МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2005

УДК 539.3:534.1

© 2005 г. В.А. ИВАНОВ, В.Н. ПАЙМУШИН, В.И. ШАЛАШИЛИН

УТОЧНЕННАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ И СДВИГОВЫЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Общее состояние исследований в механике слоистых элементов конструкций, выполненных до 1996 года, было освещено в [1], а современное состояние теории устойчивости трехслойных пластин и оболочек с анализом этапов ее развития и направлений дальнейших исследований отражено в [2]. Этой работе предшествовали статьи [3, 4], в которых была составлена уточненная классификация форм потери устойчивости (ФПУ) трехслойных элементов конструкций при их статическом нагружении, проанализированная в [2]. В соответствии с этой классификацией из всех возможных ФПУ в трехслойных конструкциях отдельно выделяется сдвиговая ФПУ. Исходя из анализа уравнений устойчивости, выведенных в [4], был сформулирован вывод о том, что реализация сдвиговых ФПУ гипотетически возможна при нулевых значениях докритических усилий в несущих слоях и ненулевых докритических поперечных касательных напряжений в заполнителе.

Полученные в [5] результаты заставили позднее существенно скорректировать сформированные в [2–4] выводы, касающиеся составленной в [3, 4] классификации. Они были основаны на выявленной возможности потери устойчивости по чисто сдвиговой форме кругового трехслойного кольца при действии равномерного внешнего давления, когда в докритическом состоянии формируются ненулевые тангенциальные усилия в несущих слоях и нулевые поперечные касательные напряжения в заполнителе.

Публикуемая работа главным образом связана с устранением противоречий и некорректностей, которые выявились при дальнейшем и более глубоком исследовании сформулированной в [5] задачи о сдвиговой ФПУ трехслойного кольца при действии равномерного внешнего давления. Установлено, что выведенные в [4, 6] и им подобные уравнения устойчивости, использованные в [5], содержат в себе лишь второстепенные параметрические слагаемые для описания и выявления сдвиговых ФПУ, а главной же причиной реализации этих ФПУ при отсутствии докритических касательных напряжений в заполнителе является появление в нем докритических напряжений сжатия в поперечном направлении. В связи с этим для тонких трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем построены уточненные геометрически нелинейные уравнения, основанные на использовании для внешних слоев соотношений классической теории среднего изгиба, а для заполнителя – линейной аппроксимации перемещений в поперечном направлении. От всех известных в литературе вариантов теории слоистых оболочек, основанных на использовании указанных моделей, в выведенных уравнениях допускается конечность деформации поперечных сдвигов в заполнителе, обусловленных возможностью значительных взаимных смещений внешних слоев в тангенциальных направлениях при их среднем изгибе.

Без учета деформационных параметрических слагаемых выведены линеаризованные уравнения устойчивости, исходя из которых построено уточненное решение задачи о сдвиговой ФПУ трехслойного кольца при внешнем давлении. Показано, что реализация этой ФПУ возможна и при действии внутреннего давления, критическое значение которого совпадает с критическим значением внешнего давления. Более того, установлено, что при соответствующих условиях на торцах и действии внешнего или внутреннего давления в трехслойной цилиндрической оболочке сдвиговая ФПУ реализуется и в ее осевом направлении.

1. Уточненная геометрически нелинейная теория тонких трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем. *1.1. Перемещения и деформации слоев.* Отнесем срединную поверхность заполнителя σ к произвольным криволинейным координатам x^i и через $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial x^i$ обозначим базисные векторы на σ, полагая в дальнейшем $\mathbf{r}_i^{(k)} = \partial\mathbf{r}^{(k)}/\partial x^i = \partial[\mathbf{r} - \delta_{(k)}(h + h_{(k)})\mathbf{m}]/\partial x^i \approx \mathbf{r}_i$, где $2h_{(k)}$ – толщины нижнего ($k = 1$) и верхнего ($k = 2$) несущих слоев; $2h$ – толщина заполнителя, $\mathbf{m}$ – вектор единичной нормали к σ, составляющий с векторами $\mathbf{r}_i$ правосторонний основной базис; $\delta_{(k)}$ – введенный символ, причем $\delta_{(1)} = -\delta_{(2)} = 1$. Для описания механики деформирования несущих слоев, как и в [7], будем использовать соотношения классической нелинейной теории среднего изгиба, определяя в них перемещения и тангенциальные деформации представлениями

$$\mathbf{U}^{z(k)} = \mathbf{u}^{(k)} + z_{(k)}\boldsymbol{\Omega}_{(k)} = u_i^{(k)}\mathbf{r}^i + w^{(k)}\mathbf{m} - z_{(k)}\omega_i^{(k)}\mathbf{r}^i, \quad -h_{(k)} \le z_{(k)} \le h_{(k)} \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{is}^{z(k)} = \varepsilon_{is}^{(k)} + z_{(k)}\chi_{is}^{(k)} \tag{1.2}$$

$$2\varepsilon_{is}^{(k)} = e_{is}^{(k)} + e_{si}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_s^{(k)}, \quad 2\chi_{is}^{(k)} = -\nabla_i\omega_s^{(k)} - \nabla_s\omega_i^{(k)} \tag{1.3}$$

$$e_{is}^{(k)} = \nabla_i u_s^{(k)} - b_{is}w^{(k)}, \quad \omega_i^{(k)} = \nabla_i w^{(k)} + b_i^{(s)}u_s^{(k)} \tag{1.4}$$

Здесь ∇_i – символ ковариантной производной по метрике $a_{is} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_s$, b_{is} – ковариантные компоненты второго метрического тензора на σ.

Отметим, что представления (1.1)–(1.4) справедливы при выполнении оценок $e_{is}^{(k)} \approx \varepsilon$, $\omega_i^{(k)} \approx \sqrt{\varepsilon}$, $\delta_{is} + e_{is}^{(k)} \approx \delta_{is}$, в силу которых для определения базисных векторов $\mathbf{r}_i^{(k)*}$, $\mathbf{m}_{(k)}^*$ на деформированных срединных поверхностях $\sigma_{(k)}^*$ несущих слоев имеют место приближенные формулы [8]:

$$\mathbf{r}_i^{(k)*} = \mathbf{r}_i^{(k)} + \omega_i^{(k)}\mathbf{m}_{(k)} \approx \mathbf{r}_i + \omega_i^{(k)}\mathbf{m}, \quad \mathbf{m}_{(k)}^* \approx \mathbf{m} - \omega_i^{(k)}\mathbf{r}\ldots \tag{1.5}$$

Представим вектор перемещений в произвольной точке заполнителя, находящейся до деформации на уровне z от σ, в виде (модель С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия):

$$\mathbf{U}^z = \mathbf{u} + z\boldsymbol{\gamma} = (u_i + z\gamma_i)\mathbf{r}^i + (w + z\gamma)\mathbf{m}, \quad -h \le z \le h \tag{1.6}$$

который широко используется в механике трехслойных и многослойных оболочек [7]. В рамках этого представления деформации поперечного обжатия ε_{33} и поперечных сдвигов $2\varepsilon_{i3}$, постоянные по толщине, при произвольных перемещениях определяются по формулам [8]:

$$2\varepsilon_{is} = \omega_i(1+\gamma)+\gamma^s(\delta_{is}+e_{is}), \quad 2\varepsilon_{33} = 2\gamma+\gamma_i\gamma^i+\gamma^2 \tag{1.7}$$

$$\omega_i = \nabla_i w + b_i^s u_s, \quad e_{is} = \nabla_i u_s - b_{is} w \tag{1.8}$$

Будем далее считать, что в заполнителе трехслойной оболочки возникают поперечные деформации, ограниченные оценками (ε – малая в сравнении с единицей величина)

$$2\varepsilon_{i3} \approx \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{33} \approx \varepsilon \tag{1.9}$$

но при малых деформациях срединной поверхности σ заполнителя при среднем изгибе, т.е. при

$$e_{is} \approx \varepsilon, \quad \omega_i \approx \sqrt{\varepsilon} \tag{1.10}$$

Такой вид деформированного состояния трехслойной оболочки возможен при ее среднем изгибе, когда несущие слои имеют возможность значительных взаимных смещений в тангенциальных направлениях в рамках ограничений $2\varepsilon_{i3} \approx \sqrt{\varepsilon}$.

Выполнение оценок (1.9) возможно в том случае, когда величины γ_i, γ, входящие во вторую формулу из (1.7), удовлетворяют оценкам

$$\gamma \approx \varepsilon, \quad \gamma_i \approx \sqrt{\varepsilon} \tag{1.11}$$

В результате в силу оценок (1.10), (1.11) формулы (1.7) допускают упрощенную запись

$$2\varepsilon_{i3} \approx \omega_i + \gamma_i, \quad \varepsilon_{33} \approx \gamma + \underline{\gamma_i\gamma^i/2} \tag{1.12}$$

Как будет показано во втором разделе данной статьи, сохранение в (1.12) подчеркнутых слагаемых имеет принципиально важное значение в теории устойчивости слоистых элементов конструкций при постановке и решении задач о сдвиговых формах их потери устойчивости.

В рамках используемых моделей для заполнителя и несущих слоев достаточно удовлетворить условиям сопряжения слоев по перемещениям

$$\mathbf{U}^{z(k)}(z_{(k)} = \delta_{(k)}h_{(k)}) = \mathbf{U}^z(z = -\delta_{(k)}h) \tag{1.13}$$

если внести в (1.13) выражения (1.1), (1.6) и выбрать в качестве искомых неизвестных функции $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, то для u_i, w, γ_i и γ устанавливаются зависимости

$$w = \frac{w^{(1)}+w^{(2)}}{2}, \quad u_i = \frac{u_i^{(1)}+u_i^{(2)}}{2} - \frac{h_{(1)}}{2}\omega_i^{(1)} + \frac{h_{(2)}}{2}\omega_i^{(2)} \tag{1.14}$$

$$\gamma = \frac{w^{(2)}-w^{(1)}}{2h}, \quad \gamma_i = \frac{u_i^{(2)}-u_i^{(1)}}{2h} + \frac{h_{(1)}}{2h}\omega_i^{(1)} + \frac{h_{(2)}}{2h}\omega_i^{(2)} \tag{1.15}$$

С использованием (1.15) формулы (1.7) перепишем в виде

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{i3} &= C_{(1)}\omega_i^{(1)} + C_{(2)}\omega_i^{(2)} + (u_i^{(2)} - u_i^{(1)})/(2h) \\ \varepsilon_{33} &= (w^{(2)} - w^{(1)})/(2h) + \gamma_i\gamma^i/2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

где $C_{(k)} = (1 + h_{(k)}/h)/2$, причем с точностью $\delta_i^s - h_{(k)}b_i^s \approx \delta_i^s$ имеет место формула

$$\omega_i \approx (\omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)})/2 \tag{1.17}$$

1.2. Уравнения равновесия и граничные условия. Для вывода уравнений равновесия и граничных условий обратимся к вариационному уравнению Лагранжа

$$\delta A-\delta U = \delta A-\delta U_{(3)}-\sum_{k=1}^{2}\delta U_{(k)} = 0 \qquad (1.18)$$

где δA – вариация работы внешних сил; $\delta U_{(3)}$, $\delta U_{(k)}$ – вариации потенциальной энергии деформации заполнителя и несущих слоев.

Предполагая заполнитель трансверсально-мягким [7], будем считать нагруженными внешними силами лишь несущие слои, введя в рассмотрение векторы заданных усилий и моментов $\mathbf{\Phi}^{(k)} = \Phi_n^{(k)}\mathbf{n} + \Phi_{n\tau}^{(k)}\boldsymbol{\tau} + \Phi_m^{(k)}\mathbf{m}$, $\mathbf{L}^{(k)} = L_{n\tau}^{(k)}\mathbf{n} + L_n^{(k)}\boldsymbol{\tau}$, приложенных к граничным линиям срединных поверхностей внешних слоев $\sigma_{(k)}$, а также векторы заданных поверхностных усилий и моментов $\mathbf{X}^{(k)} = X_{(k)}^i\mathbf{r}_i + X_{(k)}^3\mathbf{m}$, $M_{(k)} = M_{(k)}^i\mathbf{r}_i$, приложенных в точках поверхностей $\sigma_{(k)}$. Здесь $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ – единичные орты нормали и касательной к контурной линии C поверхности σ, связанные с базисными векторами $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}^i$ разложениями $\mathbf{n} = n^i\mathbf{r}_i = n_i\mathbf{r}^i...$, $\boldsymbol{\tau} = \tau^i\mathbf{r}_i = \tau_i\mathbf{r}^i$. Вариация работы указанных внешних сил на соответствующих перемещениях будет равна

$$\delta A = \delta A_{(1)}+\delta A_{(2)} = \sum_{k=1}^{2}\left[\int_C(\Phi_n^{(k)}\delta u_n^{(k)}+\Phi_{n\tau}^{(k)}\delta u_\tau^{(k)}+\Phi_m^{(k)}\delta w^{(k)}+L_{n\tau}^{(k)}\delta\omega_\tau^{(k)}-\right.$$

$$\left.-L_n^{(k)}\delta\omega_n^{(k)})ds+\iint_\sigma(X_{(k)}^i\delta u_i^{(k)}+X_{(k)}^3\delta w^{(k)}-M_{(k)}^i\delta\omega_i^{(k)})d\sigma\right] \qquad (1.19)$$

$$\omega_n^{(k)} = \omega_i^{(k)}n^i,\quad \omega_\tau^{(k)} = \omega_i^{(k)}\tau^i,\quad u_n^{(k)} = u_i^{(k)}n^i,\quad u_\tau^{(k)} = u_i^{(k)}\tau^i$$

где ds – элемент длины контурной линии C.

В рамках модели Кирхгофа–Лява для несущих слоев $\delta U_{(k)}$ вычисляется по формуле

$$\delta U_{(k)} = \iint_\sigma\int_{-h_{(k)}}^{h_{(k)}}\sigma_{(k)}^{is}\delta\varepsilon_{is}^{z(k)}d\sigma dz_{(k)} = \iint_\sigma(T_{(k)}^{is}\delta\varepsilon_{is}^{(k)}+M_{(k)}^{is}\delta\chi_{is}^{(k)})d\sigma \qquad (1.20)$$

где $T_{(k)}^{is}$, $M_{(k)}^{is}$ – внутренние усилия и моменты в несущих слоях, приведенных к поверхностям $\sigma_{(k)}$.

Для трансверсально-мягкого заполнителя $\delta U_{(3)}$ равна

$$\delta U_{(3)} = \iint_\sigma\int_{-h}^{h}(2\sigma^{i3}\delta\varepsilon_{i3}+\sigma^{33}\delta\varepsilon_{33})d\sigma dz$$

Подставляя в это соотношение выражения (1.12) и используя формулы (1.15), (1.17), можно получить

$$\delta U_{(3)} = \iint_\sigma[T^{i3}(\delta\gamma_i+\delta\omega_i)+T^{33}(\delta\gamma+\gamma^i\delta\gamma_i)]d\sigma = \iint_\sigma\sum_{k=1}^{2}\left[-\frac{\delta_{(k)}}{2h}(T^{i3}+\right.$$

$$\left.+T^{33}\gamma^i)\delta u_i^{(k)}+\left(T^{i3}C_{(k)}+\frac{h_{(k)}}{2h}T^{33}\gamma^i\right)\delta\omega_i^{(k)}-\frac{\delta_{(k)}}{2h}T^{33}\delta w_{(k)}\right]d\sigma \qquad (1.21)$$

$$T^{i3} = 2h\sigma^{i3},\quad T^{33} = 2h\sigma^{33}$$

Составляя в соответствии с выражениями (1.19), (1.20), (1.21) уравнение (1.18) и проведя в нем с использованием (1.3), (1.4) традиционные преобразования, получим

$$\sum_{k=1}^{2}\left\{\int_C (L_{n\tau}^{(k)} - M_{n\tau}^{(k)})\delta w^{(k)}|_C + \int_C\Big[(\Phi_n^{(k)} - T_n^{(k)})\delta u_n^{(k)} + (\Phi_{n\tau}^{(k)} - T_{n\tau}^{(k)})\delta u_\tau^{(k)} + \right.$$
$$+\left(\Phi_m^{(k)} - \frac{dL_{n\tau}^{(k)}}{ds} - S_{(k)}^i n_i + \frac{dM_{n\tau}^{(k)}}{ds}\right)\delta w^{(k)} - (L_n^{(k)} - M_n^{(k)})\delta\omega_n^{(k)}\Big]ds + \tag{1.22}$$
$$\left. + \iint_\sigma (f_{(k)}^s \delta u_s^{(k)} + f_{(k)}^3 \delta w^{(k)}) d\sigma \right\} = 0$$

$$S_{(k)}^i = \nabla_s M_{(k)}^{is} + T_{(k)}^{is}\omega_s^{(k)} + \frac{T^{i3}}{2} + \frac{h_{(k)}}{2h}(T^{i3} + T^{33}\gamma^i) + M_{(k)}^i \tag{1.23}$$

$$T_n^{(k)} = T_{(k)}^{ij} n_i n_j, \quad T_{(k)}^{n\tau} = T_{(k)}^{ij} n_i \tau_j, \quad M_n^{(k)} = M_{(k)}^{ij} n_i n_j, \quad M_{n\tau}^{(k)} = -M_{(k)}^{ij} n_i \tau_j \tag{1.24}$$

Из (1.22) следует система шести нелинейных дифференциальных уравнений равновесия

$$f_{(k)}^i = \nabla_s T_{(k)}^{is} - S_{(k)}^j b_j^i + \frac{\delta_{(k)}}{2h}\underline{(T^{i3} + T^{33}\gamma^i)} + X_{(k)}^i = 0 \tag{1.25}$$

$$f_{(k)}^3 = \nabla_i S_{(k)}^i + T_{(k)}^{is} b_{is} + \frac{\delta_{(k)}}{2h} T^{33} + X_{(k)}^3 = 0 \tag{1.26}$$

и статические граничные условия на контурных линиях несущих слоев, которые по виду совпадают с соответствующими условиями классической нелинейной теории среднего изгиба тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява.

Заметим, что после подстановки (1.23) в (1.25) уравнения $f_{(k)}^i = 0$ с принятой степенью точности $\delta_i^s - h_{(k)} b_i^s \approx \delta_i^s$, $\delta_i^s - h b_i^s \approx \delta_i^s$ можно несколько упростить, приведя их к виду

$$\begin{gathered} f_{(k)}^i = \nabla_s T_{(k)}^{is} - b_j^i(\nabla_s M_{(k)}^{js} + T_{(k)}^{js}\omega_s^{(k)} + 1/2 T^{j3} + M_{(k)}^j) + \\ + 1/2\delta_{(k)}\underline{(T^{i3} + T^{33}\gamma^i)}/h + X_{(k)}^i = 0 \end{gathered} \tag{1.27}$$

Еще раз подчеркнем, что в (1.25), а следовательно, и в (1.27) определяющими сдвиговую ФПУ являются подчеркнутые слагаемые $(T^{i3} + T^{33}\gamma^i)/(2h) = \sigma^{i3} + \sigma^{33}\gamma^i$, а в них принципиально важными являются члены $\sigma^{33}\gamma^i$, появление которых связано с сохранением в (1.12) слагаемых $\gamma_i\gamma^i/2$.

1.3. Линеаризованные уравнения устойчивости линейно-упругих оболочек. Предположим, что при некоторых заданных внешних силах, являющихся консервативными, найдено решение $u_i^{(k)0}$, $w_{(k)}^0$, $T_{(k)0}^{ij}$, $M_{(k)0}^{ij}$, T_0^{i3}, T_0^{33}, т.е. определены функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние оболочки. Проведя в окрестности этого решения линеаризацию составленных нелинейных уравнений равновесия, сохраняя при этом для приращений введенных в рассмотрение функций обозначения п. 1.1, 1.2 и предполагая оболочку до ее потери устойчивости напряженной, но недеформированной, получим следующую систему линеаризованных уравнений устойчивости:

$$f^i_{(k)} = \nabla_s T^{is}_{(k)} - b^i_j(\nabla_s M^{js}_{(k)} + T^{js}_{(k)0}\omega^{(k)}_s + T^{j3}/2) + \delta_{(k)}(T^{i3} + T^{33}_0\gamma^i)/(2h) = 0 \qquad (1.28)$$

$$f^3_{(k)} = \nabla_i S^i_{(k)} + T^{is}_{(k)} b_{is} + \delta_{(k)} T^{33}/(2h) = 0 \qquad (1.29)$$

Для $S^i_{(k)}$ примем далее представление

$$S^i_{(k)} = Q^i_{(k)} + T^{is}_{(k)0}\omega^{(k)}_s \qquad (1.30)$$

$$Q^i_{(k)} = \nabla_s M^{is}_{(k)} + 1/2T^{i3} + h_{(k)}(T^{i3} + T^{33}_0\gamma^i)/(2h) \qquad (1.31)$$

и, используя выражение (1.30), приведем уравнение (1.29) к виду

$$f^3_{(k)} = \nabla_i Q^i_{(k)} + T^{is}_{(k)0}\nabla_i\omega^{(k)}_s + \omega^{(k)}_s\nabla_i T^{is}_{(k)0} + T^{is}_{(k)} b_{is} + \delta_{(k)}T^{33}/(2h) = 0 \qquad (1.32)$$

Из этого уравнения исключим $\nabla_i T^{is}_{(k)0}$, представив уравнения равновесия $f^i_{(k)0} = 0$ невозмущенного состояния в виде

$$\nabla_s T^{is}_{(k)0} = -\delta_{(k)}T^{i3}_0/(2h) - X^i_{(k)} \qquad (1.33)$$

отбросив в (1.25) нелинейные слагаемые $T^{33}_0\gamma^i_0$ и слагаемые $b^i_j S^j_{(k)0}$. Внося теперь правые части уравнений (1.33) и выражений (1.31) в (1.32), окончательно получим

$$\begin{aligned} f^3_{(k)} = {} & \nabla_i\nabla_s M^{is}_{(k)} + \frac{1}{2}\nabla_i T^{i3} + \frac{h_{(k)}}{2h}\nabla_i(T^{i3} + T^{33}_0\gamma^i) + T^{is}_{(k)}b_{is} + T^{is}_{(k)0}\nabla_i\omega^{(k)}_s - \\ & -(\delta_{(k)}T^{i3}_0/(2h) + X^i_{(k)})\omega^{(k)}_i + \delta_{(k)}T^{33}/(2h) = 0 \end{aligned} \qquad (1.34)$$

К выведенной системе линеаризованных уравнений устойчивости (1.28), (1.34) необходимо присоединить соотношения упругости

$$T^{is}_{(k)} = B^{isjn}_{(k)}\varepsilon^{(k)}_{jn}, \quad M^{is}_{(k)} = D^{isjn}_{(k)}\chi^{(k)}_{jn} \qquad (1.35)$$

$$\begin{aligned} T^{i3} &= 2B^{is}\varepsilon_{s3} = B^{is}[C_{(1)}\omega^{(1)}_s + C_{(2)}\omega^{(2)}_s + (u^{(2)}_s - u^{(1)}_s)/2] \\ T^{33} &= E_3(w^{(2)} - w^{(1)}) \end{aligned} \qquad (1.36)$$

в которых $B^{isjn}_{(k)} = 2h_{(k)}E^{isjn}_{(k)}$, $D^{isjn}_{(k)} = 2h^3_{(k)}E^{isjn}_{(k)}/3$ – четырехвалентные тензоры, характеризующие жесткости внешних слоев на растяжение–сжатие, сдвиги в тангенциальной плоскости, изгиб и кручение, $B^{is} = 2hG^{is}$ – жесткости заполнителя на поперечные сдвиги; E_3 – модуль упругости заполнителя в поперечном направлении.

2. Сдвиговая форма потери устойчивости трехслойного кольца в окружном направлении. Рассмотрим круговое трехслойное кольцо симметричного по толщине строения, находящееся в условиях осесимметричного напряженно-деформированного состояния. Пусть $2t$ – толщины внешних слоев; R – радиус срединной поверхности заполнителя, отнесенной к окружной координате $x^2 = \theta$; G_{23} – модуль поперечного сдвига заполнителя; $B = 2Et$, $D = 2t^3E/3$ – жесткости несущих слоев. При этих обозначениях уравнения нейтрального равновесия (1.28), (1.34) при переходе к физическим компонентам соответствующих векторов и тензоров в силу осесимметричности невозмущенного НДС представимы в виде

$$\frac{B}{R}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du_2^{(k)}}{d\theta}+w^{(k)}\right)+\delta_{(k)}R(q_2+\sigma_{33}^0\gamma_2)+S_2^{(k)} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{dS_2^{(k)}}{d\theta}-\frac{B}{R}\left(\frac{du_2^{(k)}}{d\theta}+w^{(k)}\right)+\frac{\delta_{(k)}E_3R}{2h}(w^{(2)}-w^{(1)}) = 0 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{23} = q_2 = G_{23}[u_2^{(2)}-u_2^{(1)}+(t+h)(\omega_2^{(1)}+\omega_2^{(2)})]/(2h) \tag{2.3}$$

$$S_2^{(k)} = -\frac{D}{R^2}\frac{d^2\omega_2^{(k)}}{d\theta^2}+T_{22}^{(k)0}\omega_2^{(k)}+(t+h)q_2+t\sigma_{33}^0\gamma_2 \tag{2.4}$$

$$\omega_2^{(k)} = \frac{1}{R}\left(\frac{dw^{(k)}}{d\theta}-u_2^{(k)}\right),\quad \gamma_2 = \frac{1}{2h}[u_2^{(2)}-u_2^{(1)}+t(\omega_2^{(1)}+\omega_2^{(2)})] \tag{2.5}$$

2.1. *Действие внешнего давления.* Входящие в (2.1), (2.4) докритические усилия в несущих слоях $T_{22}^{(k)0}$ и поперечное нормальное напряжение σ_{33}^0 в заполнителе при действии внешнего давления $X_3^{(2)} = -p$, когда $X_3^{(1)} = 0$, в рамках принятой степени точности построенных уравнений будут определяться по формулам [5, 9]:

$$T_{22}^{(1)0} = -\chi Rp/(1+2\chi),\quad T_{22}^{(2)0} = -(1+\chi)Rp/(1+2\chi) \tag{2.6}$$

$$\sigma_{33}^0 = -\chi p/(1+2\chi),\quad \chi = E_3R^2/(2Bh) \tag{2.7}$$

где χ – безразмерный, определяющий поперечное обжатие заполнителя, параметр.

Представим входящие в (2.1)–(2.5) неизвестные функции в виде

$$\{w^{(k)}, u_2^{(k)}, q_2\} = \{W_n^{(k)}, V_n^{(k)}, Q_n\}\{\sin n\theta, \cos n\theta, \cos n\theta\}^T\quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.8}$$

где n – число полуволн потери устойчивости, каждому из которых отвечает определенная точка ветвления решений исходной системы построенных нелинейных уравнений от ее линейного решения (2.6), (2.7).

Рассмотрим здесь решение при $n = 0$, которым, как установлено в [5], описывается сдвиговая форма потери устойчивости кольца при равномерном внешнем давлении. Реализация таких ФПУ, а также форм свободных и собственных колебаний трехслойных элементов конструкций сопровождается нулевой изменяемостью параметров их НДС. Поэтому, полагая во всех уравнениях и соотношениях (2.1)–(2.5) $d/d\theta = 0$, приходим к уравнениям

$$-w^{(k)}+\delta_{(k)}\chi(w^{(2)}-w^{(1)}) = 0 \tag{2.9}$$

$$\delta_{(k)}Rq_2^*+T_{22}^{(k)0}\omega_2^{(k)}+hq_2+tq_2^* \approx \delta_{(k)}Rq_2^*+T_{22}^{(k)0}\omega_2^{(k)}+hq_2 = 0 \tag{2.10}$$

где с точностью $1+(t+h)/R \approx 1$, $1+t/R \approx 1$:

$$\begin{gathered}\omega_2^{(k)} = -u_2^{(k)}/R,\quad q_2 = \frac{G_{23}}{2h}\left[\left(1-\frac{t+h}{R}\right)u_2^{(2)}-\left(1+\frac{t+h}{R}\right)u_2^{(1)}\right] \approx \frac{G_{23}}{2h}(u_2^{(2)}-u_2^{(1)})\\ q_2^* = q_2+\sigma_{33}^0\gamma_2 = q_2+\sigma_{33}^0[u_2^{(2)}-u_2^{(1)}+t(\omega_2^{(1)}+\omega_2^{(2)})] \approx\\ \approx (G_{23}+\sigma_{33}^0)(u_2^{(2)}-u_2^{(1)})/(2h)\end{gathered} \tag{2.11}$$

Система уравнений (2.9) имеет только тривиальное решение $w^{(k)} \equiv 0$, а уравнения (2.10) при использовании формул (2.11) и введении обозначений

$$\alpha = R^2(G_{23} + \sigma_{33}^0)/(2h), \quad \beta = 1/2G_{23}R \tag{2.12}$$

приводятся к виду

$$\begin{aligned} &(\alpha - \beta - T_{22}^{(1)0})u_2^{(1)} + (-\alpha + \beta)u_2^{(2)} = 0 \\ &(-\alpha + \beta)u_2^{(1)} + (\alpha + \beta - T_{22}^{(2)0})u_2^{(2)} = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Из условия нетривиальности решения этой системы уравнений приходим к равенству

$$T_{22}^{(2)0}(\alpha - \beta) + T_{22}^{(1)0}(\alpha + \beta) = 0$$

из которого следует формула

$$\alpha = -\beta\frac{T_{22}^{(1)0} - T_{22}^{(2)0}}{T_{22}^{(1)0} + T_{22}^{(2)0}} \tag{2.14}$$

Внося сюда формулы (2.6), (2.12) и принимая во внимание выражение (2.7), с принятой ранее степенью точности $1 + h/R = 1 + h_0 \approx 1$ получим формулу

$$p_* = \frac{(1+2\chi)}{\chi}\left(1 + \frac{h_0}{1+2\chi}\right)G_{23} \approx G_{23}\frac{(1+2\chi)}{\chi} \tag{2.15}$$

Назовем ее формулой для определения критического значения внешнего давления, при достижении которого происходит сдвиговая потеря устойчивости трехслойного кольца, описанная и исследованная (как будет отмечено ниже, некорректно) в [5].

2.2. Анализ сдвиговой формы потери устойчивости. В рамках представления вектора перемещений в заполнителе в виде (1.6) с точностью $\delta_i^s - zb_i^s \approx \delta_i^s$ базисные векторы в деформированном состоянии заполнителя будут равны

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\rho}_i^* = \partial(\mathbf{r} + z\mathbf{m} + \mathbf{u} + z\boldsymbol{\gamma})/\partial x^i = \mathbf{r}_i^* + z\boldsymbol{\gamma}_i \\ &\boldsymbol{\rho}_3^* = \partial(\mathbf{r} + z\mathbf{m} + \mathbf{u} + z\boldsymbol{\gamma})/\partial z = \mathbf{m} + \boldsymbol{\gamma} \\ &\boldsymbol{\gamma}_i = \partial\boldsymbol{\gamma}/\partial x^i, \quad \mathbf{r}_i^* = \partial\mathbf{r}^*/\partial x^i = \partial(\mathbf{r} + \mathbf{u})/\partial x^i \end{aligned} \tag{2.16}$$

В соответствии с (2.16) для вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}^3$, действующего на площадке $z = \text{const}$ заполнителя в его деформированном состоянии, можно записать выражение $\boldsymbol{\sigma}^3 = \sigma^{i3}\boldsymbol{\rho}_i^* + \sigma^{33}\boldsymbol{\rho}_3^*$, которое в силу принятой модели $\sigma^{i3} = \sigma^{i3}(x^1, x^2)$, $\sigma^{33} = \sigma^{33}(x^1, x^2)$ допускает упрощенное представление $\boldsymbol{\sigma}^3 \approx \sigma^{i3}\mathbf{r}_i^* + \sigma^{33}(\mathbf{m} + \boldsymbol{\gamma})$.

Так как при среднем изгибе оболочки $\mathbf{r}_i^* = \mathbf{r}_i + \omega_i\mathbf{m}$, где ω_i определяются по формулам из (1.8), то

$$\boldsymbol{\sigma}^3 = \sigma^{i3}(\mathbf{r}_i + \omega_i\mathbf{m}) + \sigma^{33}(\mathbf{m} + \gamma^i\mathbf{r}_i) = (\sigma^{i3} + \sigma^{33}\gamma^i)\mathbf{r}_i + (\sigma^{i3} + \sigma^{33}\omega_i)\mathbf{m} \tag{2.17}$$

Касательные компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}^3$ в недеформированном базисе $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{m}$ обозначим через σ_*^{i3}, для которых из (2.17) следует формула

$$\sigma_*^{i3} = \sigma^{i3} + \sigma^{33}\gamma^i \tag{2.18}$$

Эти напряжения, приведенные к усилиям $T^{i3} + T^{33}\gamma^i$, входят как в уравнения равновесия всех сил, приложенных к несущим слоям, в проекциях на базисные векторы $\mathbf{r}_i$ (уравнения (1.25)), так и в выражения (1.23), представляющие собой уравнения равновесия моментов для составных элементов несущих слоев, состоящих из элементов несущих слоев с толщинами $2h_{(k)}$ и заполнителя толщиной h. Для трехслойного кольца выражение (2.18) после линеаризации в окрестности решения (2.6), (2.7) принимает вид

$$\sigma_{23}^{*} = q_2^{*} \approx (G_{23} + \sigma_{33}^{0})(u_2^{(2)} - u_2^{(1)})/(2h) \tag{2.19}$$

Видно, что если $\sigma_{33}^{0} = -G_{23}$, то $q_2^{*} = 0$, а величина $u_2^{(2)} - u_2^{(1)}$ становится неопределенной, т.е. появляется множество смежных состояний равновесия. Итак, заполнитель теряет устойчивость и появляется возможность проворачивания несущих слоев относительно друг друга, как абсолютно твердых тел, т.е. происходит сдвиговая потеря устойчивости кольца. При этом действующие на несущие слои силы q_2^{*} со стороны заполнителя равны нулю как до, так и в момент потери устойчивости.

Если в равенство $\sigma_{33}^{0} = -G_{23}$ внести формулу (2.7), то получим

$$\sigma_{33}^{0} = -\chi p/(1 + 2\chi) = -G_{23}$$

которая с принятой степенью точности совпадает с формулой (2.15).

Следовательно, потеря устойчивости трехслойного кольца по сдвиговой форме в рассматриваемом случае происходит из-за потери устойчивости заполнителя по сдвиговой форме в условиях поперечного сжатия при достижении напряжением σ_{33}^{0} величины $-G_{23}$.

2.3. *О необходимой степени точности построения нелинейных и линеаризованных уравнений теории трехслойных оболочек для исследования сдвиговых ФПУ.* Если все компоненты деформации заполнителя считать малыми, т.е. вместо (1.9) принять оценки $2\varepsilon_{i3} \approx \varepsilon$, $\varepsilon_{33} \approx \varepsilon$, то формулы (1.12) представимы в виде

$$2\varepsilon_{i3} = \omega_i + \gamma_i, \quad \varepsilon_{33} = \gamma = (w^{(2)} - w^{(1)})/(2h) \tag{2.20}$$

При их использовании вместо уравнений равновесия (1.25), (1.26) приходим к упрощенным уравнениям

$$\begin{aligned} f_{(k)}^{i} &= \nabla_s T_{(k)}^{is} - S_{(k)}^{j} b_j^{i} + \delta_{(k)} T^{i3}/(2h) + X_{(k)}^{i} = 0 \\ f_{(k)}^{3} &= \nabla_i S_{(k)}^{i} + T_{(k)}^{is} b_{is} + \delta_{(k)} T^{33}/(2h) + X_{(k)}^{3} = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

в которых

$$S_{(k)}^{i} = \nabla_s M_{(k)}^{is} + T_{(k)}^{is}\omega_s^{(k)} + C_{(k)} T^{i3} + M_{(k)}^{i} \tag{2.22}$$

Применительно к трехслойным оболочкам данные уравнения полностью эквивалентны уравнениям работы [7], а также подобным уравнениям теории слоистых оболочек, построенным в предположении о малости деформаций $2\varepsilon_{i3} \approx \varepsilon$, $\varepsilon_{33} \approx \varepsilon$ в работах абсолютного большинства других авторов.

Следующие из (2.21), (2.22) уравнения для исследования сдвиговой ФПУ трехслойного кольца принимают вид

$$\begin{aligned} &\delta_{(k)} R q_2 + T_{22}^{(k)0}\omega_2^{(k)} + h q_2 = 0 \\ &q_2 \approx G_{23}(u_2^{(2)} - u_2^{(1)})/(2h) \end{aligned} \tag{2.23}$$

которые отличаются от уравнений (2.10) отсутствием слагаемых $\sigma_{33}^{0}\gamma_2$. Из них при использовании (2.6) в рамках принятой степени точности $1 + h_0 \approx 1$ следует формула

$$p_* = \frac{2G_{23}}{h_0}\left(1 + \frac{1}{4\chi(1+\chi)}\right) \tag{2.24}$$

которая по сравнению с (2.15) практически в $1/h_0$ раз завышает критическую нагрузку сдвиговой формы потери устойчивости трехслойного кольца.

Сдвиговая форма потери устойчивости трехслойного кольца при действии равномерного внешнего давления была описана и исследована в [5] исходя из уравнений уточненной теории трехслойных оболочек [6], которые применительно к рассматриваемой задаче полностью совпадают с уравнениями (2.23). Последние, как следует из вышеизложенного и полученного в [5] результата в виде формулы (2.24), являются абсолютно некорректными и несодержательными в отношении возможности описания сдвиговых ФПУ трехслойных оболочек, так как в них отсутствуют главные члены, каковыми являются слагаемые вида $\sigma^{33}\gamma^i$ в выражениях (2.18). Следовательно, исходя из изложенных выше результатов и анализа результатов работы [5] следует сформулировать следующие выводы.

При построении двумерных геометрически нелинейных уравнений теории трехслойных (в общем случае и многослойных) элементов конструкций, позволяющих описывать сдвиговые ФПУ, обязательно необходимо считать деформации поперечных сдвигов заполнителя конечными, предполагая конечными углы поворотов волокон, нормальных до деформации заполнителя к его срединной поверхности. В варианте теории, предложенном в данной работе, сформулированное требование сводится к сохранению в формулах (1.12) подчеркнутых слагаемых, влекущему за собой появление в уравнениях (1.25) и выражениях (1.23) слагаемых $T^{33}\gamma^i$.

Выявление и исследование сдвиговых ФПУ в трехслойных (многослойных) элементах конструкции невозможно провести без учета с необходимой степенью точности поперечного обжатия заполнителя.

2.4. Действие внутреннего давления. Если на трехслойное кольцо действует внутреннее давление $X_3^{(1)} = p$, когда $X_3^{(2)} = 0$, то докритические окружные усилия в несущих слоях, как можно показать, будут растягивающими и определяться по формулам

$$T_{22}^{(2)0} = (1+\chi)Rp/(1+2\chi), \quad T_{22}^{(1)0} = \chi Rp/(1+2\chi) \tag{2.25}$$

в то время как заполнитель будет находиться в условиях сжатия и в нем напряжение $\overset{0}{\sigma}_{33}$ по-прежнему определяется по формуле (2.7). Подставляя в (2.14) формулы (2.12), (2.25) и используя (2.7), для определения p_* по-прежнему приходим к формуле (2.15). Таким образом, сдвиговая форма потери устойчивости трехслойного кольца возможна и при внутреннем давлении, когда сжимающее напряжение в заполнителе становится равным G_{23}, т.е. $\overset{0}{\sigma}_{33} = -G_{23}$. Но в этом случае невозможна реализация изгибной ФПУ, которая при действии внешнего давления подробно исследована в [9].

3. Сдвиговая форма потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки в осевом направлении. Как было установлено в [10], в трехслойных цилиндрических оболочках из всех форм свободных колебаний выделяются такие две несвязанные между собой формы, которые возможны при отсутствии на контуре оболочки ограничений на взаимные тангенциальные смещения, т.е. когда $u_2^{(2)} - u_2^{(1)} \neq 0$. Они реализуются в оболочке при нулевой изменяемости параметров НДС в направлениях x^i только за счет взаимных смещений внешних слоев, как абсолютно твердых тел. По аналогии с формами колебаний в цилиндрической оболочке при действии внешнего или внутреннего давления и указанных выше условиях на граничных срезах должна реализоваться сдвиговая ФПУ не только в окружном направлении, исследованная в п. 2, но и в осевом направлении. Действительно, принимая в направлениях θ и $x^1 = x$ нулевую изменяемость всех функций, входящих в уравнения возмущенного состояния, для цилиндрической оболочки приходим не только к задаче п. 2, но и к уравнению $T^{13} + T_0^{33}\gamma^1 = 0$, которое с использованием формул $\sigma^{13} = T^{13}/(2h)$, $\sigma_0^{33} = \sigma_{33}^0 = T_0^{33}/(2h)$ и кинематических соотношений

$$2\varepsilon_{13} = (u_1^{(2)} - u_1^{(1)})/(2h), \quad \gamma^1 = \gamma_1 = (u_1^{(2)} - u_1^{(1)})/(2h) \tag{3.1}$$

приводится к виду

$$(G_{13} + \sigma_{33}^0)(u_1^{(2)} - u_1^{(1)})/(2h) = 0 \tag{3.2}$$

При использовании (2.7) исходя из (3.2) устанавливается формула

$$p_* = G_{13}(1 + \chi)/\chi \tag{3.3}$$

Как следует из (2.15) и (3.3), в случае изотропного заполнителя ($G_{13} = G_{23} = G_3$) критические значения давления (внешнего или внутреннего), при достижении которых происходит потеря устойчивости по сдвиговой форме трехслойной цилиндрической оболочки в ее окружном и осевом направлениях, с принятой степенью точности $1 + h_0 \approx 1$ совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 03-01-00535а, 03-01-00071).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Norr A.K., Burton W.S., Bert Ch.W.* Computational models for sandwich panels and shells // Appl. Mech. Rev-s. 1996. V. 49. № 3. P. 155–199.
2. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 148–162.
3. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных элементов конструкций. Анализ современного состояния и уточненная классификация форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 6. С. 707–716.
4. *Паймушин В.Н., Бобров С.Н.* Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем средней толщины для исследования смешанных форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 1. С. 95–108.
5. *Паймушин В.Н.* Сдвиговая форма потери устойчивости трехслойного кругового кольца при равномерном внешнем давлении // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 1. С. 58–60.
6. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким заполнителем) // Изв. ВУЗ. Математика. 1994. № 11. С. 29–42.
7. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
8. *Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г.* Основания нелинейной теории оболочек. Казань: Фэн, 1996. 216 с.
9. *Паймушин В.Н., Иванов В.А., Бобров С.Н., Полякова Т.В.* Устойчивость трехслойного кругового кольца под равномерным внешним давлением // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 3. С. 317–328.
10. *Паймушин В.Н.* Классические и неклассические задачи динамики трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37. № 3. С. 289–306.

Казань, Москва

Поступила в редакцию
29.04.2003