

© 2005 г. И.И. ИЛЬИНА, В.В. СИЛЬВЕСТРОВ

### **ЗАДАЧА О ТОНКОМ ЖЕСТКОМ МЕЖФАЗНОМ ВКЛЮЧЕНИИ, ОТСОЕДИВИВШЕМСЯ ВДОЛЬ ОДНОЙ СТОРОНЫ ОТ СРЕДЫ**

Изучается кусочно-однородная упругая плоскость, составленная из двух различных упругих полуплоскостей, между которыми расположено тонкое жесткое остроугольное включение конечной длины. Одна сторона включения полностью сцеплена со средой, а другая контактирует с ней в режиме скольжения без трения, подобно гладкому жесткому штампу. Рассматривается плоское напряженное состояние, порожденное заданными на бесконечности напряжениями при наиболее общих краевых условиях на сторонах включения – заданном векторе смещения на одной стороне и заданных касательной компоненте вектора напряжений и нормальной компоненте вектора смещения на другой стороне. Методом матричной краевой задачи Римана находятся явно комплексные потенциалы составной упругой плоскости, изучается поведение напряжений вблизи концов включения, которые в зависимости от упругих параметров составной плоскости имеют в них либо только степенную особенность порядка от  $1/2$  до  $1$ , либо степенную особенность порядка  $1/2$  в сочетании с осциллирующей особенностью. В первом случае интенсивность напряжений определяется одним действительным коэффициентом, а во втором – тремя.

Рассматриваемая модель кусочно-однородной среды с частично отслоившимся включением может быть использована для изучения композиционных материалов с усиливающимися элементами в виде тонких жестких включений, которые в процессе эксплуатации материала отсоединились от нее вдоль одной стороны, например, из-за разницы упругих свойств сред, примыкающих к включению.

Тонкое жесткое остроугольное включение между различными изотропными и анизотропными средами, одна сторона которого полностью сцеплена со средой, а другая свободна от какого-либо контакта с ней, изучалась в [1–8]. Методами сингулярных интегральных уравнений, обобщенного интегрального преобразования Фурье и матричной краевой задачи Римана в этих работах находится решение соответствующей математической задачи, изучается поведение напряжений вблизи концов включения. Решение указанной проблемы в случае однородной среды имеется в [9–13]. Тонкое жесткое включение, одна сторона которого со средой не контактирует, а другая контактирует с ней как гладкий штамп, изучается в работах [3, 13, 14]. В двух последних работах рассматривается однородная среда. В [15] в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода находится реактивное напряжение в точках тонкого упругого включения в однородной упругой среде, одна сторона которого жестко присоединена к среде, а другая отслоилась от среды и контактирует с ней при отсутствии касательного напряжения. Соответствующая антиплоская задача о тонком жестком включении в однородном упругом слое решается в [16]. Другие модели частично отсоединившегося от среды тонкого жесткого включения и связанные с ними смешанные задачи теории

упругости рассматриваются в работах [17–28]. В [17, 18, 21] решается основная смешанная задача теории упругости для однородной плоскости с коллинеарными разрезами при различных способах расположения точек смены типа граничных условий на берегах разрезов. В [19] рассматривается напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие четыре одинаковые трещины, на одних берегах которых заданы смещения, а на других – напряжения. Аналогичная задача для упругой полуплоскости с краевым вырезом решается в [28]. В [22] изучается тонкое жесткое включение, у которого одна сторона сцеплена со средой, некоторый внутренний участок другой стороны со средой не контактирует, а примыкающие к концам включения участки находятся в состоянии скользящего контакта со средой. Работы [20, 23–27] посвящены изучению процесса отслоения жесткого линейного включения от среды на участках, примыкающих к концам включения. Во всех этих работах среда полагается однородной. Полностью отсоединившееся от среды тонкое жесткое межфазное включение изучается в [3].

**1. Постановка задачи.** Пусть в кусочно-однородной упругой изотропной плоскости, составленной из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред расположено (фиг. 1) тонкое жесткое остроугольное включение  $[a, b]$ , нижняя сторона которого жестко сцеплена со средой

$$u^-(t) = h_1(t), \quad v^-(t) = h_2(t), \quad t \in (a, b) \quad (1.1)$$

а верхняя сторона контактирует с ней подобно гладкому жесткому штампу:

$$\tau_{xy}^+(t) = q(t), \quad v^+(t) = h_3(t), \quad t \in (a, b) \quad (1.2)$$

где  $u, v$  – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора смещения  $u + iv$ , а  $\tau_{xy}$  – касательное напряжение. Вне включения полуплоскости жестко соединены друг с другом. Верхняя полуплоскость имеет модуль сдвига  $\mu_1$  и коэффициент Пуассона  $\nu_1$ , нижняя –  $\mu_2$  и  $\nu_2$  соответственно. Функцию  $q(t)$  и производные  $h'_k(t)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) будем считать непрерывными по Гельдеру на  $[a, b]$ . Последнее условие связано исключительно с применяемым в дальнейшем для решения задачи математическим аппаратом.

На бесконечности составной плоскости заданы значения нормальных  $\sigma_x, \sigma_y$ , касательного  $\tau_{xy}$  напряжений и вращения  $\omega$ :

$$\sigma_{x1}^\infty = \sigma_1, \quad \sigma_{x2}^\infty = \sigma_2, \quad \sigma_{y1}^\infty = \sigma_{y2}^\infty = \sigma, \quad \tau_{xy1}^\infty = \tau_{xy2}^\infty = \tau, \quad \omega_1^\infty = \omega_1, \quad \omega_2^\infty = \omega_2$$

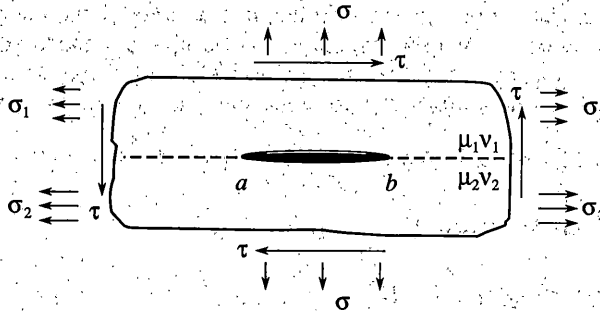
связанные между собой условиями неразрывности смещений [29]:

$$\mu_2(1 + \kappa_1)\sigma_1 - \mu_1(1 + \kappa_2)\sigma_2 = [\mu_1\kappa_2 - \mu_2\kappa_1 + 3(\mu_2 - \mu_1)]\sigma$$

$$2\mu_1\mu_2(\omega_1 - \omega_2) = (\mu_1 - \mu_2)\tau$$

где индекс (1), здесь и далее, соответствует верхней полуплоскости, индекс (2) – нижней;  $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) при плоской деформации и  $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$  ( $j = 1, 2$ ) при плоском напряженном состоянии. Кроме того, считаем заданным значение главного вектора  $X + iY$  внешних сил, приложенных к включению.

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние составной плоскости, при котором напряжения и вращение в вершинах включения могут иметь особенности интегрируемого характера, и исследовать их поведение вблизи вершин включения.



Фиг. 1

**2. Краевая задача для комплексных потенциалов и сведение ее к отдельным задачам Римана.** Для нахождения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  вращения  $\omega$  и производной по  $x$  от вектора смещения  $u + iv$  в точке  $z = x + iy$  составной плоскости воспользуемся следующими видоизменениями формул Колосова–Мусхелишвили применительно к кусочно-однородной плоскости [30]:

в верхней полуплоскости  $\text{Im} z > 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re}\Phi(z), & 2\mu_1\omega &= (1 + \kappa_1)\text{Im}\Phi(z) \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \\ 2\mu_1(u + iv)'_x &= \kappa_1\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

в нижней полуплоскости  $\text{Im} z < 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re}\Phi_*(z), & 2\mu_2\omega &= (1 + \kappa_2)\text{Im}\Phi_*(z) \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_*(z) + \Omega_*(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_*'(z)} \\ 2\mu_2(u + iv)'_x &= \kappa_2\Phi_*(z) - \Omega_*(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_*'(z)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Phi_*(z) = \alpha_1\Phi(z) + \alpha_2\Omega(z), \quad \Omega_*(z) = \alpha_3\Omega(z) + \alpha_4\Phi(z)$$

$$\alpha_1 = \frac{1 + \mu_*\kappa_1}{1 + \kappa_2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \mu_*}{1 + \kappa_2}, \quad \alpha_3 = \frac{\mu_* + \kappa_2}{1 + \kappa_2}, \quad \alpha_4 = \frac{\kappa_2 - \mu_*\kappa_1}{1 + \kappa_2}, \quad \mu_* = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

где  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  – кусочно-голоморфные функции с линией разрыва  $L = [a, b]$ , допускающие на концах линии особенности интегрируемого характера (класс  $h_0$  [31]) и имеющие в окрестности  $\infty$  вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \gamma_1 + \frac{\gamma_3}{z} + O(z^{-2}), & \Omega(z) &= \gamma_2 + \frac{\gamma_4}{z} + O(z^{-2}) \\ \gamma_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma}{4} + i\frac{2\mu_1\omega_1}{1 + \kappa_1}, & \gamma_2 &= \sigma - i\tau - \gamma_1, & \gamma_3 &= \frac{X + iY}{2\pi(1 + \mu_*\kappa_1)}, & \gamma_4 &= \frac{\kappa_2(X + iY)}{2\pi(\mu_* + \kappa_2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Будем считать, что для всех точек  $t$  линии  $L$ , кроме концов,

$$\lim_{z \rightarrow t^+} (\bar{z} - z)\Phi'(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow t^+} (\bar{z} - z)\Omega'(z) = 0$$

Выполнение этих условий следует из приводимых далее решений соответствующих краевых задач в силу ограничений, наложенных на правые части условий (1.1), (1.2). Тогда на основании формул (2.1), (2.2) из условий (1.1), (1.2) для нахождения функций  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  (комплексных потенциалов) получим следующие краевые условия:

$$\kappa_2 \alpha_1 \Phi^-(t) + \kappa_2 \alpha_2 \Omega^-(t) - \alpha_3 \Omega^+(t) - \alpha_4 \Phi^+(t) = 2\mu_2(h_1'(t) + ih_2'(t)) \quad (2.4)$$

$$\text{Im}[\kappa_1 \Phi^+(t) - \Omega^-(t)] = 2\mu_1 h_3'(t) \quad (2.5)$$

$$\text{Im}[\Phi^+(t) + \Omega^-(t)] = -q(t), \quad t \in L \quad (2.6)$$

Добавим к ним условие, получаемое из (2.4) путем сопряжения обеих частей:

$$\overline{\kappa_2 \alpha_1 \Phi^-(t) + \kappa_2 \alpha_2 \Omega^-(t) - \alpha_3 \Omega^+(t) - \alpha_4 \Phi^+(t)} = 2\mu_2(h_1'(t) - ih_2'(t)), \quad t \in L \quad (2.7)$$

а условия (2.5), (2.6) запишем в виде

$$\kappa_1 \Phi^+(t) - \Omega^-(t) - \overline{\kappa_1 \Phi^+(t) + \Omega^-(t)} = 4i\mu_1 h_3'(t) \quad (2.8)$$

$$\Phi^+(t) + \Omega^-(t) - \overline{\Phi^+(t) + \Omega^-(t)} = -2iq(t), \quad t \in L$$

Введем новые функции

$$F_1(z) = \Phi(z), \quad F_2(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad F_3(z) = \Omega(z), \quad F_4(z) = \overline{\Omega(\bar{z})} \quad (2.9)$$

Тогда на основании равенств

$$F_1^\pm(t) = \Phi^\pm(t), \quad F_2^\pm(t) = \overline{\Phi^\mp(t)}, \quad F_3^\pm(t) = \Omega^\pm(t), \quad F_4^\pm(t) = \overline{\Omega^\mp(t)}, \quad t \in L$$

для нахождения вектор-функции  $\mathbf{F}(z) = \text{col}\{F_1(z), F_2(z), F_3(z), F_4(z)\}$  из условий (2.4), (2.7), (2.8) получим матричную краевую задачу Римана

$$\mathbf{A}\mathbf{F}^+(t) = \mathbf{B}\mathbf{F}^-(t) + \mathbf{g}(t), \quad t \in L \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_4 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \alpha_1 & 0 & \kappa_2 \alpha_2 \\ \kappa_1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\kappa_2 \alpha_1 & 0 & -\kappa_2 \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \kappa_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2\mu_2(h_1'(t) + ih_2'(t)) \\ 2\mu_2(h_1'(t) - ih_2'(t)) \\ 4i\mu_1 h_3'(t) \\ -2iq(t) \end{pmatrix}$$

Будем искать функцию  $\mathbf{F}(z)$  в виде  $\mathbf{F}(z) = \mathbf{P}\Psi(z)$ , где  $\mathbf{P}$  – некоторая невырожденная матрица, а  $\Psi(z)$  – новая вектор-функция с компонентами  $\Psi_1(z)$ ,  $\Psi_2(z)$ ,  $\Psi_3(z)$ ,  $\Psi_4(z)$ . Тогда из (2.10) получим

$$\Psi^+(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} \Psi^-(t) + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}(t), \quad t \in L$$

Операция умножения на матрицу  $A^{-1}$  законна, так как  $\det A = -\kappa_2(\kappa_1 + 1)\alpha_1\alpha_3 \neq 0$ . Выберем  $P$  так, чтобы матрица  $P^{-1}A^{-1}BP$  была диагональной или треугольной. С этой целью найдем собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $A^{-1}B$ :

$$\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad \lambda_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 1$$

$$\alpha = \frac{\kappa_2^2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4}{2\kappa_2 \alpha_1 \alpha_3} = \frac{2\kappa_2^2 + \mu_* \kappa_2(1 - \kappa_1)(1 - \kappa_2) - \mu_*^2 \kappa_1(1 + \kappa_2)}{2\kappa_2(1 + \mu_* \kappa_1)(\mu_* + \kappa_2)}, \quad \mu_* = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (2.11)$$

В зависимости от значения действительной постоянной  $\alpha$  числа  $\lambda_1, \lambda_2$  могут быть как действительными, так и комплексными. В частности, они могут быть и равными, причем это имеет место только в случае  $\alpha = -1$ , так как при  $\mu_* > 0, 1 < \kappa_j < 3, j = 1, 2$  (именно в таких пределах меняются значения  $\kappa_1, \kappa_2$  для реальных тел) всегда  $\alpha < 1$ .

Пусть  $\alpha \neq -1$ . Тогда собственные значения  $\lambda_k$  все различны, и существует [32] матрица  $P$  такая, что  $P^{-1}A^{-1}BP = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ . При этом, в качестве  $P$  можно взять матрицу с элементами

$$p_{1j} = \alpha_3 \lambda_j - \kappa_2 \alpha_2, \quad p_{2j} = \lambda_j p_{1j}, \quad p_{3j} = \kappa_2 \alpha_1 - \alpha_4 \lambda_j, \quad p_{4j} = \lambda_j^{-1} p_{3j} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.12)$$

где индекс  $j$  указывает на номер столбца матрицы. В данном случае матричная задача (2.10) распадается на четыре самостоятельные задачи:

$$\Psi_k^+(t) = \lambda_k \Psi_k^-(t) + f_k(t), \quad t \in L \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (2.13)$$

где  $f_k(t)$  – компоненты вектора-столбца  $P^{-1}A^{-1}g(t)$ .

Если функции  $\Psi_k(z), k = 1, 2, 3, 4$  найдены, то на основании формул (2.9) и равенства  $F(z) = P\Psi(z)$  находим

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^4 p_{1j} \Psi_j(z), \quad \Omega(z) = \sum_{j=1}^4 p_{3j} \Psi_j(z) \quad (2.14)$$

$$\overline{\Phi(\bar{z})} = \sum_{j=1}^4 p_{2j} \Psi_j(z), \quad \overline{\Omega(\bar{z})} = \sum_{j=1}^4 p_{4j} \Psi_j(z)$$

Следовательно, функции  $\Psi_j(z)$  должны удовлетворять двум условиям “симметрии”:

$$\sum_{j=1}^4 \bar{p}_{1j} \overline{\Psi_j(\bar{z})} = \sum_{j=1}^4 p_{2j} \Psi_j(z), \quad \sum_{j=1}^4 \bar{p}_{3j} \overline{\Psi_j(\bar{z})} = \sum_{j=1}^4 p_{4j} \Psi_j(z) \quad (2.15)$$

Кроме того, в силу представлений (2.3) и равенства  $\Psi(z) = P^{-1}F(z)$  в окрестности  $\infty$  они должны иметь представления

$$\Psi_k(z) = q_{k1}\gamma_1 + q_{k2}\bar{\gamma}_1 + q_{k3}\gamma_2 + q_{k4}\bar{\gamma}_2 + (q_{k1}\gamma_3 + q_{k2}\bar{\gamma}_3 + q_{k3}\gamma_4 + q_{k4}\bar{\gamma}_4)z^{-1} + O(z^{-2}) \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (2.16)$$

где  $q_{kj}$  – элементы матрицы  $Q = P^{-1}$ .

Решения класса  $h_0$  задач (2.13) при  $k = 3$  и  $k = 4$ , когда  $\lambda_3 = -1$  и  $\lambda_4 = 1$ , находятся по формулам [33]:

$$\Psi_3(z) = X_3(z) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_3(t) dt}{X_3^+(t)(t-z)} + A_3 + B_3 z \right], \quad \Psi_4(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_4(t) dt}{t-z} + B_4 \quad (2.17)$$

$$X_3(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \quad z \notin [a, b]; \quad X_3^+(z) = \frac{i}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}, \quad t \in (a, b)$$

где у функции  $X_3(z)$  берется та ветвь, которая однозначна в плоскости с разрезом по отрезку  $[a; b]$  и в окрестности  $\infty$  имеет вид  $X_3(z) = 1/z + (a+b)/(2z^2) + O(z^{-3})$ . Следовательно, в окрестности бесконечности

$$\Psi_3(z) = B_3 + \left( A_3 + \frac{a+b}{2} B_3 \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}), \quad \Psi_4(z) = B_4 - \left( \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f_4(t) dt \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad (2.18)$$

Сравнивая (2.16) и (2.18), находим

$$B_k = q_{k1}\gamma_1 + q_{k2}\bar{\gamma}_1 + q_{k3}\gamma_2 + q_{k4}\bar{\gamma}_2 \quad (k = 3, 4)$$

$$A_3 = q_{31}\gamma_3 + q_{32}\bar{\gamma}_3 + q_{33}\gamma_4 + q_{34}\bar{\gamma}_4 - d_3 B_3, \quad d_3 = (a+b)/2$$

При  $k = 1$  и  $k = 2$  решения задач (2.13) существенно зависят от того, каковы значения  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные или комплексные, что имеет место в случаях  $\alpha < -1$  и  $-1 < \alpha < 1$  соответственно. Поэтому рассмотрим эти случаи по отдельности.

**3. Случай  $\alpha < -1$ .** В этом случае числа  $\lambda_1, \lambda_2$  — действительные, причем  $-1 < \lambda_1 < 0, \lambda_2 < -1$  и  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , поэтому решения класса  $h_0$  задач (2.13) при  $k = 1$  и  $k = 2$  имеют вид [33]:

$$\Psi_k(z) = X_k(z) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_k(t) dt}{X_k^+(t)(t-z)} + A_k + B_k z \right] \quad (k = 1, 2) \quad (3.1)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left( \frac{z-b}{z-a} \right)^{i\delta}, \quad X_2(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^{i\delta}, \quad z \notin [a, b]$$

$$X_1^+(t) = -\frac{i}{\sqrt{(\beta-\alpha)(t-a)(b-t)}} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{i\delta}, \quad X_2^+(t) = -i \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{(t-a)(b-t)}} \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{i\delta}$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad \delta = \frac{1}{2\pi} \ln(\beta - \alpha)$$

где у функций  $X_k(z)$  берутся те ветви, которые однозначны вне разреза  $[a, b]$  и в окрестности  $\infty$  имеют представления

$$X_k(z) = \frac{1}{z} + \frac{a+b+(-1)^k 2i\delta(b-a)}{2z^2} + O(z^{-3}) \quad (k = 1, 2)$$

Следовательно, в окрестности бесконечности

$$\Psi_k(z) = B_k + \left( A_k + \frac{a+b+(-1)^k 2i\delta(b-a)}{2} B_k \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad (k = 1, 2) \quad (3.2)$$

Сравнивая (2.16) и (3.2), находим

$$B_k = q_{k1}\gamma_1 + q_{k2}\bar{\gamma}_1 + q_{k3}\gamma_2 + q_{k4}\bar{\gamma}_2$$

$$A_k = q_{k1}\gamma_3 + q_{k2}\bar{\gamma}_3 + q_{k3}\gamma_4 + q_{k4}\bar{\gamma}_4 - d_k B_k \quad (k = 1, 2) \quad (3.3)$$

$$d_1 = \frac{1}{2}(a+b) + i\delta(a-b), \quad d_2 = \bar{d}_1$$

Непосредственно можно показать, что функции (2.17), (3.1) удовлетворяют условиям (2.15).

Изучим поведение комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  вблизи вершины включения  $z = b$ . Согласно (2.17), (3.1), вблизи точки  $z = b$  функция  $\Psi_4(z) = O(\ln|z - b|)$ , а остальные функции  $\Psi_k(z)$  имеют вид:

$$\Psi_1(z) = \frac{C_1}{(z-b)^{1/2-i\delta}} + O(1), \quad \Psi_2(z) = \frac{C_2}{(z-b)^{1/2+i\delta}} + O(1), \quad \Psi_3(z) = \frac{C_3}{(z-b)^{1/2}} + O(1)$$

$$C_1 = (b-a)^{-1/2-i\delta} \left[ A_1 + B_1 b - \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2\pi} \int_a^b f_1(t) \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{1/2+i\delta} dt \right]$$

$$C_2 = (b-a)^{-1/2+i\delta} \left[ A_2 + B_2 b - \frac{1}{2\pi\sqrt{\beta-\alpha}} \int_a^b f_2(t) \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{1/2-i\delta} dt \right]$$

$$C_3 = (b-a)^{-1/2} \left[ A_3 + B_3 b - \frac{1}{2\pi} \int_a^b f_3(t) \sqrt{\frac{t-a}{b-t}} dt \right]$$
(3.4)

Из условий (2.15) и представлений (3.4) в силу действительности чисел  $p_{kj}$  следуют равенства:  $\bar{C}_3 = -C_3$  и  $C_2 = \bar{C}_1 p_{11}/p_{22}$ . Тогда, в силу (2.14), для  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  вблизи  $z = b$  справедливы представления

$$\Phi(z) = \frac{p_{11}C_1}{(z-b)^{1/2-i\delta}} + \frac{\lambda_1 p_{11} \bar{C}_1}{(z-b)^{1/2+i\delta}} + \frac{p_{13}C_3}{(z-b)^{1/2}} + O(\ln|z-b|)$$

$$\Omega(z) = \frac{p_{31}C_1}{(z-b)^{1/2-i\delta}} + \frac{\lambda_2 p_{31} \bar{C}_1}{(z-b)^{1/2+i\delta}} + \frac{p_{33}C_3}{(z-b)^{1/2}} + O(\ln|z-b|)$$

которые запишем в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi m}(z-b)} \left( \frac{K_1 - iK_2}{(z-b)^{-i\delta}} + \frac{\lambda_1(K_1 + iK_2)}{(z-b)^{i\delta}} \right) + \frac{iK_3}{(1+m)\sqrt{2\pi}(z-b)} + O(\ln|z-b|)$$

$$\Omega(z) = \frac{p_{31}}{2p_{11}\sqrt{2\pi m}(z-b)} \left( \frac{K_1 - iK_2}{(z-b)^{-i\delta}} + \frac{\lambda_2(K_1 + iK_2)}{(z-b)^{i\delta}} \right) + \frac{ip_{33}K_3}{(1+m)p_{13}\sqrt{2\pi}(z-b)} + O(\ln|z-b|)$$
(3.5)

$$m = \alpha_1/\alpha_3, \quad K_1 - iK_2 = 2\sqrt{2\pi m}p_{11}C_1, \quad K_3 = (1+m)p_{13}\sqrt{2\pi}\text{Im}C_3$$

В представлениях (3.5) постоянные множители  $2\sqrt{2\pi m}$  и  $(1+m)\sqrt{2\pi}$  в знаменателях взяты так, как они берутся в случаях открытой [34, 35] и закрытой [30] межфазной трещины соответственно. У многозначных функций  $\sqrt{z-b}$  и  $(z-b)^{i\delta}$  в этих представлениях берутся те ветви, которые однозначны в плоскости с разрезом по лучу  $(-\infty, b]$  и при  $z-b = 1$  принимают значение 1.

Аналогично, вблизи вершины  $z = a$  имеют место представления

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi m}(a-z)} \left( \frac{K_1 - iK_2}{(a-z)^{-i\delta}} + \frac{\lambda_1(K_1 + iK_2)}{(a-z)^{i\delta}} \right) + \frac{iK_3}{(1+m)\sqrt{2\pi}(a-z)} + O(\ln|a-z|)$$

$$\Omega(z) = \frac{p_{31}}{2p_{11}\sqrt{2\pi m(a-z)}} \left( \frac{K_1 - iK_2}{(a-z)^{-i\delta}} + \frac{\lambda_2(K_1 + iK_2)}{(a-z)^{i\delta}} \right) +$$

$$+ \frac{ip_{33}K_3}{(1+m)p_{13}\sqrt{2\pi(a-z)}} + O(\ln|a-z|)$$

$$K_1 - iK_2 = -2p_{11}\sqrt{\frac{2\pi m}{b-a}}(b-a)^{i\delta} \left[ A_1 + B_1 a + \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2\pi} \int_a^b f_1(t) \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{1/2-i\delta} dt \right]$$

$$K_3 = -(1+m)p_{13}\sqrt{\frac{2\pi}{b-a}} \operatorname{Im} \left[ A_3 + B_3 a + \frac{1}{2\pi} \int_a^b f_3(t) \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} dt \right] \quad (3.6)$$

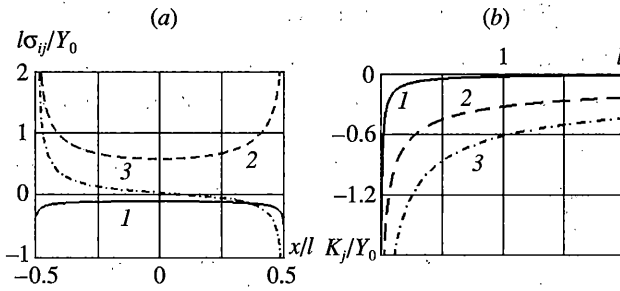
Таким образом, в случае  $\alpha < -1$  поведение комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ , значит и напряжений вблизи вершин включения определяется тремя действительными параметрами  $K_1, K_2, K_3$ , которые примем за коэффициенты интенсивности напряжений. Эти коэффициенты являются функциями от упругих параметров составной плоскости, от длины включения, заданных на  $\infty$  напряжений, вращения и заданных на сторонах включения условий (1.1), (1.2). В случае, когда условия (1.1), (1.2) однородные, т.е.  $q(t) = 0, h_k(t) = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ), то коэффициенты  $K_1, K_2, K_3$  являются линейными функциями от заданных на  $\infty$  напряжений  $\sigma_{x1}^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ , вращения  $\omega_{x1}^\infty$  и силы  $X + iY$ . В то же время, от упругих параметров среды и длины включения они зависят нелинейно и, как функции от указанных переменных, они линейно независимы между собой.

Так как при  $\alpha < -1$  параметр  $\delta = \ln|\sqrt{\alpha^2 - 1} - \alpha|/(2\pi) \neq 0$ , то напряжения вблизи вершины  $z = b$  имеют не только степенную особенность, определяемую функцией  $(z-b)^{-1/2}$ , но и осциллирующую особенность, определяемую функцией  $(z-b)^{i\delta}$ . Ясно, что представления напряжений вблизи вершины включения в данном случае отличаются от их представлений как вблизи вершины межфазной открытой или закрытой трещины, так и вблизи вершины тонкого жесткого, полностью сцепленного со средой включения, расположенного между различными изотропными средами. Это отличие определяется не только наличием степенной функции  $(z-b)^{-1/2}$  и другой осциллирующей функции  $(z-b)^{i\delta}$ , но и тремя коэффициентами интенсивности напряжений  $K_1, K_2, K_3$ . Подобная картина наблюдается, например, в случае трещины [36] или полностью сцепленного со средой тонкого жесткого включения между различными анизотропными средами [37]. Все сказанное имеет место и вблизи вершины  $z = a$ . Анализ значений параметра  $\alpha$  для возможных в реальности значений параметров  $\kappa_1, \kappa_2, \mu_*$  показывает, что в изучаемом случае  $-5/3 < \alpha < -1$ . Следовательно, как и в случаях открытой межфазной трещины [1, 38] и тонкого жесткого межфазного включения [39], полностью сцепленного со средой, значения показателя  $\delta$  осцилляции напряжений вблизи вершины включения в данном случае не превосходят значения  $(\ln 3)/(2\pi) \approx 0.175$ .

Для сравнения в табл. 1 для различных значений параметров  $\kappa_1, \kappa_2, \mu_* = \mu_2/\mu_1$  приведены значения  $\delta$  и абсолютные значения показателей

$$\delta_{cr} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \mu_* \kappa_1}{\mu_* + \kappa_2} \quad \text{и} \quad \delta_{in} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\kappa_2(1 + \mu_* \kappa_1)}{\kappa_1(\mu_* + \kappa_2)} \quad \left( \mu_* = \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)$$





Фиг. 2

осцилляции напряжений вблизи вершины открытой межфазной трещины и тонкого жесткого, полностью сцепленного со средой межфазного включения соответственно. При  $\alpha > -1$  показатель  $\delta$  не определен, поэтому при тех значениях параметров  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\mu_*$ , для которых  $\alpha > -1$ , значения  $\delta$  не приводятся.

На фиг. 2 приведены графики контактных напряжений  $\sigma_y^+$  на верхней и  $\sigma_y^-$ ,  $\tau_{xy}^-$  на нижней сторонах включения, а также графики коэффициентов интенсивности напряжений  $K_j$  вблизи его правой вершины в зависимости от длины  $l$  включения для случая, когда все исходные силовые данные, в том числе и краевые условия (1.1), (1.2) – нулевые, кроме главного вектора  $X + iY$  действующих на включение внешних усилий, равного  $(0.1 + i)Y_0$  ( $Y_0 > 0$ ). Включение занимает отрезок  $[-l/2, l/2]$  и расположено между полуплоскостями с упругими постоянными  $\kappa_1 = 2.0$ ,  $\kappa_2 = 2.5$  и  $\mu_* = \mu_2/\mu_1 = 10$ , для которых параметр  $\alpha = -1.067$  и показатель осцилляции напряжений  $\delta = 0.058$  (табл. 1). На фиг. 2, а кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $l\sigma_y^+/Y_0$ ,  $l\sigma_y^-/Y_0$  и  $l\tau_{xy}^-/Y_0$ , а на фиг. 2, б номер кривой соответствует номеру коэффициента  $K_j/Y_0$  ( $j = 1, 2, 3$ ):

Таблица 1

$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\mu_*$	$\delta$	$ \delta_{cr} $	$ \delta_{in} $	$\alpha$
2.0	1.5	10	–	0.096	0.050	-0.811
		12	–	0.098	0.053	-0.911
		15	–	0.100	0.055	-0.943
		20	–	0.103	0.057	-0.976
		50	0.044	0.107	0.061	-1.039
		100	0.055	0.109	0.063	-1.061
	2.5	9	0.041	0.080	0.115	-1.033
		10	0.058	0.083	0.118	-1.067
		12	0.077	0.087	0.122	-1.120
		15	0.093	0.091	0.127	-1.177
		20	0.108	0.096	0.131	-1.238
		50	0.131	0.104	0.140	-1.360

**4. Случай**  $-1 < \alpha < 1$ . В этом случае, согласно (2.11),  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , где  $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$ , причем  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$  и  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ , поэтому решения класса  $h_0$  задач (2.13) при  $k = 1$  и  $k = 2$  снова находятся по формулам (3.1), в которых надо брать

$$X_1(z) = \frac{1}{(z-a)^\gamma(z-b)^{1-\gamma}}, \quad X_2(z) = \frac{1}{(z-a)^{1-\gamma}(z-b)^\gamma}, \quad z \notin [a, b]$$

$$X_1^+(t) = -\frac{\beta_1 + i\beta_2}{(t-a)^\gamma(b-t)^{1-\gamma}}, \quad X_2^+(t) = \frac{\beta_1 - i\beta_2}{(t-a)^{1-\gamma}(b-t)^\gamma}, \quad t \in (a, b)$$

$$\gamma = (\arccos \alpha)/(2\pi), \quad \beta_1 = \sqrt{(1 + \alpha)/2}, \quad \beta_2 = \sqrt{(1 - \alpha)/2}$$

При этом, у функций  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$  надо брать те ветви, которые однозначны в плоскости с разрезом по отрезку  $[a, b]$  и в окрестности  $\infty$  имеют вид

$$X_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{\gamma a + (1 - \gamma)b}{z^2} + O(z^{-3}), \quad X_2(z) = \frac{1}{z} + \frac{(1 - \gamma)a + \gamma b}{z^2} + O(z^{-3})$$

Разлагая функции  $\Psi_k(z)$  ( $k = 1, 2$ ) в ряд Лорана в окрестности  $\infty$  и сравнивая их с представлениями (2.16), для нахождения постоянных  $A_k, B_k$  снова получим формулы (3.3), в которых надо брать  $d_1 = \gamma a + (1 - \gamma)b$ ,  $d_2 = (1 - \gamma)a + \gamma b$ . Выполнение условий (2.15) для функций  $\Psi_k(z)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) в данном случае проверяется также непосредственно.

Вблизи точки  $z = b$  функции  $\Psi_1(z)$ ,  $\Psi_2(z)$  имеют представления

$$\Psi_1(z) = \frac{C_1}{(z-b)^{1-\gamma}} + O(1), \quad \Psi_2(z) = \frac{C_2}{(z-b)^\gamma} + O(1)$$

$$C_1 = (b-a)^{-\gamma} \left[ A_1 + B_1 b + \frac{\beta_1 - i\beta_2}{2\pi i} \int_a^b f_1(t) \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^\gamma dt \right]$$

$$C_2 = (b-a)^{\gamma-1} \left[ A_2 + B_2 b - \frac{\beta_1 + i\beta_2}{2\pi i} \int_a^b f_2(t) \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{1-\gamma} dt \right]$$

а для функций  $\Psi_3(z)$ ,  $\Psi_4(z)$  снова справедливы представления (3.4).

Удовлетворяя условиям (2.15) в окрестности точки  $z = b$ , как и в предыдущем случае, получим, что число  $C_3$  является чисто мнимым, а числа  $C_1, C_2$  связаны равенствами  $\bar{p}_{11}\bar{C}_1 - p_{21}C_1 = 0$ ,  $\bar{p}_{12}\bar{C}_2 - p_{22}C_2 = 0$ , откуда получаем  $C_1 = (1 + i\xi)C_1'$ ,  $C_2 = (1 - i\xi)C_2'$ , где  $C_j' = \text{Re} C_j$  ( $j = 1, 2$ ) и  $\xi = (\kappa_2\alpha_1 + \kappa_1\alpha_3)/(\kappa_1\alpha_3\beta)$ . Тогда комплексные потенциалы  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  вблизи вершины  $z = b$  имеют представления

$$\Phi(z) = \frac{(1 + i\xi)p_{11}K_1}{2(2\pi m)^\gamma(z-b)^{1-\gamma}} + \frac{(1 - i\xi)p_{12}K_2}{2(2\pi m)^{1-\gamma}(z-b)^\gamma} + \frac{iK_3}{(1+m)\sqrt{2\pi}(z-b)} + O(\ln|z-b|)$$

$$\Omega(z) = \frac{(1 + i\xi)p_{31}K_1}{2(2\pi m)^\gamma(z-b)^{1-\gamma}} + \frac{(1 - i\xi)p_{32}K_2}{2(2\pi m)^{1-\gamma}(z-b)^\gamma} + \frac{ip_{33}K_3}{(1+m)p_{13}\sqrt{2\pi}(z-b)} + O(\ln|z-b|)$$

$$K_1 = 2(2\pi m)^\gamma \text{Re} C_1, \quad K_2 = 2(2\pi m)^{1-\gamma} \text{Re} C_2, \quad K_3 = (1+m)p_{13}\sqrt{2\pi} \text{Im} C_3$$

Таблица 2

$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\mu_*$	$\alpha$	$1 - \gamma$
2.0	1.5	0.01	0.975	0.965
		0.1	0.783	0.893
		0.5	0.271	0.794
		1.0	-0.056	0.741
		2.0	-0.381	0.688
		10.0	-0.881	0.579
		0.01	0.979	0.968
	2.5	0.1	0.816	0.902
		0.5	0.358	0.808
		1.0	0.033	0.755
		2.0	-0.338	0.695
		10.0	-1.067	-

и у всех многозначных функций берутся те ветви, которые однозначны в плоскости с разрезом по лучу  $(-\infty, b]$  и при  $z - b = 1$  принимают значение 1.

Аналогично, вблизи вершины  $z = a$  имеют место представления

$$\Phi(z) = \frac{(1 - i\xi)p_{12}K_1}{2(2\pi m)^\gamma(a-z)^{1-\gamma}} + \frac{(1 + i\xi)p_{11}K_2}{2(2\pi m)^{1-\gamma}(a-z)^\gamma} + \frac{iK_3}{(1+m)\sqrt{2\pi(a-z)}} + O(\ln|a-z|)$$

$$\Omega(z) = \frac{(1 - i\xi)p_{32}K_1}{2(2\pi m)^\gamma(a-z)^{1-\gamma}} + \frac{(1 + i\xi)p_{31}K_2}{2(2\pi m)^{1-\gamma}(a-z)^\gamma} + \frac{ip_{33}K_3}{(1+m)p_{13}\sqrt{2\pi(a-z)}} + O(\ln|a-z|)$$

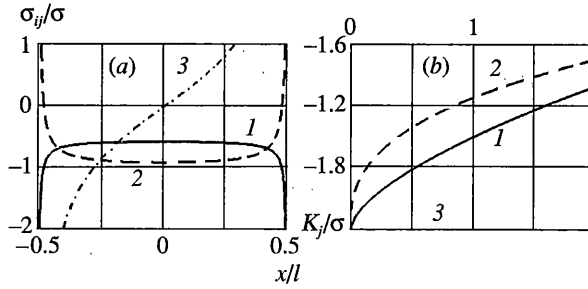
$$K_1 = -2\left(\frac{2\pi m}{b-a}\right)^\gamma \operatorname{Re} \left[ A_2 + B_2 a + \frac{\beta_1 + i\beta_2}{2\pi i} \int_a^b f_2(t) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\gamma dt \right]$$

$$K_2 = -2\left(\frac{2\pi m}{b-a}\right)^{1-\gamma} \operatorname{Re} \left[ A_1 + B_1 a - \frac{\beta_1 - i\beta_2}{2\pi i} \int_a^b f_1(t) \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{1-\gamma} dt \right]$$

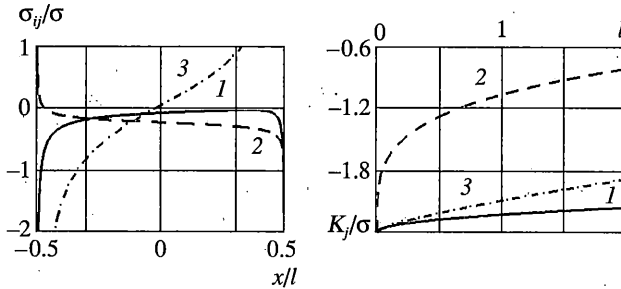
где коэффициент  $K_3$  находится по формуле (3.6).

Таким образом, в случае  $|\alpha| < 1$  особенность комплексных потенциалов и напряжений вблизи вершин включения определяется тремя степенными функциями с показателями  $-\gamma$ ,  $-1/2$  и  $\gamma - 1$ , где  $\gamma = \arccos \alpha / (2\pi)$  зависит только от упругих параметров составной плоскости. При этом интенсивность напряжений, как и в случае  $\alpha < -1$ , определяется тремя действительными коэффициентами  $K_1, K_2, K_3$ . В то же время, осциллирующая особенность у напряжений отсутствует. Так как параметр  $\alpha$  может принимать все значения от  $-1$  до  $1$  (например, при  $\mu_* \rightarrow 0$  он стремится к  $1$ ), то наивысший порядок особенности напряжений вблизи вершины включения, равный  $1 - \gamma$ , всегда больше  $1/2$  и может быть как угодно близким к  $1$ . Значения этого порядка, а также значения параметра  $\alpha$  для некоторых значений упругих параметров  $\kappa_1, \kappa_2, \mu_* = \mu_2/\mu_1$  приведены в табл. 2.

В частности, в случае однородной плоскости при  $\mu_1 = \mu_2$  и  $\kappa_1 = \kappa_2$ , параметр  $\alpha = 0$ , показатель  $\gamma = 1/4$  и напряжения вблизи вершины изучаемого включения имеют сте-



Фиг. 3



Фиг. 4

пенную особенность порядка  $-3/4$ . Асимптотика напряжений вблизи указанных точек в этом случае подобна асимптотике напряжений вблизи вершины тонкого жесткого включения, одна сторона которого полностью сцеплена со средой, а другая свободна от какого-либо контакта с ней [3, 8, 10–12], когда интенсивность напряжений вблизи вершины включения определяется осциллирующе-степенной функцией с показателем  $-3/4 + i\gamma_0$  ( $\gamma_0$  – некоторое действительное число) и с двумя действительными коэффициентами. Однако, в отличие от последнего случая, в изучаемом нами случае осциллирующая особенность у напряжений вовсе отсутствует и, кроме того, их интенсивность при степенной функции с показателем  $-3/4$  определяется лишь одним действительным коэффициентом  $K_1$ .

Для составной плоскости, характеризуемой упругими постоянными  $\nu_1 = 0.37$ ,  $\mu_1 = 40$  МПа и  $\nu_2 = 0.22$ ,  $\mu_2 = 174.2$  МПа, соответствующими композиту  $\text{Cu-Al}_2\text{O}_3$ , на фиг. 3 приведены графики контактных напряжений на сторонах включения, занимающего отрезок  $[-l/2, l/2]$  и графики коэффициентов  $K_j$  вблизи правой вершины включения в зависимости от его длины  $l$ , когда плоскость находится в плоском деформируемом состоянии и на  $\infty$  действуют сжимающие напряжения  $\sigma_y^\infty = -\sigma/2$ ,  $\sigma_{x1}^\infty = -\sigma$ ,  $\sigma_{x2}^\infty = -2.626\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) при остальных нулевых исходных силовых данных, включая краевые условия (1.1), (1.2). Кривые 1, 2 и 3 на фиг. 3, а соответствуют значениям  $\sigma_y^+/\sigma$ ,  $\sigma_y^-/\sigma$  и  $\tau_{xy}^-/\sigma$ , а на фиг. 3, б – значениям  $K_1/\sigma$ ,  $K_2/\sigma$  и  $K_3/\sigma$ . В данном случае параметр  $\alpha = -0.689$  и напряжения вблизи вершин включения имеют степенные особенности порядков  $\gamma = 0.371$ ,  $1/2$  и  $1 - \gamma = 0.629$ , из которых доминирующей является последняя. Графики тех же контактных напряжений с множителем  $\sigma^{-1}$  и коэффициентов  $K_j/\sigma$  в случае однородной плоскости с упругими постоянными  $\nu_1 = \nu_2 = 0.37$  и  $\mu_1 = \mu_2 = 40$  МПа, когда на  $\infty$  действуют

напряжения  $\sigma_{x1}^{\infty} = \sigma_{x2}^{\infty} = -\sigma$ ,  $\tau_{xy}^{\infty} = 0.05\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) при остальных нулевых исходных силовых данных, приведены на фиг. 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00160).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 131–137.
2. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 4. P. 829–836.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. Ting T.C.T. Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites // Intern. J. Solids and Structures. 1986. V. 22. № 9. P. 965–983.
5. Houtulka T.A., Keer L.M. A mathematical solution of a special mixed-boundary value problem of anisotropic elasticity // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1995. V. 48. № 4. P. 636–658.
6. Ballarini R. A certain mixed boundary value problem for a bimaterial interface // Intern. J. Solids and Structures. 1995. V. 32. № 3–4. P. 279–289.
7. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Изв. НАН Армении. 1995. Т. 48. № 4. С. 57–65.
8. Markenscoff X., Ni L. The debonded interface anticrack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. V. 63. № 3. P. 621–627.
9. Шерман Д.И. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 330–334.
10. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
11. Keer L.M. Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut // J. Elasticity. 1975. V. 5. № 2. P. 89–98.
12. Gdoutos E.E., Kourounis C.G., Kattis M.A., Zacharopoulos D.A. A partially unbonded rigid fiber inclusion in an infinite matrix // Advances in Fracture Mechanics. 1989. P. 223–227.
13. Морарь Г.А. Метод разрывных решений в механике деформируемых тел. Кишинев: Штиинца, 1990. 130 с.
14. Босаков С.В. Решение одной контактной задачи для плоскости со щелью // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 7. С. 127–129.
15. Босаков С.В. Расчет заглубленных анкерных плит конечной жесткости // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 3. С. 81–87.
16. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1993. 224 с.
17. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 907–912.
18. Зверович Э.И. Смешанная задача теории упругости для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси // Тр. симпози. по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Тбилиси: Мецниереба, 1973. Т. 1. С. 103–114.
19. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С. 106–113.
20. Захаров В.В., Никитин Л.В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов // Механика композитных материалов. 1983. № 1. С. 20–25.
21. Mkhitarian S.M. On one class of mixed problems of theory of elasticity // Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis: Proc. Intern. Symp. Tbilisi, 1993. P. 163–171.
22. Антипов Ю.А. Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 60. № 4. С. 669–680.

23. Кундрат Н.М. Локальное разрушение в композиции с жесткими линейными включениями // Механика композиционных материалов и конструкций. 1998. Т. 4. № 4. С. 115–127.
24. Кундрат Н.М. Предельное равновесие композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 1. С. 103–112.
25. Кундрат Н.М. Исследование механизмов разрушения в композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 3. С. 333–342.
26. Кундрат Н.М. Отслоение жесткого включения в упругопластической матрице при растяжении сосредоточенными силами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. Т. 7. № 1. С. 107–113.
27. Кундрат М.М. Відшарування жорсткого лінійного включення при статичному навантаженні // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2001. Т. 37. № 1, С. 37–40.
28. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 76–92.
29. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 2. P. 418–423.
30. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
31. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
32. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
33. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
34. Саверук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 620 с. (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4-х томах. Т. 2).
35. Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 1. P. 98–103.
36. Willis J.R. Fracture mechanics of interfacial cracks // J. Mech. and Phys. Solids. 1971. V. 19. № 6. P. 353–368.
37. Asundi A., Deng W. Rigid inclusions on the interface between dissimilar anisotropic media // J. Mech. and Phys. Solids. 1995. V. 43. № 7. P. 1045–1058.
38. Williams M.L. The stress around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. America. 1959. V. 49. № 2. P. 199–204.
39. Ballarini R. A rigid line inclusion at a bimaterial interface // Eng. Fract. Mech. 1990. V. 37. № 1. P. 1–5.

Чебоксары

Поступила в редакцию  
9.09.2003