_1 \\ M_\gamma &= M \cos \alpha \cos \beta, \quad M_{\gamma_1} = M_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая эти формулы, придем к следующей совокупности дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{aligned} &A^*(\ddot{\alpha}_1 \cos \beta_1 - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \sin \beta_1) + C_1 \dot{\beta}_1 (\dot{\alpha}_1 \sin \beta_1 + \dot{\gamma}_1) + \\ &+ mal(\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) \cos(\alpha - \alpha_1) - mal[(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \cos \beta + \dot{\beta} \sin \beta] \sin(\alpha - \alpha_1) = \\ &= -(m_1 a_1 + ml)g \sin \alpha_1 \cos \beta_1 - k_1 \dot{\alpha}_1 \cos^2 \beta_1 - \mu_1 \dot{\gamma}_1 \sin \beta_1 \\ &A^0(\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) + C\dot{\beta}(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}) + mal[(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\beta}_1^2) \cos \beta_1 + \dot{\beta}_1 \sin \beta_1] \sin(\alpha - \alpha_1) + \\ &+ mal(\ddot{\alpha}_1 \cos \beta_1 - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \sin \beta_1) \cos(\alpha - \alpha_1) = -mga \sin \alpha \cos \beta - k\dot{\alpha} \cos^2 \beta - \mu\dot{\gamma} \sin \beta \\ &A^*(\ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}_1^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1) - C_1 \dot{\alpha}_1 (\dot{\alpha}_1 \sin \beta_1 + \dot{\gamma}_1) \cos \beta_1 + \\ &+ mal(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta) \cos \beta_1 + mal[(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \cos \beta + \dot{\beta} \sin \beta] \sin \beta_1 \cos(\alpha - \alpha_1) + \\ &+ mal(\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta) \sin \alpha_1 \sin(\alpha - \alpha_1) = \\ &= -(m_1 a_1 + ml)g \cos \alpha_1 \sin \beta_1 - k_1 \dot{\beta}_1 + M_1 \sin \alpha_1 \\ &A^0(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta) - C\dot{\alpha}(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}) \cos \beta + mal\{(\dot{\beta}_1 \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1^2 \sin \beta_1) \cos \beta + \\ &+ [(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\beta}_1^2) \cos \beta_1 + \dot{\beta}_1 \sin \beta_1] \sin \beta \cos(\alpha - \alpha_1) - \\ &- (\dot{\alpha}_1 \cos \beta_1 - 2\dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_1 \sin \beta_1) \sin \beta \sin(\alpha - \alpha_1)\} = -mga \cos \alpha \sin \beta - k\dot{\beta} + M \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} C_1 \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}_1 \sin \beta_1 + \dot{\gamma}_1) &= -\mu_1 \dot{\gamma}_1 + M_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \\ C \frac{d}{dt}(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}) &= -\mu \dot{\gamma} + M \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$A^0 = A + ma^2, \quad A^* = A_1 + m_1 a_1^2 + ml^2, \quad a_1 = l/2$$

где m, m_1 и A, A_1 — массы и экваториальные моменты инерции соответственно тела и стержня; C, C_1 — их осевые моменты инерции; l — длина весомого стержня, a — расстояние между центром масс основного тела и центром сферического шарнира, связывающего его со стержнем.

Система уравнений (2.5) имеет частное решение

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha = \beta = 0, \quad \dot{\gamma}_1 = \omega = M_1/\mu_1, \quad \dot{\gamma} = \omega = M/\mu \quad (2.7)$$

соответствующее вращению системы с постоянной угловой скоростью ω при вертикальном расположении динамических осей симметрии тела и стержня. Линеаризуя

первые четыре уравнения (2.5) в окрестности частного решения (2.7), приходим к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A^* \ddot{\alpha}_1 + C_1 \omega \dot{\beta}_1 + mal \ddot{\alpha} &= -(m_1 a_1 + ml) g \alpha_1 - k_1 \dot{\alpha}_1 - \mu_1 \omega \beta_1 \\ A^0 \ddot{\alpha} + C \omega \dot{\beta} + mal \ddot{\alpha}_1 &= -mga \alpha - k \dot{\alpha} + \mu \omega \beta \\ A^* \ddot{\beta}_1 - C_1 \omega \dot{\alpha}_1 + mal \ddot{\beta} &= -(m_1 a_1 + ml) g \beta_1 - k_1 \dot{\beta}_1 + \mu_1 \omega \alpha_1 \\ A^0 \ddot{\beta} - C \omega \dot{\alpha} + mal \ddot{\beta}_1 &= -mga \beta - k \dot{\beta} - \mu \omega \alpha \end{aligned} \quad (2.8)$$

или в комплекснозначных переменных $w_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $w = \alpha + i\beta$:

$$\begin{aligned} A^* \ddot{w}_1 - iC_1 \omega \dot{w}_1 + mal \ddot{w} + (m_1 a_1 + ml) g w_1 + k_1 \dot{w}_1 + i\mu_1 \omega w_1 &= 0 \\ A^0 \ddot{w} - iC \omega \dot{w} + mal \ddot{w}_1 + mgaw + k \dot{w} + i\mu \omega w &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.9) можно представить в матричной форме, если ввести вектор-столбец $w = \text{col}(w_1, w)$. При этом получим уравнение, полностью совпадающее с уравнением (1.6):

$$J_1 \ddot{w} + D_1 \dot{w} - iHG_1 \dot{w} + \Pi_1 w - iP_1 w = 0 \quad (2.10)$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} A^* & mal \\ mal & A^0 + ma^2 \end{vmatrix}, \quad HG_1 = \omega \begin{vmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

$$\Pi_1 = \begin{vmatrix} (m_1 a_1 + ml)g & 0 \\ 0 & mga \end{vmatrix}, \quad P_1 = \omega \begin{vmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix}$$

Уравнение (2.10) содержит неконсервативный член $-iP_1 w$, для устранения которого воспользуемся приведенным выше преобразованием вида (1.7–1.8). При этом будем считать, что для исследуемой механической системы выполняется равенство (1.13), что возможно, если между коэффициентами диссипации выполняется соотношение

$$\mu_1/k_1 = \mu/k \quad (2.12)$$

В этом случае при помощи преобразования

$$w = \exp(i\Omega t) \xi, \quad (\Omega = \mu_1 \omega/k_1 = \mu \omega/k) \quad (2.13)$$

уравнение (2.10) принимает вид

$$J_1 \ddot{\xi} + D_1 \dot{\xi} - i(\omega G_1 - 2\Omega J_1) \dot{\xi} + (\Pi_1 + \Omega \omega C G_1 - \Omega^2 J_1) \xi = 0 \quad (2.14)$$

Это уравнение описывает движение системы, находящейся под воздействием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил, при этом диссипация является полной. Поэтому вопрос об устойчивости его тривиального решения можно свести к изучению матрицы потенциальных сил, которую с учетом (2.11) можно привести к следующему виду:

$$\Pi = \begin{vmatrix} (m_1 a_1 + ml)g + (C_1^* - A^*)\Omega^2 & -mal\Omega^2 \\ -mal\Omega^2 & mga + (C^* - A^0)\Omega^2 \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

где C_1^* и C^* – приведенные осевые моменты соответственно стержня и основного тела

$$C_1^* = C_1 k_1 / \mu_1, \quad C^* = Ck / \mu \quad (2.16)$$

Из предварительного анализа матрицы Π можно заключить, что составляющие $\Omega^2(C_1^* - A^*)$ и $\Omega^2(C^* - A^0)$ элементов, расположенных на главной диагонали этой матрицы, представляют собой восстанавливающие моменты при $C_1^* > A^*$ и $C^* > A^0$, но эти же моменты являются опрокидывающими при $C_1^* < A^*$ и $C^* < A^0$.

Изучаемое движение будет асимптотически устойчивым в случае, когда матрица (2.15) будет положительно определенной. А это будет при выполнении следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} & (C_1^* - A^*)\Omega^2 + (m_1 a_1 + ml)g > 0 \\ & [(C_1^* - A^*)(C^* - A^0) - m^2 a^2 l^2]\Omega^4 + g[(C_1^* - A^*)ma + \\ & + (C^* - A^0)(m_1 a_1 + ml)]\Omega^2 + mg^2 a(m_1 a_1 + ml) > 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. В общем случае выполнение условий устойчивости (2.17) зависит от соотношений между динамическими характеристиками составляющих данную систему твердых тел, а также между коэффициентами диссипации k_j, μ_j ($j = 1, 2$). Рассмотрим более подробно случай, когда стержень достаточно тонкий, его масса мала, и ею можно пренебречь. Оправдано при этом будет и пренебрежение действующими на стержень силами диссипации по сравнению с силами сопротивления, действующими на основное тело. В результате будем рассматривать задачу об устойчивости осесимметричного твердого тела, подвешенного на невесомом стержне в постановке, предложенной в работе [12]. Полагая $m_1 = 0, A_1 = C_1 = 0, k_1 = \mu_1 = 0$ и оставляя остальные обозначения прежними, придем к следующей системе уравнений возмущенного движения, в комплекснозначных переменных: $w_1 = \alpha_1 + i\beta_1, w = \alpha + i\beta$:

$$\begin{aligned} & ml(l\dot{w}_1 + a\ddot{w}) + mglw_1 = 0 \\ & (A + ma^2)\ddot{w} + mal\dot{w}_1 + k\dot{w} - iC\omega\dot{w} + mgaw - i\mu\omega w = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

С точностью до обозначений эти уравнения полностью совпадают с уравнениями возмущенного движения, полученными в [12]. В отличие от уравнений (2.9) система (3.1) содержит диссипативный член лишь во втором уравнении, соответствующая функция Рэля имеет вид $\Phi = k/2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$ и не является положительно определенной формой всех обобщенных скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1$, тем не менее конструкция уравнений такова, что диссипация является полной и в этом случае [12]. Действительно, для этого достаточно доказать, что если функция Рэля Φ обращается в нуль, то будут равны нулю все обобщенные скорости $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1$. Обратное утверждение здесь очевидно. Вычитая из второго уравнения (3.1) первое, умноженное на l/a , получим

$$A\ddot{w} + k\dot{w} - iC\omega\dot{w} + mgaw + mgaw_1 - i\mu\omega w = 0 \quad (3.2)$$

Положив в последнем уравнении $\dot{w} = 0$ ($\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$), что равносильно $w = \text{const}$, получим $w_1 = \text{const}$, т.е. $\dot{w}_1 = \dot{\alpha}_1 + i\dot{\beta}_1 = 0$. Таким образом, диссипативные силы исчезают тогда и только тогда, когда все обобщенные скорости обращаются в нуль, а это и означает, что диссипация является полной.

Уравнения (3.1) также можно представить в матричной форме, если ввести вектор-столбец $w = \text{col}(w_1, w)$. При этом получим уравнение, совпадающее по структуре с уравнением (2.9), однако его матричные коэффициенты будут другими, а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \begin{vmatrix} ml^2 & mal \\ mal & A + ma^2 \end{vmatrix}, & H\mathbf{G}_1 &= C\omega \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, & \mathbf{D}_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \\ \mathbf{P}_1 &= \begin{vmatrix} mgl & 0 \\ 0 & mga \end{vmatrix}, & \mathbf{P}_l &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu\omega \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Матрицы \mathbf{D}_1 и \mathbf{P}_1 оказываются особенными ($\det \mathbf{D}_1 = \det \mathbf{P}_1 = 0$), поэтому преобразование непосредственно в виде (1.7)–(1.9) здесь недопустимо. Заметим, прежде всего, что эти матрицы принадлежат к следующему виду диагональных блочных матриц:

$$\mathbf{D}_1 = \text{diag}\{\mathbf{0}_m, \mathbf{D}_2\}, \quad \mathbf{P}_1 = \text{diag}\{\mathbf{0}_m, \mathbf{P}_2\} \quad (3.4)$$

где $\mathbf{0}_m$ – нулевая матрица размерности $m \times m$, $\mathbf{D}_2, \mathbf{P}_2$ – матрицы с одинаковой размерностью $(n - m) \times (n - m)$; причем $\det \mathbf{D}_2 \neq 0$.

В этом случае для устранения неконсервативных позиционных членов в уравнении (1.6) следует вначале найти блок матрицы преобразования \mathbf{L} , соответствующий по размерности блокам \mathbf{D}_2 и \mathbf{P}_2 . Имеем

$$w_2 = \mathbf{L}_2 \xi_2, \quad (w_2 = \text{col}(w_{n-m}, \dots, w_n), \xi_2 = \text{col}(\xi_{n-m}, \dots, \xi_n)) \quad (3.5)$$

Матрица \mathbf{L}_2 удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{L}}_2 - i\mathbf{P}_2 \mathbf{L}_2 = 0 \quad (3.6)$$

Тогда получим

$$\mathbf{L}_2 = \exp(i\mathbf{A}_2 t) \quad (\mathbf{A}_2 = \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{P}_2) \quad (3.7)$$

Найденную матрицу \mathbf{L}_2 следует дополнить некоторой другой матрицей \mathbf{L}_1 размерности $m \times m$, подобранной таким образом, чтобы полное преобразование системы с матрицей $\mathbf{L} = \text{diag}\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2\}$ не привело к появлению в уравнениях новых неконсервативных позиционных членов. В частности, если положить $\mathbf{L}_1 = \mathbf{E}^{(m)}$, то такое преобразование сохраняет координаты w_1, \dots, w_m в прежнем виде. При этом вновь полученная система будет иметь периодические во времени коэффициенты.

В случае, когда имеет место равенство $\mathbf{P}_2 = \Omega \mathbf{D}_2$, и, следовательно, $\mathbf{L}_2 = \exp(i\Omega \mathbf{E}^{(n-m)})$, удобно положить и $\mathbf{L}_1 = \exp(i\Omega \mathbf{E}^{(m)})$, т.е. осуществить группу вращений с одной и той же угловой скоростью Ω по всем координатам. В результате вновь придем к уравнению с постоянными коэффициентами типа (1.17).

В рассматриваемой задаче $\mathbf{D}_2 = k$, $\mathbf{P}_2 = \mu\omega$. Следовательно, при помощи преобразования

$$w = \exp(i\Omega t) \xi \quad (\Omega = \mu\omega/k) \quad (3.8)$$

уравнение (2.9) принимает вид

$$\mathbf{J}_1 \ddot{\xi} + \mathbf{D}_1 \dot{\xi} - i(\omega \mathbf{G}_1 - 2\Omega \mathbf{J}_1) \dot{\xi} + (\mathbf{P}_1 + \Omega \omega C \mathbf{G}_1 - \Omega^2 \mathbf{J}_1) \xi = 0 \quad (3.9)$$

Это уравнение описывает движение системы, находящейся под воздействием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил. При этом, как выше было показана

но, диссипация является полной. Поэтому вопрос об устойчивости его тривиального решения можно свести к изучению матрицы потенциальных сил, которую с учетом (3.3) можно привести к следующему виду:

$$\Pi = \begin{vmatrix} mgl - ml^2\Omega^2 & -mal\Omega^2 \\ -mal\Omega^2 & mga + \Omega^2(C_* - A - ma^2) \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

$$C_* = Ck/\mu \quad (3.11)$$

Составляющая $\Omega^2(C_* - A - ma^2)$ главного элемента p_{22} этой матрицы представляет собой восстанавливающий момент при $C_* > A + ma^2$ и опрокидывающий при $C_* < A + ma^2$.

Изучаемое движение будет асимптотически устойчивым в случае, когда матрица (3.10) будет положительно определенной. А это будет иметь место при выполнении следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} \Omega^2 < v^2 &= gl \\ Q(\Omega^2) &= -\Omega^4(C_* - A) + \Omega^2 v^2(C_* - A - ma^2 - mal) + \chi v^4 > 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

В случае $a = 0$, когда точка крепления тела к струне находится строго в его центре масс, второе неравенство (3.12) преобразуется к виду

$$\Omega^2(C_* - A)(v^2 - \Omega^2) > 0 \quad (3.13)$$

Отсюда с учетом первого из неравенств (3.12) получаем следующее условие устойчивости:

$$C_* = Ck/\mu > A \quad (3.14)$$

т.е., движение устойчиво, когда приведенный осевой момент инерции гироскопа C_* превышает его экваториальный момент инерции A . Этот результат согласуется с известными работами по исследованию движения гироскопов в сопротивляющейся среде. Первый результат здесь получен, видимо, в [10, 11].

В общем же случае ($a \neq 0$) выполнение условий (3.12) существенно зависит от соотношений между величиной $\Omega_1^2 = v^2$ и двумя корнями полинома Q

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{v^2}{2\chi q} [1 + \chi(1 - q) \pm \sqrt{[1 + \chi(1 - q)]^2 + 4\chi q}] \quad (3.15)$$

$$\chi = all, \quad q = (C_* - A)/ma^2 \quad (3.16)$$

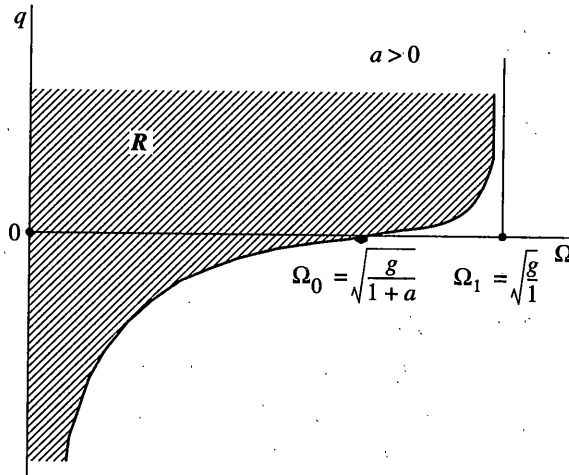
Элементарный анализ приводит к следующим результатам при возможных вариантах соотношений между параметрами тела:

3.1. Центр масс тела находится ниже точки крепления его к стержню, и поперечный момент инерции тела A превышает его приведенный осевой момент C_* : $\chi > 0$ ($a > 0$); $q < 0$ ($A > C_*$). В этом случае

$$0 < \Omega_-^2 < \Omega_1^2 < \Omega_+^2 \quad (3.17)$$

$$Q > 0 \quad \text{при} \quad \Omega^2 \in (0, \Omega_-^2) \cup (\Omega_+^2, \infty) \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что областью устойчивости в этом случае будет $\Omega^2 \in [0, \Omega_-^2)$ или, что то же, $\omega \in [0, k\Omega_-/\mu)$.



Фиг. 3

3.2. Центр масс тела по-прежнему находится ниже точки крепления его к стержню, но поперечный момент инерции тела меньше его приведенного осевого момента: $\chi > 0$ ($a > 0$); $q > 0$ ($A < C_*$). Тогда имеет место

$$\Omega_+^2 < 0 < \Omega_-^2 < \Omega_1^2 \quad (3.19)$$

$$Q > 0 \text{ при } \Omega^2 \in (\Omega_+^2, \Omega_-^2) \quad (3.20)$$

Вновь получаем область устойчивости $\Omega^2 \in [0, \Omega_-^2)$ или $\omega \in [0, k\Omega_-/\mu)$.

Характер изменения интервала устойчивости тела в зависимости от параметра $q = (C_* - A)/ma^2$ для положительных значений a показан на фиг. 3. При $q = 0$ ($A = C_*$) интервал устойчивости будет

$$\Omega^2 < \Omega_0^2 = \lim_{q \rightarrow 0} \Omega_-^2 = v^2 \frac{\chi}{1 + \chi} = \frac{g}{l + a} \quad (3.21)$$

и соответственно

$$\omega < \omega^0 = \frac{k}{\mu} \Omega^0 = \frac{k}{\mu} \sqrt{\frac{g}{l + a}} \quad (3.22)$$

3.3. При $q < 0$ ($A > C_*$) граничное значение $\omega^0 = k\Omega^0/\mu$ уменьшается и стремится к нулю при неограниченном уменьшении $q = (C_* - A)/ma^2$ (фиг. 3). При $q > 0$ ($A < C_*$) эта граница, напротив, возрастает и в пределе (при $q \rightarrow \infty$) достигает значения $\omega^0 = k\Omega^0/\mu = k\sqrt{g/l}/\mu$. Изложенное согласуется со сделанным ранее замечанием по поводу влияния знака величины $q = (A - C_*)/ma^2$ на матрицу потенциальных сил Π .

3.4. Центр масс тела находится выше точки крепления его к стержню, и поперечный момент инерции тела больше его приведенного осевого момента: $\chi < 0$ ($a < 0$); $q > 0$ ($A > C_*$). Тогда имеет место

$$\Omega_+^2 < 0 < \Omega_1^2 < \Omega_-^2 \quad (3.23)$$

и

$$Q > 0 \quad \text{при} \quad \Omega^2 \in (-\infty, \Omega_+^2) \cup (\Omega_-^2, \infty) \quad (3.24)$$

В этом случае движение неустойчиво при любом $\omega \in (0, \infty)$.

3.5. Центр масс тела находится выше точки крепления его к стержню, а приведенный осевой момент инерции превышает поперечный момент: $\chi < 0$ ($a < 0$); $q > 0$ ($A < C_*$). В этом случае возможны два варианта. Если выполняется неравенство

$$1 + \chi(1 - q) < 2\sqrt{-\chi q} \quad (3.25)$$

или, что то же,

$$C_* - A + ma(l - a) < 2\sqrt{(C_* - A)mal} \quad (3.26)$$

то полином Q всегда отрицателен, и вновь движение оказывается неустойчивым при любом $\omega \in (0, \infty)$. Если же

$$1 + \chi(1 - q) > 2\sqrt{-\chi q} \quad (3.27)$$

или, что то же,

$$C_* - A + ma(l - a) > 2\sqrt{(C_* - A)mal} \quad (3.28)$$

то получим

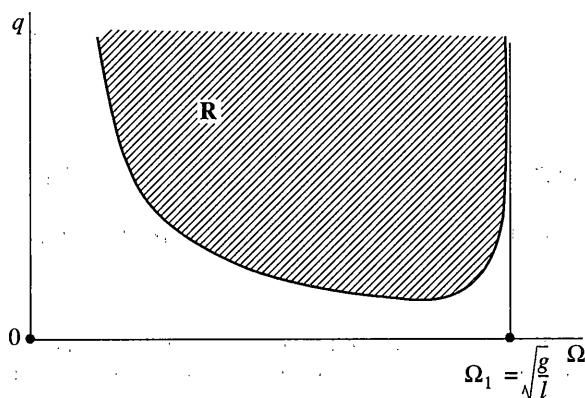
$$0 < \Omega_-^2 < \Omega_+^2 \quad (3.29)$$

$$Q > 0 \quad \text{при} \quad \Omega^2 \in (\Omega_-^2, \Omega_+^2) \quad (3.30)$$

Неравенство (3.27) выполняется при $q \in (0, -(1 - \sqrt{-\chi})/\chi) \cup (-(1 + \sqrt{-\chi})/\chi, \infty)$, что эквивалентно $C_* - A \in (0, -mal(1 - \sqrt{-a/l})) \cup (-mal(1 + \sqrt{-a/l}), \infty)$. Однако, для первого из этих интервалов оба корня (3.15) превышают значение Ω_1^2 , в результате чего не выполняется первое из условий устойчивости (3.12). И лишь при $q \in (-(1 + \sqrt{-\chi})/\chi, \infty)$, или $C_* - A \in (-mal(1 + \sqrt{-a/l}), \infty)$ выполняется неравенство $0 < \Omega_-^2 < \Omega_+^2 < \Omega_1^2$, и следовательно движение является асимптотически устойчивым при $\omega \in (k\Omega_-/\mu, k\Omega_+/\mu)$. Соответствующая зона устойчивости показана на фиг. 4.

Из приведенного исследования следует, что в случае тела, подвешенного на стержне (струне), устойчивое состояние тела с центром масс, находящимся ниже точки крепления его к стержню, возможно как в случаях, когда $C_* > A$, так и в случаях, когда $A > C_*$. Положение же тела с центром масс, находящимся выше точки крепления его к стержню, возможно лишь при $C_* > A$. При этом, как в случаях, когда $A > C_*$, так и в случаях, когда $C_* > A$, зона устойчивости всегда расширяется с увеличением разности $C_* - A$.

В заключение заметим, что в диапазоне угловой скорости (Ω_+^2, ∞) , рассмотренном выше в п. 3.1, выполняется второе из условий устойчивости (3.12), т.е. $Q(\Omega^2) > 0$, однако не выполняется первое из этих условий, именно: $\Omega^2 < v^2$. То же самое можно сказать относительно интервала (Ω_-^2, ∞) , полученного в п. 3.3. В [12] данные интервалы угловой скорости причислены к зонам устойчивости движения, поскольку применяемый в этой работе метод исследования данной задачи позволил получить лишь одно условие устойчивости, аналогичное именно второму из неравенств (3.12). В действительности же, невыполнение первого из условий устойчивости (3.12) свидетельст-



Фиг. 4

вует о наличии отрицательных корней соответствующего векового уравнения, и, следовательно, о неустойчивости движения. В то же время из выполнения второго условия (3.12), эквивалентного неравенству $\det \Pi > 0$, вытекает, что число этих отрицательных корней четно [7]. В этом случае можно говорить лишь о временной устойчивости движения, т.е., о возможной стабилизации движения гироскопическими силами. Как известно, такая стабилизация разрушается со временем силами сопротивления, обладающими в данном случае полной диссипацией. Вопрос о наличии такой стабилизации в исследуемой системе, а значит, и о временной устойчивости движения в упомянутых зонах нуждается в дополнительном исследовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. О влиянии внешнего и внутреннего трения на устойчивость вертикального вращения твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 12–22.
2. Стороженко В.О. До дослідження дії неконсервативних позиційних сил в системах з обертанням // Доп. НАН України. Сер. Матем., прир., техн. науки. 1998 № 7. С. 67–70.
3. Müller P.C. Stabilität und Matrizen. Berlin; New York: Springer, 1977. 220 p.
4. Кошляков В.Н. О структурных преобразованиях неконсервативных систем // ПММ. Т. 64. Вып. 6. 2000. С. 933–941.
5. Кошляков В.Н., Макаров В.Л. Структурный анализ некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 8. С. 1089–1096.
6. Кошляков В.Н., Макаров В.Л. К теории гироскопических систем с неконсервативными силами // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 698–704.
7. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
8. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
9. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. М.: Наука, 1991. 330 с.
10. Крутков Ю.А. Об одном частном случае броуновского вращательного движения // Докл. АН СССР. 1934. Т. 3. № 3. С. 153–159.
11. Крутков Ю.А. Броуновское вращательное движение частицы с осью симметрии // Докл. АН СССР. 1935. Т. 1. № 6. С. 366–371.
12. Карапетян А.В., Лагутина И.С. Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 53–57.