

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Проблемы устойчивости упругих и вязкоупругих систем, находящихся под действием случайных нагрузок в виде случайных стационарных процессов, рассматривались в большом числе работ. Достаточно обширный обзор этих работ содержится в [1]. Наибольшее число результатов было получено для случая, когда стационарный процесс предполагался гауссовским белым шумом. Если параметрические нагрузки являются стационарными широкополосными процессами, то решение проблемы устойчивости системы становится значительно более сложным. В этом случае, главным образом, найдены только достаточные условия устойчивости по вероятности. Следует подчеркнуть, что оценки границ области устойчивости, полученных с помощью этих критериев, обычно весьма грубые. Более корректные результаты, с точки зрения условий устойчивости, могут быть найдены путем применения методов статистического моделирования в сочетании с численными методами расчета конструкций. Принципиальные вопросы такого подхода обсуждались в [2–5]. Цикл работ [1, 6–9] посвящен применению метода канонических разложений в сочетании с численным методом определения максимального показателя Ляпунова для решения проблем устойчивости для упругих и вязкоупругих систем. При такой постановке получены условия устойчивости по вероятности и по отношению к статистическим моментам различного порядка (p -устойчивости) и, в частности, в среднеквадратичном. Однако опыт применения этого метода при исследовании p -устойчивости показал, что он оказывается эффективным в тех случаях, когда максимальный показатель Ляпунова имеет отрицательное значение. Если же указанный показатель является положительным или даже отрицательным, но близким к нулю, то решение задачи вызывает некоторые трудности.

В публикуемой работе рассматривается устойчивость по отношению к статистическим моментам упругих и вязкоупругих систем, находящихся под действием случайных параметрических нагрузок в виде стационарных процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью (“цветных” шумов). Предлагаемый в работе метод является эффективным при анализе устойчивости при любых значениях максимального показателя Ляпунова.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} + (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{X} = 0 \quad (1.1)$$

где \mathbf{X} – вектор неизвестных, которые могут быть узловыми перемещениями (если задача решается с помощью метода конечных элементов или метода конечных разностей) или обобщенными перемещениями (если для дискретизации системы используется метод Бубнова – Галеркина и т.п.); \mathbf{C} , \mathbf{K} и \mathbf{F} – $n \times n$ матрицы, характеризующие внешнее сопротивление, жесткость и детерминированные параметрические нагрузки соответственно; \mathbf{R} – интегральный оператор релаксации; \mathbf{G} – $n \times n$ матрица, элементы которой являются некоррелированными стационарными процессами с математическим ожиданием, равным нулю, $\langle g_{ij} \rangle \equiv 0$; угловые скобки обозначают операцию математического ожидания, а точки – производные по времени t .

Решение уравнений (1.1) должно удовлетворять начальным условиям

$$\mathbf{X}|_{t=t_0} = \mathbf{X}_0, \quad \dot{\mathbf{X}}|_{t=t_0} = \mathbf{V}_0 \quad \text{при } t = t_0$$

где компоненты векторов $\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0$ – константы. Для ядра релаксации $R(t, \tau)$ интегрального оператора \mathbf{R} должно удовлетворяться условие

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t R(t, \tau) d\tau < 1$$

Это ядро может быть вырожденным, т.е.

$$R(t, \tau) = \sum_{i=1}^k f_i(t) \phi_i(\tau)$$

Здесь $\phi_i(\tau)$ непрерывные функции, а $f_i(t)$ дифференцируемые функции такие, что отношения $f_i(t)/t_i(t)$ являются непрерывными для $t_0 \leq t < \infty$.

Введем новые переменные $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}, \mathbf{Y}_2 = \dot{\mathbf{X}}$ и представим систему (1.1) в форме

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}\mathbf{Y} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ [-(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{K} - \mathbf{F}] & -\mathbf{C} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

где \mathbf{I} – единичная матрица. Если ядро релаксации вырожденное, тогда принимая во внимание дифференциальные соотношения

$$\dot{\mathbf{Y}}_{i+2} = f_i \phi_i \mathbf{K} \mathbf{Y}_i + f_i / f_i \mathbf{Y}_{i+2} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{1.4}$$

интегро-дифференциальное уравнение (1.2) может быть представлено в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. В таком случае вектор \mathbf{Y} и матрицы \mathbf{A}, \mathbf{B} записываются следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{2+k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (-\mathbf{K} - \mathbf{F}) & -\mathbf{C} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I} \\ f_1 \phi_1 \mathbf{K} & \mathbf{0} & f_1 / f_1 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k \phi_k \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & f_k / f_k \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Далее будем предполагать, что случайные стационарные процессы g_{ij} являются марковскими процессами, которые являются результатом прохождения белого шума через линейный фильтр m -го порядка, т.е. функции $g_{ij}(t)$ являются решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$g_{ij}^{(m)} + (d_{ij})_1 g_{ij}^{(m-1)} + \dots + (d_{ij})_{m-1} \dot{g}_{ij} + (d_{ij})_m g_{ij} = h_{ij} \xi_{ij}(t) \quad (1.6)$$

где $(d_{ij})_k$ ($i, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m$); h_{ij} – константы; $\xi_{ij}(t)$ – гауссовский белый шум. Таким образом, поведение упругой или вязкоупругой системы описывается дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями (1.2) с матрицами (1.3) или (1.5). Решение этих уравнений может быть найдено численно с помощью различных методов [10, 11]. Последующая реализация моделирования базируется на методе Рунге – Кутты четвертого порядка [11]. В этом случае важной является схема моделирования белого шума [10]. Конкретные способы численного решения рассматриваются в примерах, приведенных ниже.

2. Устойчивость нулевого решения. Главной целью настоящей статьи является исследование устойчивости нулевого решения системы (1.2) (положения равновесия деформируемой системы) по отношению к статистическим моментам.

1. Решение $\mathbf{Y}(t) \equiv 0$ называется p -устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $t \geq t_0$ и $|y_i(t_0)| < \delta$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$ или $i = 1, 2, \dots, (k+2)n$) имеем $|\langle y_i^p(t) \rangle| < \varepsilon$.

2. Решение $\mathbf{Y}(t) \equiv 0$ называется асимптотически p -устойчивым, если оно p -устойчиво и, дополнительно, для достаточно малого $|y_i(t_0)|$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\langle y_i^p(t) \rangle| = 0$$

При $p = 1$ имеет место устойчивость в среднем (по отношению к математическому ожиданию), а при $p = 2$ – устойчивость в среднеквадратичном.

Рост вектора $\mathbf{Y}(t)$ может быть оценен с помощью максимального показателя Ляпунова λ , который определяется выражением

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{Y}(t)\|}{\|\mathbf{Y}(t_0)\|},$$

где $\|\mathbf{Y}(t)\|$, $\|\mathbf{Y}(t_0)\|$ – норма вектора $\mathbf{Y}(t)$ в евклидовом пространстве в момент времени t и в начальный момент времени t_0 .

Величина λ может быть найдена численно по методу, предложенному в [12]. С этой целью разделим достаточно большой интервал времени $[t_0, t]$ на m равных интервалов $\Delta = t_{j+1} - t_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Допустим, что система (1.2) является детерминированной и при $t = t_j$ норма вектора решения $\|\mathbf{Y}(t_j)\|$ равна единице. Используя этот вектор как вектор начальных условий, получим решение системы (1.2) для момента времени t_{j+1} с нормой $\|\mathbf{Y}(t_{j+1})\| = d_{j+1}$. Продолжая решение системы (1.2) с новыми начальными условиями $y_{i0}(t_{j+1})/d_{j+1}$, получим последовательность величин d_j и тогда максимальный показатель Ляпунова может быть найден как предел

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\Delta} \sum_{i=1}^m \ln d_j \quad (2.1)$$

Если рассматривается устойчивость нулевого решения системы уравнений (1.2) по отношению к статистическим моментам, тогда решение задачи строится следующим

образом. Поскольку система уравнений для моментов функций $y_i(t)$ в случае “цветных” шумов не может быть получена в замкнутом виде, воспользуемся методом статистического моделирования.

Оценка статистических моментов $\langle y_i^p \rangle$ для моментов времени t_j может быть получена как результат статистического усреднения величин $\langle y_i^p \rangle$, найденных в результате решения уравнений (2) для достаточно большого числа реализаций q :

$$\langle \tilde{y}_i^p(t_m) \rangle = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q [y_i^p(t_m)]^{(j)} \quad (2.2)$$

где $[y_i^p(t_m)]^{(j)}$ – величина $y_i^p(t_m)$, отвечающая j -й реализации решения уравнений (2). Предположим, что норма вектора $\langle Y^p(t_k) \rangle$ в евклидовом пространстве для момента времени t_k равняется единице. Норма вектора $\langle Y(t)^p \rangle$ становится равной \tilde{d}_{k+1} в момент времени $t_{k+1} = t_k + \Delta$. Далее система уравнений (2) решается для каждой реализации матрицы \mathbf{G} с начальными условиями

$$y_{i0}(t_{k+1}) = y_i(t_{k+1}) / (\tilde{d}_{k+1})^{1/p}$$

В результате повторения изложенной процедуры формируется числовая последовательность величин \tilde{d}_k , с помощью которых получается оценка максимального показателя Ляпунова

$$\tilde{\Lambda} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l\Delta} \sum_{k=1}^l \ln \tilde{d}_k$$

Заметим, что при оценивании $\tilde{\Lambda}$, величина Δ не обязательно должна совпадать с интервалом времени Δt , который фигурирует при решении системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты. Интервал Δ может содержать несколько отрезков времени Δt . Изложенный алгоритм применим для систем дифференциальных уравнений первого порядка (1.2). Если решается система интегро-дифференциальных уравнений (1.2), то для получения показателя Ляпунова можно воспользоваться методом, предложенным в [13]. Подобная ситуация может возникнуть, например, в том случае, когда ядро релаксации $R(t, \tau)$ имеет слабую особенность и потому система интегро-дифференциальных уравнений не может быть сведена к системе дифференциальных уравнений.

3. Примеры. В качестве примера рассмотрим устойчивость в среднеквадратичном прямолинейного вязкоупругого стержня постоянного поперечного сечения, находящегося под действием продольных сил, приложенных к его концам. Если материал стержня является изотропным, то при соблюдении гипотезы плоских сечений (гипотезы Эйлера – Бернулли) уравнение движения стержня при малых прогибах w описывается уравнением

$$m\ddot{w} + k\dot{w} + EI(1 - \mathbf{R})w'''' + Fw'' = 0 \quad (3.1)$$

где m – погонная масса стержня, k – характеристика внешнего демпфирования, EI – изгибная жесткость стержня, F – продольная сила, которая предполагается гауссовским случайным стационарным процессом, штрихом обозначена производная по продоль-

ной координате x , отсчитываемой вдоль оси стержня от одного из его концов. Ядро интегрального оператора \mathbf{R} является экспоненциальным

$$R(t - \tau) = \chi^* L e^{-\chi^*(t-\tau)}$$

где L – мера релаксации материала, χ^* – константа, характеризующая время релаксации. Решение уравнения (3.1) должно удовлетворять начальным условиям ($t_0 = 0$)

$$w|_{t=0} = w^0(x), \quad \dot{w}|_{t=0} = v^0(x)$$

и граничным условиям на концах стержня. Если стержень имеет шарнирное опирание на обоих концах, граничные условия записываются следующим образом: $w = 0$ и $w'' = 0$ для $x = 0$ и $x = l$ (l – длина стержня).

Если функции $w^0(x)$ и $v^0(x)$ имеют вид $w^0(x) = f^0 \sin(\pi x/l)$, $v^0(x) = c^0 \sin(\pi x/l)$, где f^0 , c^0 – константы, то решение уравнения (3.1) ищется в форме $w(t, x) = f(t) \sin(\pi x/l)$. Амплитуда прогиба $f(t)$ определяется из интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{f} + 2\varepsilon^* \dot{f} + \omega^2 [(1 - \mathbf{R}) - \alpha] f &= 0 \\ 2\varepsilon^* &= k/m, \quad \omega^2 = \pi^4 EI / (ml^4), \quad \alpha = Fl^2 / (\pi^2 EI) \end{aligned} \quad (3.2)$$

с начальными условиями $f = f^0$ и $\dot{f} = c^0$ при $t = 0$. Перепишем уравнение (3.2), используя безразмерные переменные $t_1 = \omega t$, $\tau_1 = \omega \tau$:

$$\begin{aligned} \dot{f} + 2\varepsilon \dot{f} + [(1 - \mathbf{R}) - \alpha] f &= 0 \\ \varepsilon &= \varepsilon^* / \omega, \quad \chi = \chi^* / \omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

где точка обозначает производную по времени t_1 . Далее для удобства вновь воспользуемся обозначениями t , τ вместо t_1 , τ_1 .

Вводя переменные $x_1 = f$, $x_2 = \dot{f}$, можно заменить уравнение (3.3) системой дифференциальных уравнений первого порядка (1.2) с матрицами

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -[(1 - \mathbf{R}) - \alpha_0] & -2\varepsilon \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^0 & 0 \end{vmatrix}$$

причем $\alpha = \alpha_0 + \alpha^0(t)$, ($\alpha_0 = \text{const}$) – математическое ожидание случайного процесса $\alpha(t)$, α^0 – центрированный случайный стационарный процесс.

Эффективность предлагаемого численного метода решения задачи устойчивости проиллюстрируем на примере стационарного эргодического процесса $\alpha^0(t)$ с корреляционной функцией

$$K(t - t_1) = \sigma^2 e^{-\delta|t-t_1|}$$

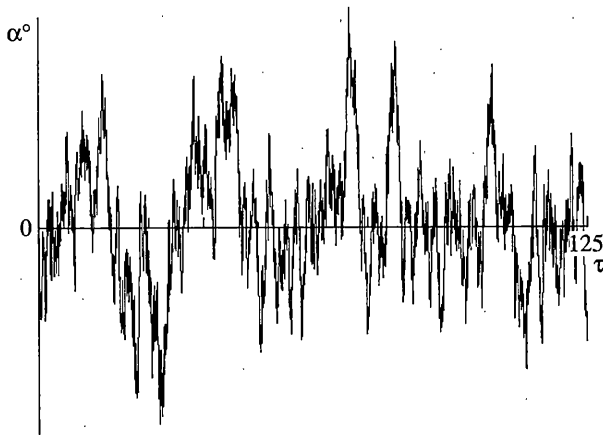
и соответствующей ей спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2}$$

где σ^2 – дисперсия случайного процесса α^0 и δ – параметр, характеризующий масштаб корреляции функции $\alpha^0(t)$. Уравнение (1.6) в этом случае записывается следующим образом:

$$\dot{\alpha}^0 + \delta \alpha^0 = \sigma \xi(t) \quad (3.4)$$

Здесь ξ – гауссовский белый шум с интенсивностью равной единице.



Фиг. 1

3.1 Упругий стержень в вязкой среде. Для оценки точности результатов исследования устойчивости с применением метода статистического моделирования рассмотрим сначала более простую задачу, связанную с рассмотрением поведения упругого стержня, находящегося в вязкой среде. Считая продольную силу и прогиб стержня медленно меняющимися функциями времени, уравнение его движения может быть получено из уравнения (3.3), в котором следует опустить слагаемое, соответствующее силе инерции

$$2\varepsilon f' + (1 - \alpha)f = 0 \quad (3.5)$$

Вводя новую независимую переменную $\tau = t/(2\varepsilon)$, перепишем уравнение (3.5) в виде

$$f' + (1 - \alpha)f = 0 \quad (3.6)$$

где штрихом обозначена производная по τ .

Далее для решения задачи воспользуемся методом статистического моделирования, для чего представим уравнение (3.6) в виде двух уравнений первого порядка

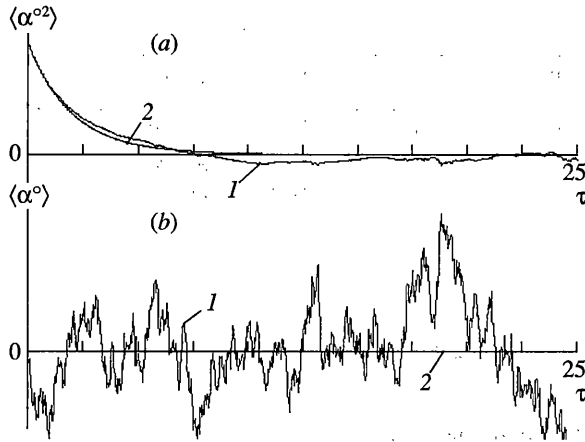
$$f' = -(1 - \alpha_0 - \alpha^o)f, \quad \alpha^{o'} = -\delta\alpha^o + \sigma\xi$$

Белый шум $\xi(\tau)$ моделируется выражением

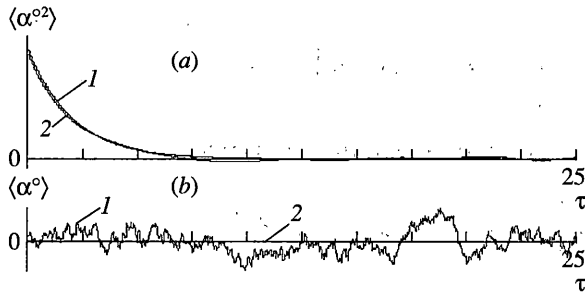
$$\xi(\tau) = \sqrt{2\delta/\Delta}e_{\Delta}(\tau), \quad e_{\Delta}(\tau) = e_i, \quad \tau \in [i\Delta, (i+1)\Delta] \quad (3.7)$$

где e_i – последовательность некоррелированных нормально распределенных чисел с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\langle e^2 \rangle$ равной единице, Δ – шаг по времени при решении дифференциальных уравнений.

Одна из реализаций $\alpha^o(\tau)$, полученная при $\sigma = 0.2$; $\delta = 0.5$ и $\Delta = 0.025$, показана на фиг. 1. Максимальное α_{\max}^o и минимальное α_{\min}^o значения реализации функции $\alpha^o(\tau)$ на рассмотренном отрезке времени соответственно равны 0.663 и -0.591 . Кривые теоретической корреляционной функции и корреляционной функции, найденной в результате статистических испытаний при $\sigma^2 = 0.04$; $\delta = 0.5$, представлены на фиг. 2, а и 3, а. На фиг. 2, б и 3, б показаны аналогичные линии для математического ожидания. В первом случае было выполнено 100 испытаний ($\langle \alpha^o \rangle_{\max} = 0.050$, $\langle \alpha^o \rangle_{\min} = -0.044$, $\langle \alpha^{o^2} \rangle_{\max} = 0.040$, $\langle \alpha^{o^2} \rangle_{\min} = -0.003$), а во втором – 1000 ($\langle \alpha^o \rangle_{\max} = 0.013$, $\langle \alpha^o \rangle_{\min} = -0.010$,



Фиг. 2



Фиг. 3

$\langle \alpha^{\circ 2} \rangle_{\max} = 0.039$, $\langle \alpha^{\circ 2} \rangle_{\min} = -0.001$). Сравнение приведенных кривых свидетельствует о том, что при увеличении числа статистических испытаний “экспериментальные” корреляционная функция и математическое ожидание (кривые 1) приближаются к теоретическим (линии 2). Значения максимального показателя Ляпунова, найденные статистическим путем при разных значениях времени τ и α_0 , представлены в табл. 1. Значения σ^2 и δ были приняты равными соответственно 0.01 и 0.5, а шаг по времени 0.025. Заметим, что при вычислении дисперсии компонент вектора $\mathbf{Y}(t_m)$ вследствие небольшого числа реализаций вместо соотношения (2.2) используется несмещенная оценка

$$\langle \bar{y}_i^p(t_m) \rangle = \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^q [y_i^p(t_m)]^{(j)}$$

Далее найдем аналитическое решение той же проблемы. Умножим левую и правую части уравнения (3.6) на f , после чего разделим на f^2 . В результате будем иметь

$$f df / f^2 = -[1 - \alpha(\tau)] d\tau$$

Проинтегрируем левую и правую части этого равенства

$$\ln \frac{f^2(\tau)}{(f^{\circ})^2} = -2 \int_0^{\tau} [1 - \alpha_0 - \alpha^{\circ}(y)] dy$$

k	τ	$\alpha_0 = 0.5$	$\alpha_0 = 1.5$
5	500	-0.990	1.010
	2000	-0.998	1.008
	5000	-0.999	1.007

или

$$\frac{f^2(\tau)}{(f^0)^2} = \exp\left\{-2\int_0^{\tau}[1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y)]dy\right\}$$

где y – переменная интегрирования.

Математическое ожидание левой и правой частей последнего равенства также равны между собой

$$\left\langle \frac{f^2(\tau)}{(f^0)^2} \right\rangle = \left\langle \exp\left\{-2\int_0^{\tau}[1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y)]dy\right\} \right\rangle$$

Прологарифмируем обе части равенства и разделим на τ :

$$\frac{1}{\tau} \ln \left\langle \frac{f^2(\tau)}{(f^0)^2} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \ln \left\langle \exp\left\{-2\int_0^{\tau}[1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y)]dy\right\} \right\rangle$$

При $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left\langle \exp\left[-2\int_0^{\tau}(1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y))dy\right] \right\rangle$$

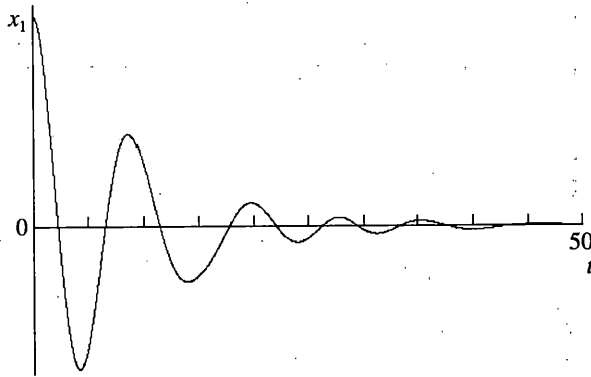
Здесь λ – максимальный показатель Ляпунова для моментов второго порядка (дисперсии) амплитуды прогиба стержня. Для правой части очевидны равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left\langle \exp\left\{-2\int_0^{\tau}[1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y)]dy\right\} \right\rangle &= \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left\langle \exp\left\{-2\tau \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau}[1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y)]dy\right\} \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \langle e^{-2\tau\beta} \rangle \end{aligned}$$

$$\beta = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau}[1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y)]dy$$

Окончательно можно записать

$$\lambda = -2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau}[1 - \alpha_0 - \alpha^\circ(y)]dy$$



Фиг. 4

Поскольку случайный стационарный процесс $\alpha^\circ(\tau)$ по предположению является эргодическим, то выражение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha^\circ(y) dy$$

равняется математическому ожиданию случайной флуктуации $\alpha^\circ(\tau)$, которое по условию равно нулю.

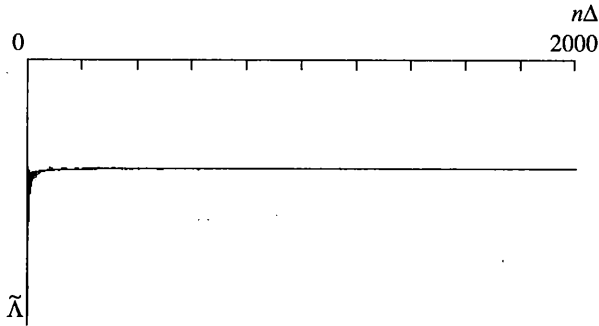
Таким образом, максимальный показатель Ляпунова для стержня равен $\lambda = -2(1 - \alpha_0)$. Это означает, что, если математическое ожидание безразмерной продольной силы α_0 меньше 1, то стержень устойчив в среднеквадратичном, и наоборот, если α_0 больше единицы, то стержень неустойчив в среднеквадратичном. Точное значение λ при $\alpha_0 = 0.5$ и $\alpha_0 = 1.5$ равны -1.000 и 1.000 . Сравнение этих результатов с приведенными в таблице 1 показывает, что даже при сравнительно небольшом числе шагов по времени при численном моделировании удается получить значения показателя Ляпунова близкие к точным значениям.

3.2. Упругий стержень. Движение упругого стержня с учетом расширения фазового пространства за счет α° описывается тремя дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 - \alpha_0 - \alpha^\circ)x_1, \quad \dot{\alpha}^\circ = -\delta\alpha^\circ + \sigma\xi \quad (3.8)$$

Будем считать, что в этом случае белый шум $\xi(t)$ моделируется соотношением (3.7). Одна из реализаций случайного процесса $f(t)$, полученная с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка при $\varepsilon = 0.1$, $\alpha_0 = 0.5$, $\sigma = 0.2$, $\delta = 0.1$ и $\Delta = 0.025$, $x_1(0) = 1.0$, $x_2(0) = 0$, показана на фиг. 4, где величины $x_{1\max}$, $x_{1\min}$ соответственно равны 1.0 и -0.678 .

Зависимость $\tilde{\Lambda}_{\max} \sim n\Delta$, полученная при $\sigma = 0.1$, $\delta = 0.5$, $\alpha_0 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta = 0.01$ и $k = 25$, представлена на фиг. 5. Оценка показателя Ляпунова $\tilde{\Lambda}_{\max}$ равна -0.196 . Результаты решения системы уравнений (3.8) в зависимости от числа реализаций k и дисперсии безразмерной продольной силы σ^2 при $\alpha_0 = 0.5$, $\delta = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta = 0.01$ приведены в табл. 2. Данные этой таблицы иллюстрируют влияние среднеквадратичного разброса продольной силы на асимптотическую устойчивость стержня в среднеквадратичном. Естественно, что увеличение среднеквадратичного разброса значений продольной силы оказывает существенное влияние на устойчивость стержня и, следовательно



Фиг. 5

но, на величину максимального показателя Ляпунова. Корректность результатов, полученных с помощью предлагаемого метода, можно оценить с помощью метода стохастического усреднения [1, 14–16]. При тех же исходных данных метод усреднения дает следующие результаты: $\sigma = 0.1 - \Lambda_{\max} = -0.196$; $\sigma = 0.2 - \Lambda_{\max} = -0.182$. Сравнение этих результатов с соответствующими значениями, приведенными в табл. 2, показывает, что оба метода дают практически совпадающие результаты. Следует иметь в виду, что асимптотический метод предполагает малость в среднеквадратичном разброса случайной функции α° . Поэтому величина Λ_{\max} также является приближенной. Для моделирования входного стационарного процесса α° могут быть использованы другие методы, в частности метод канонических разложений [1, 17, 18] или метод авторегрессии – скользящего среднего [10, 19], базирующийся на уравнении типа авторегрессии – скользящее среднее

$$\alpha_k^\circ = \sum_{j=0}^n a_j e_{k-j} - \sum_{j=1}^m b_j \alpha_{k-j}^\circ \quad (k = m, m+1, \dots)$$

Здесь n, m, a_j, b_j – параметры, определяемые по корреляционной функции случайного процесса $\alpha^\circ(t)$; e_j – последовательность независимых гауссовских чисел с математическим ожиданием и дисперсией, соответственно равными нулю и единице. Для рассматриваемой корреляционной функции это соотношение записывается так

$$\alpha_i^\circ = a_0 e_i - b_1 \alpha_{i-1}^\circ, \quad a_0 = \rho, \quad b_1 = -\sigma(1 - \rho^2)^{1/2}, \quad \rho = e^{-(\delta\Delta)}$$

Для сравнения в табл. 3 представлены оценки максимального показателя Ляпунова, полученные с помощью метода канонических разложений $\tilde{\Lambda}^*$ (первые столбцы) и

Таблица 2

k	$\sigma^2 = 0$	$\sigma^2 = 0.01$	$\sigma^2 = 0.04$	$\sigma^2 = 0.09$
2	-0.200	-0.198	-0.180	-0.158
5	-0.200	-0.195	-0.180	-0.160
10	-0.200	-0.197	-0.180	-0.157
25	-0.200	-0.196	-0.181	-0.155
100	-0.200	-0.196	-0.181	-0.152
200	-0.200	-0.196	-0.179	-0.151

Таблица 3

k	$\sigma^2 = 0.01$	$\sigma^2 = 0.01$	$\sigma^2 = 0.04$	$\sigma^2 = 0.04$
2	-0.198	-0.194	-0.184	-0.167
5	-0.197	-0.195	-0.184	-0.169
10	-0.197	-0.196	-0.183	-0.169

Таблица 4

k	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.5$
2	-0.190	-0.185
5	-0.190	-0.180
10	-0.188	-0.180
25	-0.189	-0.181

метода авторегрессии $\tilde{\Lambda}^{**}$ (вторые столбцы) в зависимости от числа реализаций k при $\delta = 0.5$, $\alpha_0 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta = 0.01$ ($t = 2000$).

Указанные данные показывают, что метод канонических разложений и предлагаемый метод дают более точные результаты по сравнению с методом авторегрессии. С другой стороны, применение метода канонических разложений вызывает затруднения в тех случаях, когда показатель Ляпунова является положительным или отрицательным, но близким к нулю. С этой точки зрения метод, предлагаемый в настоящей статье, оказывается более предпочтительным.

Данные табл. 4 иллюстрируют влияние числа реализаций k и параметра δ на значения показателя Ляпунова для упругого стержня при $\alpha_0 = 0.5$, $\sigma^2 = 0.04$, $\varepsilon = 0.1$, $\Delta = 0.01$ ($t = 2000$), откуда следует, что изменение δ также может вызывать заметное изменение величины λ .

3.3. Вязкоупругий стержень. После введения новой переменной [1, 20]:

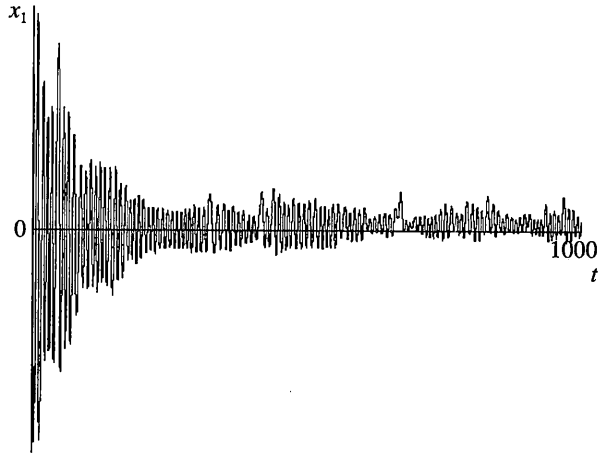
$$x_3 = \int_0^t \chi L e^{-\chi(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

для вязкоупругого стержня вместо уравнений (3.7) имеем следующие дифференциальные уравнения первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 - \alpha_0 - \alpha^\circ)x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = \chi L x_1 - \chi x_3, \quad \dot{\alpha}^\circ = -\delta \alpha^\circ + \sigma \xi$$

Одна из реализаций функции $x_1(t)$ для вязкоупругого стержня представлена на фиг. 6. Этот график соответствует исходным данным: $\varepsilon = 0$, $L = 0.5$, $\chi = 0.01$, $\Delta = 0.025$, $\sigma^2 = 0.04$, $\delta = 0.5$, $\alpha_0 = 0.5$ и $x_1(0) = 1.0$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$. Величины $x_{1\max}$ и $x_{1\min}$ соответственно равны 1.029 и -1.010.

В табл. 5 содержатся результаты вычислений максимального показателя Ляпунова, которые найдены при следующих исходных данных: $\varepsilon = 0$, $L = 0.1$, $\chi = 0.1$, $\alpha_0 = 0.5$, $\delta = 0.5$, $\Delta = -0.25$ ($t = 5000$). Эти результаты демонстрируют влияние дисперсии σ^2 случайной функции $\alpha^\circ(t)$ на величину показателя Ляпунова для вязкоупругого стержня. Здесь ситуация оказывается подобной той, которая имела в случае упругого стержня. Увеличение случайного разброса процесса $\alpha^\circ(t)$ быстро ведет к дестабилизации прямолинейно-



Фиг. 6

го положения равновесия стержня. Влияние характеристик вязкости материала L и χ на показатель Ляпунова может быть оценено с помощью данных, приведенных в табл. 6, 7, которые получены в зависимости от числа реализаций k при $\alpha_0 = 0.5$, $\varepsilon = 0$, $\sigma^2 = 0.01$, $\delta = 0.5$, $\Delta = 0.025$ ($t = 5000$). Результаты, представленные в табл. 6, найдены при $\chi = 0.1$, а результаты, содержащиеся в табл. 7 – при $L = 0.1$. Важно подчеркнуть, что не только мера релаксации материала, но и параметр χ , характеризующий время релаксации материала, оказывает заметное влияние на величину максимального показателя Ляпунова.

4. Заключение. Предложен эффективный метод исследования устойчивости упругих и вязкоупругих систем при стохастическом параметрическом возбуждении. Параметрические нагрузки принимаются в виде случайных стационарных процессов с дроб-

Таблица 5

k	$\sigma^2 = 0$	$\sigma^2 = 0.01$	$\sigma^2 = 0.02$
2	-0.020	-0.017	-0.015
5	-0.020	-0.017	-0.014
10	-0.020	-0.017	-0.014
25	-0.020	-0.016	-0.014
100	-0.020	-0.017	-0.013

Таблица 6

k	$L = 0.1$	$L = 0.25$
5	-0.017	-0.048
10	-0.017	-0.048
25	-0.016	-0.047
100	-0.017	-0.049

Таблица 7.

k	$\chi = 0.1$	$\chi = 0.2$
5	-0.017	-0.036
10	-0.017	-0.034
25	-0.016	-0.035
100	-0.017	-0.035

но-рациональной спектральной плотностью (“цветных” шумов). Метод базируется на численном моделировании случайных процессов, численном решении интегро-дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемой системы, и на вычислении максимального показателя Ляпунова. Сравнение результатов, полученных в частных примерах с помощью предложенного метода, с результатами, найденными аналитическими методами, показывает, что они достаточно близки между собой. Рассматриваемый метод позволяет оценить устойчивость системы по отношению к статистическим моментам различного порядка. Выполненные расчеты дают возможность оценить влияние различных характеристик (случайных нагрузок, вязких свойств материала) на величину показателя Ляпунова и соответственно на устойчивость стержня в среднеквадратичном.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Potapov V.D. Stability of Stochastic Elastic and Viscoelastic Systems. Chichester: Wiley, 1999. 275 с.
2. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
3. Kloeden J.R., Platen E. The Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. V. 1. Berlin: Springer, 1992. 312 p.
4. Milstein G.N. Evaluation of moment Liapunov exponents for second order stochastic systems // Random and Comput. Dyn. 1996. V. 4. № 4. P. 301–315.
5. Billah K.Y.R., Shinozuka M. Numerical method for colored noise generation and its application to a bistable system // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. № 12. P. 7492–7495.
6. Potapov V.D., Koirala P. Stability of elastic and viscoelastic systems under action of random stationary narrow-band loads // Intern. J. Mech. Sci. 1997. V. 39. № 8. P. 935–942.
7. Potapov V.D. Numerical method for investigation of stability of stochastic integro-differential equations // Appl. Numer. Math. 1997. V. 24. № 2–3. P. 191–201.
8. Potapov V.D., Marasano A.Y. The investigation of the stability of elastic and viscoelastic rods under a stochastic excitation // Intern. J. Solids and Structures. 1997. V. 34. № 11. P. 1367–1377.
9. Потанов В.Д. Об устойчивости нулевого решения системы интегро-дифференциальных уравнений при стохастическом возмущении их параметров // Автоматика и телемеханика. 1997. № 4. С. 45–53.
10. Шальгин А.С., Палазин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986. 319 с.
11. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Физматгиз, 1963. 400 с.
12. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponent for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Pt. 1; 2// Meccanica. 1980. V. 15. № 1. P. 9–20, 21–30.
13. Потанов В.Д. Исследование динамической устойчивости вязкоупругих систем с помощью показателей Ляпунова // Изв РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 82–90.
14. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.

15. Ariaratnam S. T., Tam D.S.F. Moment stability of coupled linear systems under combined harmonic and stochastic excitation // *Stochastic Problems in Dynamics*. Ed. B.L. Clarkson. London: Pitman, 1977. P. 90–105.
16. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
17. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung// *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A-I. Math. Phys.* 1947. V. 1. № 37. P. 3–79.
18. Karhunen K. Über die Struktur stationären zufälligen Functionen// *Ark. Mat.* 1950. № 1. P. 141–160.
19. Kozin F. Autoregressive moving average models of earthquake records // *Probab. Engng Mech.* 1988. V. 3. № 2. P. 58–63.
20. Tylikowski A. Stability and bounds on motion of viscoelastic column with imperfections and time-dependent forces// *Creep in Structures*. Ed. M. Zyczkowski. Berlin: Springer, 1991. P. 653–658.

Москва

Поступила в редакцию
2.07.2003