

РАЗРУШЕНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ, КОНСТАНТЫ РАЗРУШЕНИЯ

Теория идеальных жесткопластических тел является одним из наиболее полно разработанных разделов механики деформируемых сред.

Вместе с тем, в рамках этой теории исследовались, как правило, задачи о предельном равновесии, т.е. начале пластического течения. Получено ограниченное число решений задач с учетом изменения геометрии тела, собственно, о пластическом течении: задачи о внедрении клина в полупространство, раздавливании клина плоским штампом [1–3], одноосном растяжении плоского [4] и цилиндрического [5] образцов, растяжение полосы с V-образными вырезами [6]. На основе этих решений в работах [7–9] получен определенный класс решений контактных задач для тел произвольной формы с учетом изменений геометрии свободной поверхности. При решении таких задач деформации тел оценивались визуально по искажению прямоугольной сетки. Более точное описание процесса деформирования требует использование в качестве меры деформации тензорных характеристик (тензора дисторсии, тензора конечных деформаций Альманси и т.п.). Решение задач с учетом изменения геометрии особенно необходимо при расчете деформаций в окрестности поверхностей разрыва скоростей перемещений и других особенностей пластической области.

Другой проблемой теории идеальных жесткопластических тел является неединственность положения, вида пластической области и вместе с этим неединственность поля скоростей перемещений, которое определяет изменение геометрии тела. Для практического использования теоретических решений требуется критерий выбора предпочтительного пластического течения и формулировка условий, определяющих изменение пластической области.

Разрушение жесткопластических тел исследовалось в [10, 11].

Ниже предлагается подход к развитию указанных аспектов теории идеальных жесткопластических тел с разрушением в условиях плоской и осесимметричной деформации.

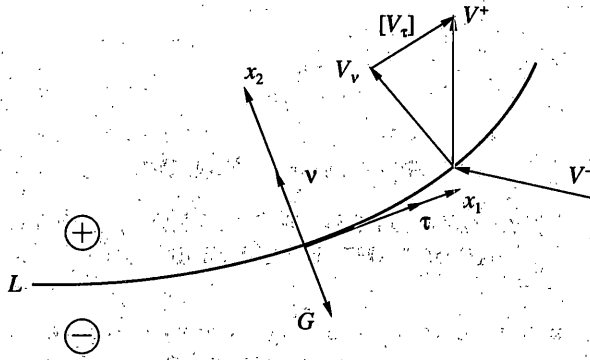
1. Определение полей деформаций. Выберем в качестве меры деформации тензор конечных деформаций Альманси \mathbf{E} , который определяется через тензор дисторсии \mathbf{A} :

$$E_{ij} = 1/2(\delta_{ij} - x_{k,j}^0 x_{k,i}^0) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad A_{ij} = x_{j,i}^0 \quad (1.1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, x_i^0 – лагранжевы координаты частицы, x_i – эйлеровы координаты частицы.

Изменения этих тензоров вдоль траектории движения частицы определяются уравнениями [12]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} + \mathbf{W}^*\mathbf{A} = 0, \quad \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \mathbf{E}\mathbf{W} + \mathbf{W}^*\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad W_{ik} = V_{i,k}, \quad W_{ki}^* = V_{k,i} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

где $d/dt = \partial/\partial t + V_k \partial/\partial x_k$ – субстанциональная производная, V_k – скорость перемещения частиц, $\epsilon_{ij} = 1/2(V_{i,j} + V_{j,i})$ – тензор скоростей деформаций.

Поле скоростей перемещений может иметь особенности (поверхность разрыва V_i , центр веера характеристик). Поэтому накопление деформации осуществляется при двух условиях: в непрерывном поле скоростей V_i согласно уравнениям (1.2) и при пересечении особенностей поля V_i , на которых компоненты ϵ_{ij} могут обращаться в бесконечность.

Изменение деформаций при пересечении особенностей поля скоростей V_i рассматривалось в [9, 13].

Рассмотрим деформацию частицы в условиях плоской деформации при пересечении линии разрыва скоростей перемещений (фиг. 1), которая распространяется с нормальной скоростью $G_i = -Gv_i$. Движение среды будем описывать в форме Эйлера. Введем обозначения

$$[x_{i,j}^0] = x_{i,j}^{0+} - x_{i,j}^{0-}, \quad [V_i] = V_i^+ - V_i^- \quad (1.3)$$

Здесь индексы (+) и (-) обозначают определенную сторону линии разрыва.

Будем считать, что ниже линии L материал недеформирован

$$x_{i,j}^{0-} = \delta_{ij} \quad (1.4)$$

Вследствие гипотезы сплошности среды функции x_i^0 предполагаются непрерывными. Как показано в [14] для разрывов производных таких функций имеют место следующие геометрические и кинематические условия совместности:

$$[x_{i,j}^0] = \lambda_i v_j, \quad [\partial x_i^0 / \partial t] = \lambda_i G \quad (1.5)$$

где v_i – компоненты единичного вектора нормали к линии L ; $G_i = -Gv_i$ – нормальная скорость движения линии L ; λ_i – некоторые функции, определенные на линии разрыва.

Вдоль каждой траектории материальной частицы лагранжевы координаты постоянны, поэтому

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0 \quad (1.6)$$

Отсюда следует

$$[\partial x_j^0 / \partial t] = [V_k \partial x_j^0 / \partial x_k] \quad (1.7)$$

или, учитывая соотношения (1.4) и (1.5), получим

$$[\partial x_j^0 / \partial t] = [V_j] + \lambda_j V_v \quad (1.8)$$

Здесь $V_v = V_k^+ v_k = V_k^- v_k$ – нормальная компонента скорости движения частиц на линии разрыва, которая вследствие гипотезы сплошности среды должна быть непрерывна. Поэтому вектор разрыва скорости $[V_j]$ всегда коллинеарен единичному вектору касательной линии разрыва τ_j , т.е.

$$[V_i] = [V_\tau] \tau_i \quad (1.9)$$

где $[V_\tau]$ – разрыв касательной составляющей скорости перемещений.

Из уравнений (1.3)–(1.6) следует

$$\lambda_i = \frac{[V_\tau]}{G + V_v} \tau_i, \quad [x_{i,j}^0] = \frac{[V_\tau]}{G + V_v} \tau_i v_j, \quad x_{i,j}^{0+} = \delta_{ij} + \frac{[V_\tau]}{G + V_v} \tau_i v_j \quad (1.10)$$

Заметим, что абсолютное значение величины

$$H = [V_\tau] k / (G + V_v) \quad (1.11)$$

имеет физический смысл объемной плотности энергии диссипации, получаемой материальной частицей при пересечении поверхности разрыва скоростей. Обозначим

$$W = H/k \quad (1.12)$$

объемную плотность энергии диссипации, отнесенную к пределу текучести. Выражения (1.11), (1.12) можно записать в виде

$$\lambda_i = W \tau_i, \quad [x_{i,j}^0] = W \tau_i v_j, \quad x_{i,j}^{0+} = \delta_{ij} + W \tau_i v_j \quad (1.13)$$

Из (1.13) следует, что в условиях плоской деформации основные инварианты тензора E_{ij} и угол θ между первым главным направлением тензора Альманси и касательной к линии разрыва скоростей L вычисляются через величину W по формулам

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2E_{11} / (E_{11} - E_{22}) = -2/W$$

$$I_E = 1/2(E_{11} + E_{22}) = -1/4 W^2 \quad (1.14)$$

$$II_E = (E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2 = W^4 / (4 + W^2)$$

$$E_1 = \frac{W^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} - 1 \right), \quad E_2 = -\frac{W^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{W^2}} + 1 \right)$$

Полученные соотношения существенно зависят от движения особенностей поля скоростей относительно материальных частиц, которое может быть определено только при решении задачи с учетом изменения геометрии тела.

В условиях плоской деформации в связи с несжимаемостью идеального жесткопластического тела только один инвариант тензора E является независимым (например, E_1) и он может быть принят за характеристику величины деформации частицы. Инвариант E_1 является монотонной функцией W и величина W также может характеризовать величину деформации частицы при пересечении линии разрыва скоростей перемещений.

Можно показать, что в окрестности поверхности разрыва скоростей перемещений реализуется плоская деформация и (1.14) верно при условии (1.3) для общего случая пространственной деформации.

Если материал до пересечения линии L деформировался, и компоненты тензора дисторсии имели значения $x_{i,j}^{0-}$, то компоненты тензора дисторсии за линией L будут иметь значения

$$x_{i,j}^{0+} = (\delta_{ik} + W\tau_i\nu_k)x_{k,j}^{0-} \quad (1.15)$$

2. Критерии выбора предпочтительного решения. Модель идеального жесткопластического тела является предельной по отношению к другим более сложным моделям деформируемых сред (упрочняющемуся жесткопластическому телу, упругопластическому телу и т.п.), в рамках которых решение является, как правило, единственным. И этим моделям среди множества решений должно соответствовать некоторое предельное решение для модели идеального жесткопластического тела. Прямой предельный переход затруднен отсутствием точных решений для сложных моделей. Критерий выбора предпочтительного пластического течения должен быть сформулирован из общих термодинамических и экспериментальных закономерностей.

Одной из экспериментально замеченных закономерностей является осреднение деформаций в процессе пластического течения упрочняющегося материала [15]. На основании этого можно сформулировать критерий выбора предпочтительного решения и его развития.

2.1. Пластическое течение развивается таким образом, что максимальная деформация в пластической области (E_1) минимальна

$$\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} E_1 \quad (2.1)$$

где Ω – возможные пластические области для полных решений задачи, $d\Omega$ – возможные изменения пластической области при пластическом течении в данный момент времени, которое отображает движение особенностей пластической области.

Учитывая (1.14), критерий (2.1) можно переформулировать.

2.2. Пластическое течение развивается таким образом, что максимальная удельная энергия диссипации в пластической области минимальна

$$\inf_{d\Omega} \sup_{\Omega} \bar{W} \quad (2.2)$$

2.3. Пластическое течение развивается таким образом, что приращение работы (δA), необходимой для деформирования тела, максимально $\sup_{d\Omega} \delta A$.

Выбор критериев 2.1–2.3 обосновывается в п. 3. Возможны и другие критерии.

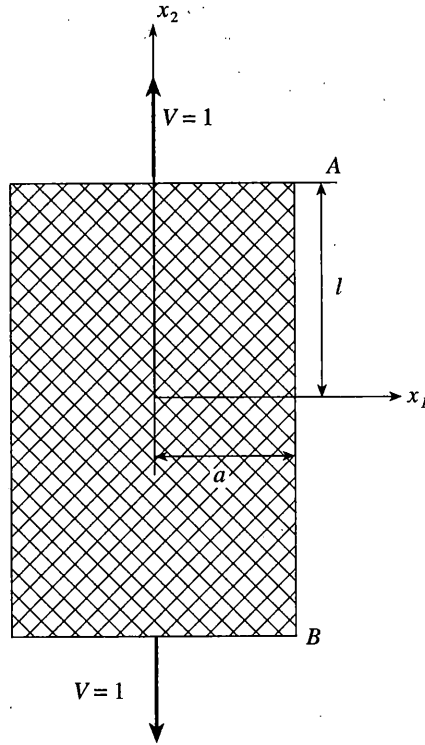
3. Задача о растяжении полосы при кинематических граничных условиях. Пусть верхняя и нижняя плоскости, ограничивающих полосы, движутся, соответственно, вверх и вниз со скоростью $V = 1$. Возможно бесконечное множество полных решений этой задачи (фиг. 2) [16].

3.1. Растяжение плоского образца с непрерывным полем скоростей. Наряду с решением Оната–Прагера существует решение для случая с непрерывным полем скоростей перемещений (фиг. 2). Предполагается, что захваты, обеспечивающие перемещение нижнего и верхнего концов образца, не препятствуют движению материала вдоль оси x_1 .

Данные граничные условия приводят, при предположении, что весь образец находится в пластическом состоянии, к однородному напряженному состоянию:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = 2k, \quad \sigma_{12} = 0 \quad (3.1)$$

и прямолинейному полю линий скольжения, наклоненных к оси Ox_1 под углом $\varphi = \pi/4$.



Фиг. 2

Определение поля скоростей при плоской деформации сводится к интегрированию уравнений

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) (-\text{ctg } 2\varphi) \quad (3.2)$$

При $\varphi = \pi/4$ система уравнений примет вид

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0 \quad (3.3)$$

После преобразований уравнения (3.3) приводятся к двум волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} = 0 \quad (3.4)$$

общее решение которых имеет вид:

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &= \psi_1(x_2 - x_1) + \psi_2(x_2 + x_1) \\ V_2(x_1, x_2) &= \theta_1(x_2 - x_1) + \theta_2(x_2 + x_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\theta_1, \theta_2, \psi_1, \psi_2$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Будем рассматривать симметричное пластическое течение с двумя осями симметрии x_1 и x_2 . Граничные условия для скоростей перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad V_2 = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \\ V_1 &= \text{const} \quad \text{при} \quad x_1 = a, \quad V_2 = V \quad \text{при} \quad x_2 = 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) в (3.6), имеем $\psi_1(x_2) + \psi_2(x_2) = 0$, $\theta_1(-x_1) + \theta_2(x_1) = 0$, откуда следует, что

$$\psi_1(x_2) = -\psi_2(x_2) = \psi(x_2), \quad \theta_1(-x_1) = -\theta_2(x_1) = \theta(x_1) \quad (3.7)$$

При дифференцировании уравнений (3.3) возможно приобретение новых решений. Подставим (3.5) в (3.3):

$$-\psi'_1 + \psi'_2 + \theta'_1 + \theta'_2 = 0, \quad \psi'_1 + \psi'_2 - \theta'_1 + \theta'_2 = 0 \quad (3.8)$$

или, учитывая (3.7):

$$-\psi' - \psi' + \theta' + \theta' = 0, \quad \psi' - \psi' - \theta' + \theta' = 0 \quad (3.9)$$

получим, что $\psi' = \theta'$.

Пусть $\psi' = \theta' = A'$, где A – некоторая дифференцируемая функция, тогда $A = \theta = \psi + C$, где $C = \text{const}$. Из граничных условий (3.6) следует

$$V_1 = A(x_2) - A(x_2) + C = 0, \quad V_2 = A(-x_1) + A(x_1) = 0 \quad (3.10)$$

Из первого равенства (3.10) следует, что $A(t)$ – нечетная функция, из второго следует, что $C = 0$.

Решение системы уравнений (3.2) при данных граничных условиях определяется в виде

$$\begin{aligned} V_1 &= A(x_2 - x_1) - A(x_2 + x_1) \\ V_2 &= A(x_2 - x_1) + A(x_2 + x_1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $A(t)$ – нечетная дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям.

Объемная плотность мощности энергии диссипации, учитывая (3.1), запишется в виде

$$dW/dt = \epsilon_{ij} \sigma_{ij} = \epsilon_{22} 2k = \partial V_2 / \partial x_2 2k = 4kA', \quad A' > 0 \quad (3.12)$$

Деформация материала может происходить неоднородно по объему образца. Модель жесткопластического тела является предельной по отношению к другим более сложным моделям, например, к модели упрочняющегося тела, в случае, когда параметр упрочнения стремится к нулю. Упрочнение тесно связано с деформациями материала – там, где частицы материала ранее деформировались, произошло упрочнение, и последующие деформации происходят интенсивней в соседних частицах материала, что приводит к выравниванию деформаций по всему объему образца и равномерному их накоплению. То, что упрочнение материала способствует равномерному распределению деформаций, отмечалось и другими авторами (см. [15]). Данные рассуждения определяют критерий выбора функции A в (3.11). Такому условию отвечает класс линейных функций вида $A(t) = ct$, где $c = \text{const}$.

Тогда из (3.11) и граничных условий (3.6) следует

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2) &= c(x_2 - x_1) + c(x_2 + x_1) \\ V_2(x_1, x_2) &= c(x_2 - x_1) - c(x_2 + x_1) \\ c &= v/2l \end{aligned} \quad (3.13)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций ϵ_{ij} определяются в виде

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -\frac{V}{l}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{V}{l}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (3.14)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2} = \frac{V}{l}, \quad l = l_0 + Vt$$

Объемная плотность мощности диссипации энергии $W = \epsilon_{ij} \sigma_{ij} = 4kc$ одинакова во всех частицах образца.

Компоненты тензоров E_{ij} и ϵ_{ij} связаны уравнениями (1.2)

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} v_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \epsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.15)$$

В случае плоской деформации, компоненты тензоров E_{ij} , ϵ_{ij} можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_{11} &= e + g \cos 2\theta, & E_{22} &= e - g \cos 2\theta, & E_{12} &= g \sin 2\theta \\ \epsilon_{11} &= \gamma \cos 2\psi, & \epsilon_{22} &= -\gamma \cos 2\psi, & \epsilon_{12} &= \gamma \sin 2\psi \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$e = 1/2(E_{11} + E_{22}), \quad g = 1/2 \sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}, \quad \gamma = 1/2 \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2}$$

где θ , ψ – соответственно углы наклона первого главного направления тензоров E_{ij} и ϵ_{ij} к оси Ox .

Система (3.15) принимает вид

$$de/dt + 2\gamma g \cos 2(\theta - \psi) = 0 \quad (3.17)$$

$$dg/dt + 2\gamma e \cos 2(\theta - \psi) = \gamma \cos 2(\theta - \psi) \quad (3.18)$$

$$2g \frac{d\theta}{dt} - 2\gamma e \sin 2(\theta - \psi) + g \left[\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right] = -\gamma \sin 2(\theta - \psi) \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} V_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2$$

где d/dt – материальная производная по времени.

Эти уравнения устанавливают связь между инвариантами тензоров Альманси e , g и скоростей деформаций γ и их главными направлениями θ , ψ вдоль траекторий движения частицы материала.

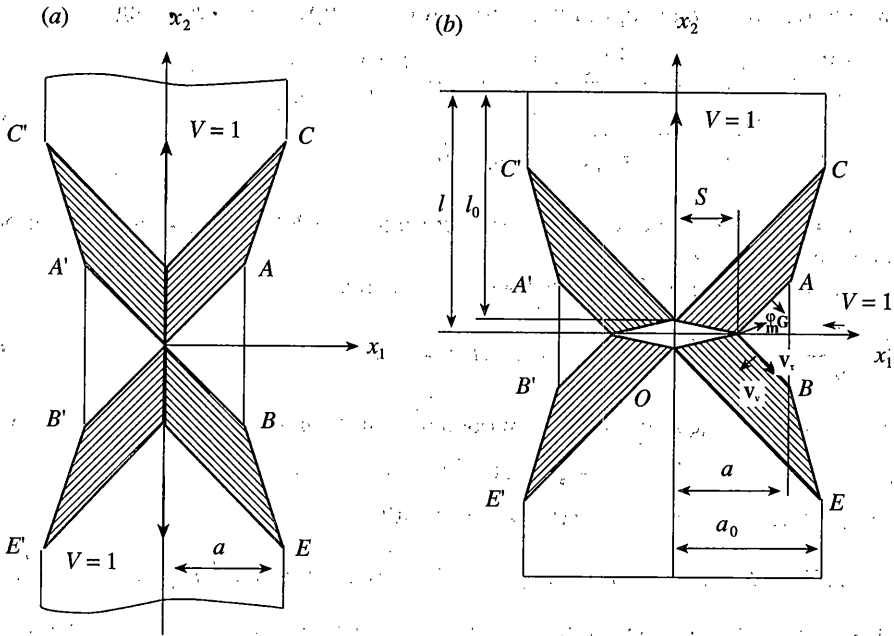
При рассматриваемой однородной деформации углы θ и ψ не изменяются ($\theta = \psi = \pi/2$), тогда уравнение (3.20) является тождеством и общее решение системы (3.18) определяется двумя интегралами

$$e^2 - e = g^2, \quad \ln|2g - 2e + 1| = (l_0 + Vt)^2 / l_0^2 \quad (3.20)$$

Вводя обозначение $\delta = Vt/l_0$ (относительное удлинение образца), получим

$$e = \frac{(2\delta + \delta^2)^2}{4(\delta + 1)^2}, \quad g = e + \frac{1}{2}\delta^2 + \delta \quad (3.21)$$

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\delta + 1)^2}, \quad E_2 = e - g = -\frac{1}{2}\delta^2 - \delta$$



Фиг. 3

3.2. Растяжение плоского образца с разрывным полем скоростей. Одним из вариантов решения этой задачи является известное решение Е. Оната и В. Прагера [1] (фиг. 3, а), в котором верхний $CA'OAC$ и нижний $EB'OBE$ концы полосы движутся со скоростями V , соответственно, вверх и вниз. Области OAB и $OA'B'$ также движутся как жесткие, соответственно, в отрицательном и положительном направлениях оси x_1 . Пластическая деформация материала здесь локализуется вдоль изолированных линий скольжения BOA' и $B'OA$, которые являются линиями разрыва скоростей перемещений. Поле деформаций для такой постановки задачи подробно исследовалось в [9, 17]. Особенностью данной постановки задачи является разрывность поля скоростей перемещений, скачкообразное увеличение деформаций при пересечении частицей линий разрыва скоростей и локализация деформаций в заштрихованной на фиг. 3 области.

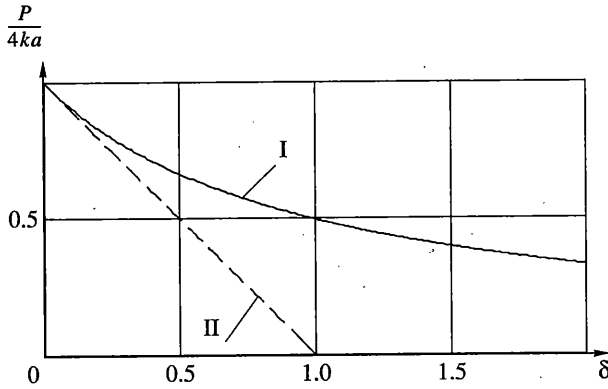
Главные значения тензора Альманси определяются в этом случае согласно [2] выражениями (1.11), (1.12), (1.14):

$$[V_{\tau}] = V\sqrt{2}, \quad V_v = V/\sqrt{2}, \quad G = 0, \quad E_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414, \quad W = 2 \quad (3.22)$$

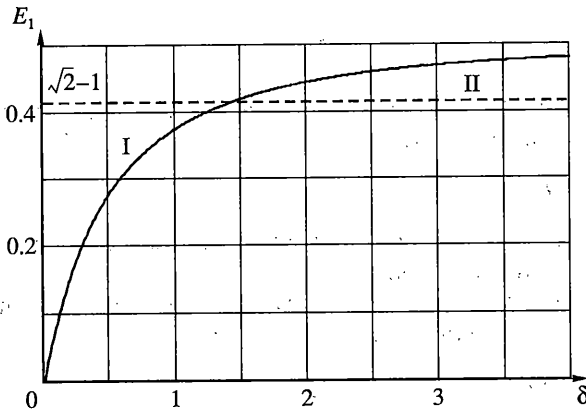
где W – объемная плотность диссипации энергии в частице материала при пересечении линии разрыва скоростей OA , $[V_{\tau}]$ – разрыв касательной составляющей скорости перемещений на линии OA ; V_v – нормальная компонента скорости на линии OA ; G – нормальная скорость распространения линии OA (в данной задаче линия OA неподвижна, т.е. $G = 0$).

Решение с однородным полем скоростей (I) допускает переход на решение с разрывным полем скоростей (II) в любой стадии деформирования. Обратный переход невозможен.

На фиг. 4, 5 представлены зависимости $E_1(\delta)$ и $P(\delta)/2ka$, из которых следует, что решение с однородным полем скоростей перемещений приводит к меньшим деформациям ($\delta < 1.4$), большим усилиям и меньшей накопленной частью материала удель-



Фиг. 4



Фиг. 5

ной энергии диссипации. С точки зрения критериев (2.1)–(2.3) это решение является предпочтительным.

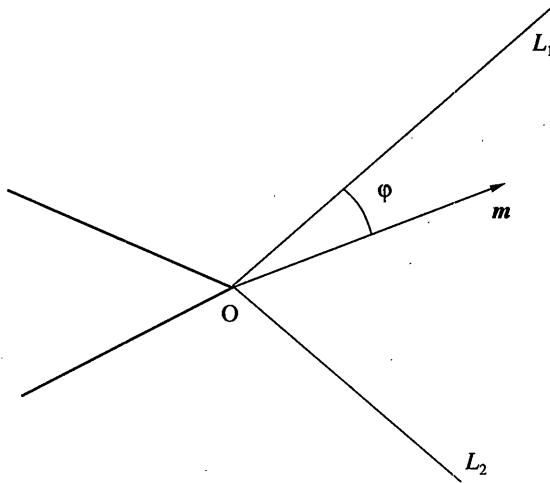
4. Разрушение идеальных жесткопластических тел. Поле деформаций в окрестности вершины трещины (фиг. 6) является в общем случае неоднородным и тензор деформации E_{ij} можно рассматривать как функцию полярных координат φ и ρ системы координат с началом, расположенным в вершине трещины. К вершине трещины могут подходить несколько линий разрыва тензора деформаций (L_1, L_2, \dots), т.е. компоненты тензора могут быть разрывны по аргументу φ .

Разрушение материала естественно связать с тензором деформаций, накопленных в процессе всей истории деформирования материала, а также другими геометрическими и силовыми характеристиками, определяемыми в процессе пластического течения в окрестности вершины трещины (например, направлением развития трещины в предшествующий момент времени, углом раскрытия трещины и т.д.).

Критерий разрушения можно задать в виде системы неравенств

$$f_n(m_j, E_{ij}, \sigma_{ij}, \dots) \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$

где f_n – некоторые скалярные изотропные функции векторных и тензорных аргументов, а также их производных по пространственным и временным переменным. Число функций f_n определяется конкретной моделью разрушения.



Фиг. 6

Направление развития трещины определяется изотропной векторной функцией тензорных и векторных аргументов

$$m_i = m_i(E_{ij}, \sigma_{ij}, \dots) \quad (4.2)$$

В качестве простейшей модели разрушения идеального жесткопластического тела может быть выбрана следующая.

4.1. Разрушение материала в вершине трещины наступает, когда максимальная деформация в вершине трещины (E_1) достигает предельной величины (E_*):

$$\sup_{\varphi} E_1 \geq E_*, \quad \mathbf{m} = \mathbf{e}_2 \quad (4.3)$$

где E_1 – значение первого (алгебраически наибольшего) главного значения тензора Альманси, а $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – единичные векторы, совпадающие соответственно с первым и вторым главными направлениями тензора Альманси. Физическая интерпретация рассматриваемого критерия очевидна: разрушение материала наступает в том случае, если расстояние между бесконечно близкими частицами изменяется на критическую величину, определяемую константой E_* , направление разрушения при этом ортогонально первому главному направлению. Скорость движения вершины трещины определяется из условия

$$E_1 = E_* \quad (4.4)$$

Бликий по виду критерий разрушения рассматривался в [17]; он записывался в виде $e = e_*$ при $\rho = \rho_*$, где предполагалось, что распространение трещины произойдет, когда деформация e на некотором расстоянии ρ_* перед вершиной трещины достигнет предельной величины e_* .

Простейшая модель разрушения (4.3) требует экспериментального определения лишь одной константы E_* .

Заметим, что идеальное жесткопластическое тело является несжимаемым. И в условиях плоской деформации тензор деформации имеет лишь один независимый инвариант (например, E_1), другие его инварианты могут быть выражены через него. Поэтому при использовании в критерии разрушения (4.1) в качестве аргумента лишь тен-

зора E_{ij} изотропные функции f_i будут являться функциями только одного независимого инварианта.

4.2. Более сложная двухконстантная модель

$$E_1 \geq E_*, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \gamma \tag{4.5}$$

включает дополнительное экспериментальное определение направления развития трещины относительно первого главного направления тензора E_{ij} , определяемого углом γ .

Условия (4.3), (4.4) могут быть переформулированы.

4.3. Разрушение материала в вершине трещины наступает, когда накопленная удельная диссипация энергии в вершине трещины (W) достигнет предельной величины (W_*):

$$\sup_{\Phi} W \geq W_* \tag{4.6}$$

и скорость движения вершины трещины определяется условием

$$W = W_* \tag{4.7}$$

Условие выбора направления развития трещины можно сформулировать аналогично критерию (2.3) п. 2.

4.4. Пластическое течение при разрушении развивается таким образом, что приращение работы (δA), необходимой для деформирования тела максимально $\sup_{\Phi} \delta A$.

5. Разрушение жесткопластической полосы при одноосном растяжении. В отличие от решения I (п. 3) решение II позволяет описать процесс распространения трещины в полосе [17] (фиг. 3, б).

Пусть в полосе имеется начальная трещина в окрестности начала координат O . Так как ее длина и начальное положение не влияют на дальнейшие построения, будем считать ее бесконечно малой макротрещиной. Развитие трещины будет определяться траекторией движения ее вершины O (фиг. 3, б; 6), связанной с направлением разрушения \mathbf{m} .

Будем считать, что разрушение определяется условиями (4.4), (4.7):

$$E_1 = E_* \quad \text{или} \quad W = W_* \tag{5.1}$$

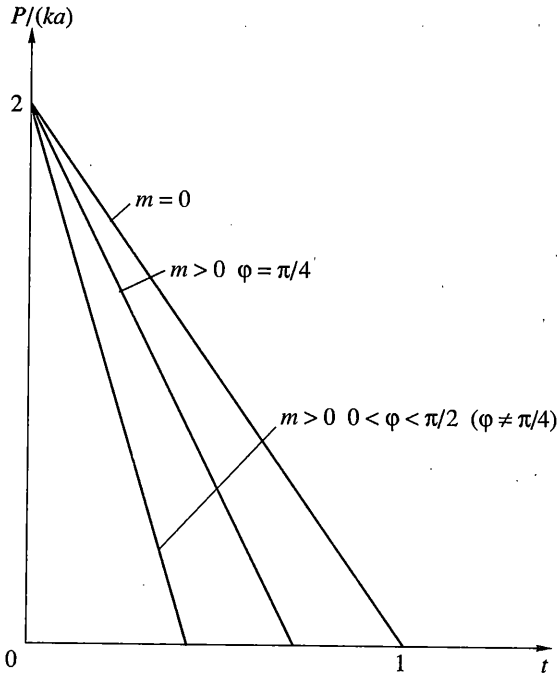
На фиг. 7 представлена зависимости P/ka от времени t (при $V = 1$) при различных направлениях разрушения \mathbf{m} . Максимальное приращение работы, необходимой для деформирования полосы (см. п. 4) достигается при распространении трещины вдоль оси x_1 ($\Phi = \pi/4$), т.е. при симметричном пластическом течении. Основные параметры пластического течения

$$W_* = \frac{2}{m+1}, \quad m = \frac{2}{W_*} - 1, \quad P(t) = 2[1 - 2t/W_*] \tag{5.2}$$

$$A = 2/W_*, \quad \text{tg} \gamma = m$$

где m – модуль скорости распространения трещины, A – работа, необходимая для полного разрушения полосы ($a = 1, k = 1$), γ – половина угла раскрытия трещины. Компоненты тензора Альманси определяются соотношениями (1.1), (1.10), (1.15), где $G = m/\sqrt{2}$.

6. Определение констант разрушения. Одним из основных экспериментов по определению механических свойств материалов является эксперимент по растяжению



Фиг. 7

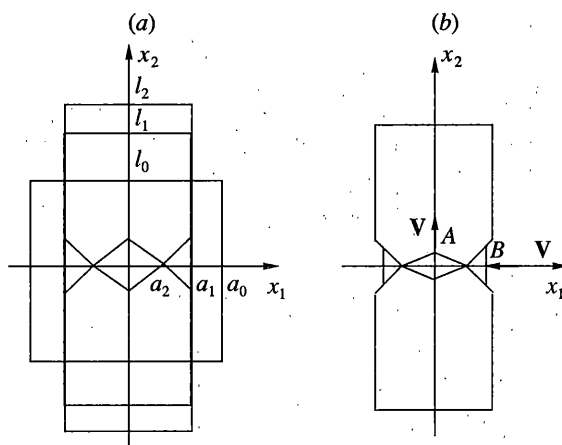
плоских и цилиндрических образцов. Основной характеристикой процесса разрушения в данных экспериментах является относительное удлинение образца при разрушении $\delta = (l - l_0)/l_0$ и относительное сужение образца при разрушении $\psi = (F_0 - F)/F$, где l_0, F_0 – начальные длина образца и площадь поперечного сечения, l, F – текущие длина и площадь поперечного сечения.

Для практически всех материалов $\psi < 1$, что означает наличие в образце конечной трещины, которая развивалась в определенном интервале времени.

Естественно предположить, что зарождение трещины и переход с решения с однородным полем скоростей перемещений (фиг. 2) на решение с разрывным полем скоростей перемещений (фиг. 3) происходит в один и тот же момент времени, т.е. при относительно малых деформациях реализуется решение с непрерывным однородным полем скоростей деформаций, решение с разрывным полем скоростей перемещений описывает образование “шейки” на конечном этапе разрушения образца.

Поэтому процесс разрушения плоского образца можем описывать по следующей схеме (фиг. 8, а). Перед началом деформирования образец имеет длину и ширину соответственно l_0, a_0 . На первом этапе реализуется решение с непрерывным полем скоростей. К концу первого этапа образец имеет параметры l_1, a_1 . Происходит зарождение трещины. На втором этапе реализуется решение с разрывным полем скоростей, и происходит развитие трещины. Второй этап заканчивается разрывом образца, к моменту которого образец имеет следующие параметры: l_2 – конечная длина, a_2 – наименьшая ширина в месте разрыва.

Введем две константы материала, E_{**} – значение E_1 , тензора Альманси, соответствующее концу первого (однородного) этапа деформирования образца, характеризующее



Фиг. 8

зарождение макротрещины и начала образования “шейки”, E_* – значение E_1 в вершине макротрещины, характеризующее скорость распространения макротрещины.

Из условия несжимаемости следует

$$l_1 a_1 = l_0 a_0 \quad (6.1)$$

На втором этапе точки A и B (фиг. 8, б) движутся с одинаковой скоростью V , поэтому

$$a_1 - a_2 = l_2 - l_1 \quad (6.2)$$

Зная из экспериментов по растяжению значения ψ , δ , a_0 , l_0 и решая совместно (6.1), (6.2), (1.1), можно найти l_1 :

$$l_1 = 1/2[a_0(1 - \psi) + l_0(\delta + 1)] + 1/2\sqrt{a_0^2(1 - \psi)^2 + 2a_0l_0(\delta - \psi - \psi\delta - 1) + l_0^2(\delta + 1)^2} \quad (6.3)$$

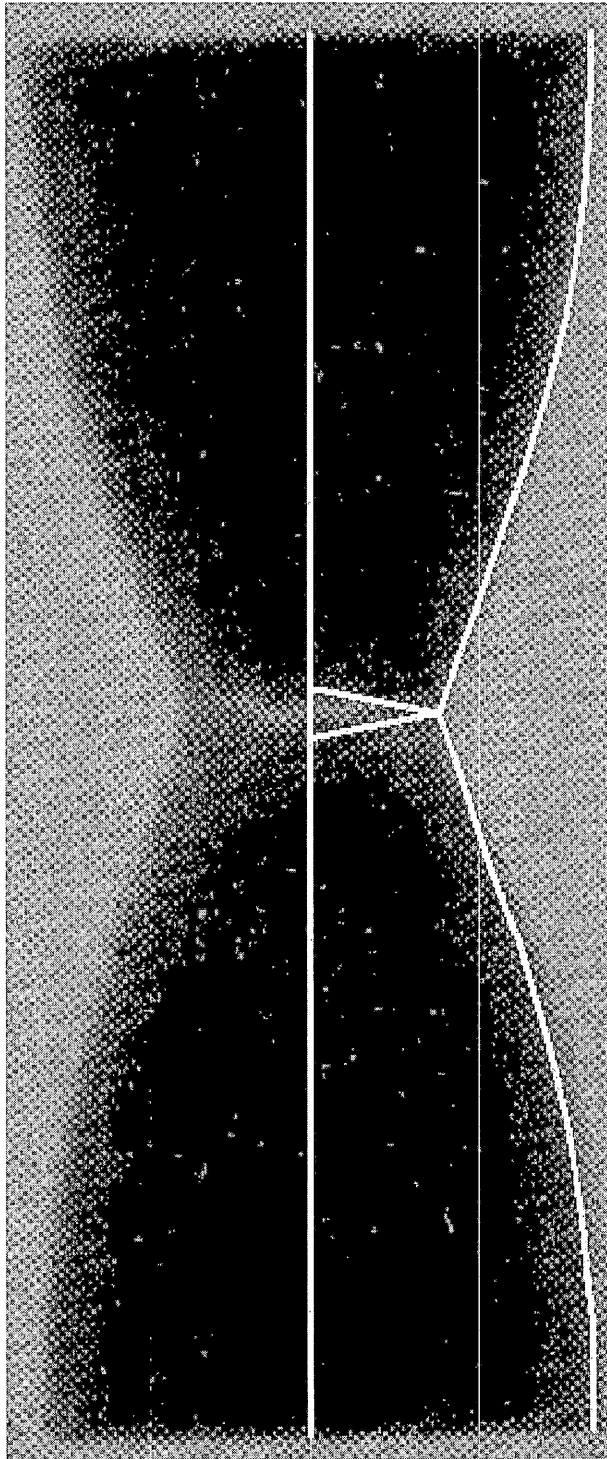
а затем соответствующее ему первое главное значение тензора Альманси, которое обозначим через E_{**} :

$$\delta_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0}, \quad E_{**} = E_1 = \frac{2\delta^2 + \delta^2}{2(\delta + 1)^2} \quad (6.4)$$

Компоненты тензора Альманси на втором этапе деформирования определяются по изменению компонент тензора дисторсии на линии разрыва скоростей перемещений (1.10) с учетом деформирования материала на первом этапе (1.15).

В таблице даны константы разрушения для некоторых конструкционных материалов. Данные для δ , ψ приводятся по справочнику [18].

7. Деформация и разрушение цилиндрического образца. Деформации цилиндрического образца при одноосном растяжении подробно исследовались в [19, 20]. Формулировка критериев полностью совпадает с аналогичными формулировками в условиях



Фиг. 9

Таблица

	δ , %	ψ , %	W_*	E_*	E_{**}
Алюминиевые сплавы					
АД0, лист	35	80	1.6	0.384	0.168
АК8, Профиль	7	15	0.3	0.129	0.046
АК8, Штамповка	10	25	0.5	0.195	0.056
АД31, Профиль закаленный и искусственно состаренный	17	70	1.4	0.364	0.035
АМГ6, Плита, нагартованная, 18% в продольном направлении	10	22	0.44	0.177	0.062
ВД17, Полоса прессованная, закаленная и искусственно состаренная, 60 мм	10	19	0.38	0.157	0.068
АД33, Профиль прессованный, закаленный и искусственно состаренный	12	30	0.6	0.223	0.066
Титановые сплавы					
ВТ3-1, Штамповка	14–20	45–60	0.9–1.2	0.291–0.34	0.056–0.085
ВТ6, Штамповка	10–13	35–60	0.7–1.2	0.248–0.34	0.035–0.012
ВТ9, Штамповка	8–14	25–45	0.5–0.9	0.195–0.291	0.035–0.056
ВТ14, Штамповка	10–15	35–60	0.7–1.2	0.248–0.34	0.035–0.035

плоской деформации, но расчет констант разрушения осуществляется численным способом.

На фиг. 9 представлен рентгеновский снимок “шейки” образца непосредственно перед разрушением [21] и результаты численного расчета “шейки” и трещины на основе модели идеального жесткопластического тела (сплошная белая линия).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00102).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill R., Lee E.H., Tupper S.J. The theory of wedge indentation of ductile materials // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1947. V. 188. № 1013. P. 273–289.
2. Hill R. Some special problems of indentation and compression in plasticity // Proc. 7th Intern. Congr. Appl. Mech. L. 1948. V. 1. P. 365–377.
3. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
4. Onat E., Prager W. The necking of a tension specimen in plane plastic flow // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. № 4. P. 491–493.
5. Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 233. № 1193. P. 267–287.
6. Richmond O. Plane strain necking of V-notched and un-notched tensile bars // J. Mech. and Phys. Solids. 1969. V. 17. № 2. P. 83–90.
7. Быковцев Г.И., Хромов А.И. Плоская деформация идеальных жесткопластических тел с учетом изменения границы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 71–78.
8. Быковцев Г.И., Хромов А.И. Плоская задача о вдавливании жесткого штампа в идеальное жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 47–52.
9. Хромов А.И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996. 181 с.
10. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.

11. *Макклиток Ф.* Пластические аспекты разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1976. Т. 3. С. 67–262.
12. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
13. *Хромов А.И.* Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 2. С. 202–205.
14. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
15. *Фридман Я.Б.* Механические свойства металлов. Ч. 2. Механические испытания. Конструкционная прочность. М.: Машиностроение, 1974. 368 с.
16. *Хромов А.И., Жигалкин К.А.* Математическое моделирование процесса деформирования материалов // Дальневосточный математический журнал, 2002. Ч. 3. № 1. С. 93–101.
17. *Хромов А.И.* Деформация и разрушение жесткопластической полосы при растяжении // Изв. РАН. МГТ. 2000. № 1. С. 136–142.
18. Конструкционные материалы: справочник / Под ред. Б.Н. Арзамасова. М.: Машиностроение, 1990. 687 с.
19. *Козлова О.В., Хромов А.И.* Константы разрушения для идеальных жесткопластических тел // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 342–345.
20. *Хромов А.И., Козлова О.В.* Деформация и разрушение жесткопластического цилиндра // Проблемы механики неупругих деформаций. М.: Физматлит, 2001. С. 343–350.
21. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.

Комсомольск-на-Амуре

Поступила в редакцию
3.04.2003