

УДК 531.383:532.516

© 2005 г. Д.В. КОНДРАТОВ, Л.И. МОГИЛЕВИЧ

ВОЗМУЩАЮЩИЕ МОМЕНТЫ В ПОПЛАВКОВОМ ГИРОСКОПЕ С УПРУГИМ КОРПУСОМ ПРИБОРА НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

Влияние упругой податливости корпуса поплавка на вибрационный возмущающий момент в гироскопе с цилиндрическим поплавковым подвесом исследовано в [1]. При этом показано, что при достаточно толстом корпусе поплавка из материала с малой плотностью и большим модулем Юнга влиянием упругой податливости можно пренебречь и считать корпус поплавка абсолютно твердым. При цапговом закреплении гироскопа на рабочем месте для отвода тепла в торцы корпус прибора представляет собой упругую цилиндрическую оболочку.

Проведено исследование погрешности поплавкового гироскопа с упругим корпусом прибора при свободном торцевом истечении жидкости на вибрирующем основании. Определено, что упругость корпуса прибора значительно влияет на гидродинамический возмущающий момент при поступательной вибрации для гироскопа с цилиндрическим поплавковым подвесом гиросула.

Поплавковый гироскоп представляет собой абсолютно жесткий ротор 1 (фиг. 1), закрепленный внутри абсолютно жесткого цилиндрического поплавка 2.

Поплавок взвешен в вязкой несжимаемой жидкости 3, заполняющей пространство между внешней поверхностью поплавка и внутренней поверхностью корпуса прибора 4, представляющим собой упругую цилиндрическую оболочку с жестким защемлением по торцам, длиной l , толщиной h_0 и радиусом срединной поверхности R . Опоры ротора гиросула 5 обладают упругой податливостью, как и магнитные опоры поплавка 6.

Система координат $O_1x_1y_1z_1$ жестко связана с корпусом прибора (фиг. 2), O_1 – геометрический центр камеры, l_1 – длина камеры, l – длина упругой оболочки – корпуса прибора, равная длине поплавка; R_1 – радиус камеры, x_1, y_1, z_1 – главные оси симметрии тела, система $O_2x_2y_2z_2$ – жестко связана с поплавком; O_2 – центр масс поплавка, x_2, y_2, z_2 – главные оси инерции поплавка; l_2, R_2 – длина и наружный радиус поплавка, $O_3x_3y_3z_3$ – увлекаемая система координат связана с ротором гиросула; O_3 – центр масс ротора.

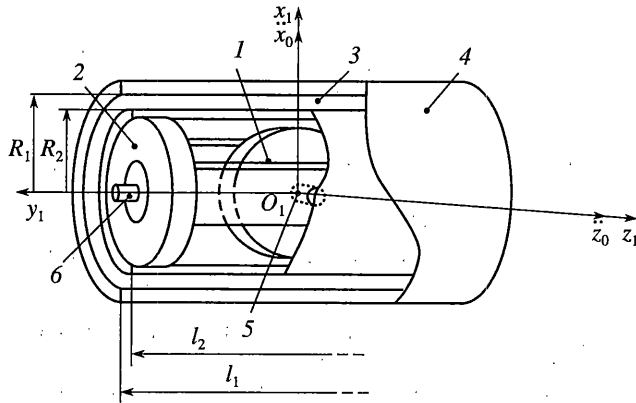
Поддерживающий и демпфирующий слой есть вязкая несжимаемая жидкость, заполняющая пространство в зазорах $\delta = R_1 - R_2$ и $a = (l_1 - l_2)/2$ между стенками камеры и поплавка, служит для разгрузки опор поплавка.

Таким образом, механическая модель поплавкового гироскопа представляет собой совокупность тел с упругими, демпфирующими и сложными динамическими связями между абсолютно твердым поплавком 2, абсолютно твердым ротором гиросула 1 и упругим корпусом прибора 4 через опоры 5, 6 и слой жидкости 3.

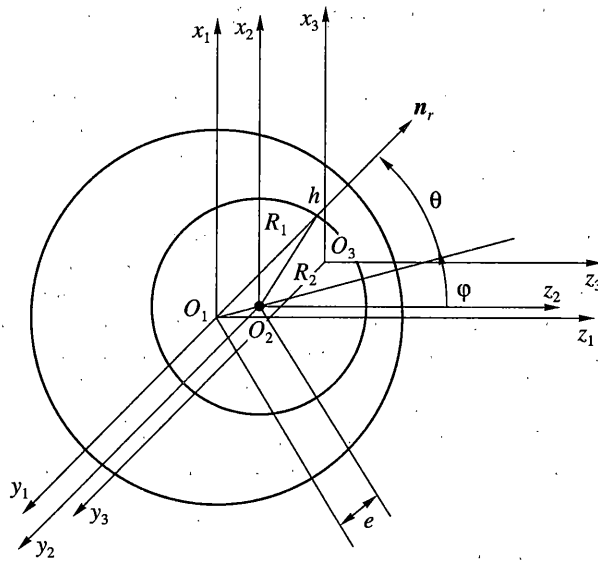
Уравнения движения поплавка для поплавкового гироскопа установленного на гиросtabilизированной платформе при гармонической вибрации основания записываются в виде:

$$m_2[\ddot{x}_0 + \dot{x}_1] = -n_0x_1 + k_{x2}\dot{x}_2 + n_{x2}x_2 + N_{2fx1}$$

$$m_2[\ddot{z}_0 + \dot{z}_1] = -n_0z_1 + k_{z2}\dot{z}_2 + n_{z2}z_2 + N_{2fz1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$m_3[\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2] = -k_{x2}\dot{x}_2 - n_{x2}x_2$$

$$m_3[\ddot{z}_0 + \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2] = -k_{z2}\dot{z}_2 - n_{z2}z_2$$

где m_2, m_3 – массы поплавка и ротора соответственно; n_0 – упругая жесткость устройства, центрирующих поплавков в камере; k_{x2}, k_{z2} – удельные коэффициенты демпфирования колебания ротора в опорах; n_{x2}, n_{z2} – коэффициенты характеризующие упругую жесткость опор ротора; N_{1fx1}, N_{2fz1} – компоненты вектора силы действующей со стороны жидкости, $x_0 = E_{fx0}(\omega t), z_0 = E_{fz0}(\omega t)$ – перемещения основания прибора относительно инерциального пространства; $x_1 = x_{1mf_{x1}}(\omega t), z_1 = z_{1mf_{z1}}(\omega t)$ – перемещение центра масс поплавка O_2 относительно камеры прибора; $x_2 = x_{2mf_{x2}}(\omega t), z_2 = z_{2mf_{z2}}(\omega t)$ – за-

кон движения центра масс ротора O_3 относительно рамки поплавок (точка означает производную по времени).

Для определения интегральных характеристик: векторов силы и момента необходимо решать связанную задачу упругогидродинамики.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, y , полюс которой совпадает с центром O_1 системы $O_1x_1y_1z_1$, связанной с корпусом поплавкового гироскопа (фиг. 2). Полярная ось проходит через точки O_1 и O_2 – центр системы координат $O_2x_2y_2z_2$ движущейся в плоскости $O_1x_1y_1$, и наклонена под углом φ к оси O_1x_1 . Эксцентриситет O_1O_2 обозначим через e .

Задача состоит из трехмерных уравнений Навье – Стокса, уравнения неразрывности и уравнений динамики корпуса гироскопа, как упругой замкнутой цилиндрической оболочки, а также соответствующих граничных условий. Для решения полученной задачи упругогидродинамики перейдем к безразмерным переменным [1]:

$$\begin{aligned} \xi &= (r - R_2)/\delta, \quad \theta = \theta, \quad \tau = \omega t, \quad \zeta = 2y/l_2, \quad V_r = e\omega u_\xi, \quad V_\theta = e\omega/\psi u_\theta \\ V_y &= (e\omega/\psi)l_2/(2R_2)u_\zeta; \quad u_1 = u_m U_1, \quad u_2 = v_m U_2, \quad u_3 = w_m U_3 \\ p &= p_0 + \rho R_2 \frac{e\omega^2}{\psi \text{Re}} \left(P - \text{Re} \left[\frac{\psi E_z f_{z0}''(\tau) \cos(\theta + \varphi) + \frac{\psi E_x f_{x0}''(\tau) \sin(\theta + \varphi)}{e}}{e} \right] \right) \\ a_0^2 &= h_0^2/(12R^2), \quad \psi = \delta/R_2 \ll 1, \quad \lambda = e/\delta; \quad c^2 = E/[\rho_0(1 - \mu_0^2)] \end{aligned} \quad (1)$$

где p_0, ρ, v – уровень отсчета давления, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости; ρ_0, E, μ_0 – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала корпуса; P – редуцированное безразмерное давление жидкости. Остальные обозначения общепринятые в механике жидкости и теории оболочек, причем прогиб оболочки u_3 положителен в сторону противоположную центру кривизны, а продольное перемещение его u_1 положительно в сторону противоположную оси O_1y_1 .

Задача решается методом разложения по малому параметру ψ . Для тонкого слоя жидкости в цилиндрической щели получим уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости в переменных (1) в первом приближении по ψ :

$$\begin{aligned} \partial P / \partial \xi &= 0 \\ \text{Re} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + \lambda \left(u_\xi \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right) \right] &= \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \xi^2} \\ \text{Re} \left[\frac{\partial u_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(u_\xi \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + u_\theta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + u_\zeta \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] &= - \left(\frac{2R_2}{l_2} \right) \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\zeta}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} &= 0, \quad \text{Re} = \frac{\delta^2 \omega}{v} \end{aligned} \quad (2)$$

где Re – колебательное число Рейнольдса.

Граничные условия на непроницаемых поверхностях запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{w_m \partial U_3}{e \partial \tau}, \quad u_\theta = 0, \quad u_\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_* = 1 + \lambda \frac{w_m}{e} U_3 \\ u_\xi &= \frac{z_{1m}}{e} f'_{z1}(\tau) \cos(\theta + \varphi) + \frac{x_{1m}}{e} f'_{x1}(\tau) \sin(\theta + \varphi), \quad u_\theta = 0, \quad u_\zeta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \lambda \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, необходимы условия для редуцированного давления P при истечении жидкости из радиальной щели в цилиндрические, которые значительно больше, чем радиальные [2]:

$$P = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1$$

Уравнения динамики цилиндрической оболочки – корпуса гироскопа

$$\begin{aligned} & \frac{c^2 \rho_0 h_0}{R^2} \left\{ \left(\frac{2R}{l_2} \right) u_m \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1 - \mu_0}{2} u_m \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta^2} - \frac{1 + \mu_0}{2} \left(\frac{2R}{l_2} \right) v_m \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta \partial \theta} - \mu_0 \left(\frac{2R}{l_2} \right) w_m \frac{\partial U_3}{\partial \zeta} \right\} - \\ & - \rho_0 h_0 \omega^2 u_m \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} = -q_s |_{\xi = \xi_*} \\ & \frac{c^2 \rho_0 h_0}{R^2} \left\{ - \frac{1 + \mu_0}{2} \frac{2R}{l_2} u_m \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1 - \mu_0}{2} \left(\frac{2R}{l_2} \right)^2 v_m \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta^2} + v_m \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} + w_m \frac{\partial U_3}{\partial \theta} + \right. \\ & + a_0^2 v_m \left[2(1 - \mu_0) \left(\frac{2R}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \theta^2} \right] - a_0^2 w_m \left[(2 - \mu_0) \left(\frac{2R}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_3}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial \theta^3} \right] \left. \right\} - \\ & - \rho_0 h_0 \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \cos(\theta + \varphi) - \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \sin(\theta + \varphi) + v_m \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} \right) = -q_\theta |_{\xi = \xi_*} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c^2 \rho_0 h_0}{R^2} \left\{ - \mu_0 \frac{2R}{l_2} u_m \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} + v_m \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + a_0^2 v_m \left[(2 - \mu_0) \left(\frac{2R}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^3 U_2}{\partial \zeta^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial \theta^3} \right] + \right. \\ & + w_m U_3 + a_0^2 w_m \left[\left(\frac{2R}{l_2} \right)^4 \frac{\partial^4 U_3}{\partial \zeta^4} + 2 \left(\frac{2R}{l_2} \right)^2 \frac{\partial^4 U_3}{\partial \zeta^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 U_3}{\partial \theta^4} \right] \left. \right\} - \\ & - \rho_0 h_0 \omega^2 \left(\frac{W_{1x1}}{\omega^2} \sin(\theta + \varphi) + \frac{W_{1z1}}{\omega^2} \cos(\theta + \varphi) + w_m \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} \right) = -q_n |_{\xi = \xi_*} \end{aligned}$$

$$q_s = - \frac{\rho R_2 e \omega^2}{\text{Re}} \left(\frac{l_2}{2R_2} \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{w_m}{e} \frac{2R_2}{l_2} \frac{\partial U_3}{\partial \zeta} Q \right)$$

$$q_\theta = \frac{\rho R_2 e \omega^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \xi} + \lambda \frac{w_m}{e} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} Q \right), \quad q_n = - \frac{\rho R_2 e \omega^2}{\text{Re} \psi} Q$$

$$Q = \frac{\text{Re} \psi p_0}{\rho R_2 e \omega^2} + P - \text{Re} \left[\frac{\psi E_x}{e} f_{x0}''(\tau) \sin(\theta + \varphi) + \frac{\psi E_z}{e} f_{z0}''(\tau) \cos(\theta + \varphi) \right]$$

Условия жесткого защемления на торцах корпуса гироскопа запишутся в виде

$$U_1 = U_2 = U_3 = \partial U_3 / \partial \zeta = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1 \quad (5)$$

Гидродинамическая сила, действующая на поплавок имеет компоненты с точностью до ψ [3, 4]:

$$N_{0x} = m\omega^2 E_x f''_{x0}(\tau) - \frac{\rho R_2 e \omega^{22\pi}}{\psi \text{Re}} \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 P \sin(\theta + \varphi) \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta$$

$$N_{0y} = \frac{\rho R_2 e \omega^{22\pi}}{\text{Re}} \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \lambda \cos \theta} \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta \quad (6)$$

$$N_{0z} = m\omega^2 E_z f''_{z0}(\tau) - \frac{\rho R_2 e \omega^{22\pi}}{\psi \text{Re}} \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 P \cos(\theta + \varphi) \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta$$

Отметим, что N_{0y} можно пренебречь, так как $N_{0y}/N_{0x} = O(\psi)$. Гидромеханический момент, действующий на поплавок, имеет компоненты

$$L_{2fx2}^1 = -\frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi^2 \text{Re}} \frac{1}{\lambda} \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{l_2}{2R_2} \zeta P \cos(\theta + \varphi) \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta$$

$$L_{2fy2}^1 = \frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi \text{Re}} \frac{1}{\lambda} \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \lambda \cos \theta} - \lambda P \sin \theta \right) \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta + m[E_x f''_{x0}(\tau) \cos \varphi - E_z f''_{z0}(\tau) \sin \varphi] \quad (7)$$

$$L_{2fz2}^1 = \frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi^2 \text{Re}} \frac{1}{\lambda} \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{l_2}{2R_2} \zeta P \sin(\theta + \varphi) \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta$$

$$e \cos \varphi = x_1(t) = x_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{x1}), \quad e \sin \varphi = z_1(t) = z_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{z1})$$

Кроме того, возникает момент из-за перехода от центра O_1 системы координат, связанной с камерой прибора, к центру O_2 системы координат, связанной с поплавком, в которой и рассматриваются возмущающие моменты $L_{2f} = O_1 O_2 \times N_0$; его проекция на ось $O_2 y_2$ с принятой точностью ψ имеет вид

$$L_{2fy2}^3 = \frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi \text{Re}} \frac{1}{\lambda} \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 P \sin \theta \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta - m[E_x f''_{x0}(\tau) z_1 - E_z f''_{z0}(\tau) x_1] \quad (8)$$

Тогда $L_{2y2}^1 = L_{2fy2}^1 + L_{2fy2}^3$. Нелинейная связанная задача упругогидродинамики (2)–(5) решается методом возмущений. За малый параметр принимается относительный эксцентриситет $\lambda \ll 1$. Получим необходимое двухчленное разложение момента

$$L_{2y2}^1 = \frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi \text{Re} \lambda} \left\{ \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta + \lambda \int_{0-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta \right\} \quad (9)$$

При этом граничные условия (3) сносятся на невозмущенные поверхности $\xi = 1$ и $\xi = 0$ с разложением гидродинамических параметров в ряд Тейлора.

В нулевом приближении по λ из (2) получается линейная система уравнений, решение которой ищется в виде гармонических функций по времени τ , коэффициенты которых представляют собой гармонические функции по углу $\theta + \varphi$. При этом зави-

симось упругих безразмерных продольного и окружного перемещений U_1, U_2 , а также безразмерного прогиба U_3 корпуса прибора от ζ представлена в виде многочленов третьей, второй и четвертой степени соответственно, удовлетворяющих условиям (5) жесткой заделки корпуса на торцах.

Подставим указанный вид решения в линеаризованные уравнения упругогидродинамики (2), (4) и опустим правые части первого и второго уравнений (4), так как они порядка Ψ по сравнению с правой частью третьего уравнения (4) в нулевом приближении по λ . Приравняв нулю коэффициенты при различных тригонометрических функциях от τ и $\theta + \phi$ и, применяя процедуру метода Бубнова – Галеркина по ζ в первом приближении к уравнениям динамики оболочки (4), найдем искомое решение. В силу громоздкости оно не приводится.

Подставляя это решение в формулы (6), находим N_{0x}, N_{0z} – компоненты главного вектора реакции слоя жидкости. Используя их, находим решение уравнений (1) для поступательного движения поплавка, через заданный закон движения основания прибора в виде гармонических функций времени $f_{x0}(\tau) = \sin(\omega\tau + \phi_{x0}), f_{z0}(\tau) = \sin(\omega\tau + \phi_{z0})$.

Подставляя найденное в нулевом приближении по λ решение в первое слагаемое в правой части формулы (9) для вибрационного возмущающего момента, получаем, что после интегрирования по τ от 0 до 2π этот момент в нулевом приближении по λ обращается в нуль, так как в найденном решении θ входит только под знаком синуса и косинуса.

Следовательно, для определения постоянной составляющей

$$\langle L_{y_2y_2}^1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{y_2y_2}^1 d\tau$$

необходимо найти решение задачи упругогидродинамики в первом приближении по λ [1, 3, 4].

Представляя решение в первом приближении по λ в таком же виде, как и в нулевом приближении, т.е. в виде гармонических функций по τ , но с коэффициентами не зависящими от θ , получаем, что в этом приближении система уравнений (2) распадается на две. Одна из них состоит из второго уравнения (2), содержит только необходимую далее величину u_θ , не зависящие от θ , а другая система не содержит ее и не рассматривается.

Система уравнений гидродинамики в первом приближении по λ решается теми же методами, что и в нулевом приближении по λ . Находя это решение, подставим его во второе слагаемое в правой части формулы (9).

В результате получим, необходимую постоянную составляющую момента

$$\begin{aligned} \langle L_{y_2y_2}^1 \rangle = & \frac{m\omega^2}{\Psi 2\varepsilon} E_x E_z \left\{ -K_{os1} \left\{ 6v_e G - \frac{8}{15} F(2\varepsilon^2 w_e M_{s1} - 6v_e M_{s2}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{15} F(12v M_{s2} + 2\varepsilon^2(1-w)M_{s1}) + \frac{1}{4} E_1 12v(M_{s1}^2 + M_{s2}^2) \right\} - \right. \\ & \left. - K_{os22} \left\{ \frac{4}{15} F(2\varepsilon^2 w_e M_{os2} + 6v_e M_{os1}) + \frac{2}{15} F(12v M_{os2} - 2\varepsilon^2(1-w)M_{os1}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} E_1 12v(M_{s2} M_{os1} - M_{s1} M_{os2}) \right\} - K_{os11} \left\{ -\frac{4}{15} F(2\varepsilon^2 w_e M_{os1} - 6v_e M_{os2}) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{15} F(12\nu M_{os2} + 2\varepsilon^2(1-\nu)M_{os1}) + \frac{1}{4} E_1 12\nu(M_{s1}M_{os1} + M_{s2}M_{os2}) \left. \vphantom{\frac{2}{15}} \right\} + \\ + \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) \frac{1}{4} E_1 12\nu(M_{os1}^2 + M_{os2}^2) \left. \vphantom{\frac{1}{4}} \right\}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{Re}{2}}, \quad M_{os1} = b_{33} de_1 Y_{oa}, \quad G = 1 - \frac{th\sigma}{\sigma}, \quad M_{s1} = -FU_2 Y_a$$

$$E_1 = -\frac{256}{315} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{256}{105} - \frac{1}{\sigma^4} \frac{128}{5} + \frac{1}{\sigma^6} Q_1 + \frac{1}{\sigma^2} \frac{128}{15} Q_1(1-F), \quad M_{os2} = Y_{oa} de_7$$

$$E_2 = -\frac{256}{3465} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{256}{315} - \frac{1}{\sigma^4} \frac{128}{7} + \frac{1}{\sigma^6} 384 Q_2 \left(2 + \frac{5}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma^5} 128 Q_2^2 \operatorname{cth} \sigma$$

$$K_{os1} = (A_{01}B_{02} - A_{02}B_{01}) \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) - (A_{01}B_{01} + A_{02}B_{02}) \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0})$$

$$K_{os11} = (B_{02} - A_{02}) \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) - (B_{01} + A_{01}) \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}), \quad M_{s2} = -FU_1 Y_a$$

$$K_{os22} = (B_{01} - A_{01}) \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) + (B_{02} + A_{02}) \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}), \quad M_{s1} = -FU_2 Y_a$$

$$U_1 = 2\varepsilon^2 w \det_7 - 12\nu b_{33} \det_1, \quad U_2 = 2\varepsilon^2 w b_{33} \det_1 + 12\nu \det_7$$

$$U_{11} = \frac{M\omega^2}{G} \det_7 - \frac{K\omega}{G} b_{33} \det_1, \quad U_{22} = \frac{K\omega}{G} \det_7 + \frac{M\omega^2}{G} b_{33} \det_1$$

$$U_{111} = \frac{M\omega^2}{G} U_1 - \frac{K\omega}{G} U_2, \quad U_{222} = \frac{M\omega^2}{G} U_1 + \frac{K\omega}{G} U_2$$

$$Y_a = -\frac{16R^2\omega^2}{15c^2\psi} \frac{\rho R_2}{\rho_0 h_0} \frac{\det_1}{\operatorname{Re} \det_8}, \quad Y_{oa} = \frac{4R^2\omega^2}{3c^2 \det_8} \left[\det_2 - 0.8 \det_1 \left(1 + \frac{\rho R_2}{\rho_0 h_0}\right) \right]$$

$$\det_1 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2, \quad \det_2 = c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}, \quad \det_3 = c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23}$$

$$\det_7 = c_{33} \det_1 - c_{23} \det_2 + c_{13} \det_3, \quad \det_8 = \det_7^2 + d_{33}^2 \det_1^2, \quad d_{33} = -12\nu B_{00}$$

$$c_{11} = -\frac{256(2R)^2}{105 \left(\frac{l_2}{l_2}\right)^2} - \frac{128}{315} (1 - \mu_0) + \frac{256R^2\omega^2}{315c^2}, \quad c_{12} = -\frac{32(2R)}{105 \left(\frac{l_2}{l_2}\right)} (1 + \mu_0)$$

$$c_{13} = -\frac{128(2R)}{315 \left(\frac{l_2}{l_2}\right)} \mu_0, \quad c_{22} = -\frac{4(2R)^2}{5 \left(\frac{l_2}{l_2}\right)^2} (1 + 4a_0^2)(1 - \mu_0) - \frac{16}{105} (1 + a_0^2) + \frac{16R^2\omega^2}{105c^2}$$

$$c_{23} = -\frac{32(2R)^2}{35 \left(\frac{l_2}{l_2}\right)^2} (2 - \mu_0) a_0^2 - \frac{32}{315} (1 + a_0^2) + \frac{256R^2\omega^2}{315c^2}, \quad F = 1 - \frac{15}{\sigma^3} Q_1 \operatorname{th} \sigma$$

$$c_{33} = \frac{256}{3465} (1 + a_0^2) + \frac{128(2R)^4}{7 \left(\frac{l_2}{l_2}\right)^4} a_0^2 + \frac{512(2R)^2}{315 \left(\frac{l_2}{l_2}\right)^2} a_0^2 - \frac{256R^2\omega^2}{3465c^2} + 2\varepsilon^2 w B_{00}$$

$$B_{00} = \frac{R^2 \omega^2}{c^2 \Psi} \frac{\rho R_2}{\rho_0 h_0 \text{Re}} \left[\frac{256}{3465} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{256}{315} + \frac{1}{\sigma^4} \frac{128}{7} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sigma^6} 384 Q_2 \left(2 + \frac{5}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{\sigma^5} 128 Q_2 \text{cth} \sigma \right], \quad Q_2 = 1 - \frac{6}{\sigma} \text{tg} \sigma + \frac{15}{\sigma^2} - \frac{15}{\sigma^3} \text{th} \sigma$$

$$Q_1 = 1 - \frac{3}{\sigma} \text{cth} \sigma + \frac{3}{\sigma^2}, \quad a_0^2 = \frac{h_0^2}{12 R^2}, \quad K = K_0 v, \quad K_0 = 12 \nu m \frac{R_2}{\delta^3} \left(1 - \frac{\text{th} \sigma}{\sigma} \right)$$

$$M = M_0 w, \quad M_0 = m \frac{R_2}{\delta} \left(1 - \frac{\text{th} \sigma}{\sigma} \right), \quad \sigma = \frac{l_2}{2 R_2}, \quad w = \frac{d}{d^2 + f^2}, \quad v = -\frac{1}{6} \varepsilon^2 \frac{f}{d^2 + f^2}$$

$$c_1 = \frac{\text{sh} \varepsilon}{\text{ch} \varepsilon + \text{cos} \varepsilon}, \quad c_2 = \frac{\sin \xi}{\text{ch} \varepsilon + \text{cos} \varepsilon}, \quad d = 1 + \frac{1}{\varepsilon} (c_1 - c_2), \quad f = \frac{1}{\varepsilon} (c_1 + c_2)$$

$$M_{z1} = n_0 - (m_2 + m_3 + M) \omega^2 - \frac{8}{15} F^2 Y_a U_{111} - \frac{m_3^2 \omega^4 (n_{z2} - m_3 \omega^2)}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2}$$

$$M_{z2} = K \omega + \frac{8}{15} F^2 Y_a U_{222} + \frac{k_{z2} m_3^2 \omega^5}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2}$$

$$M_{x1} = M_{z1} + \frac{m_3^2 \omega^4 (n_{z2} - m_3 \omega^2)}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2} - \frac{m_3^2 \omega^4 (n_{x2} - m_3 \omega^2)}{(n_{x2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{x2}^2 \omega^2}$$

$$M_{x2} = M_{z2} - \frac{k_{z2} m_3^2 \omega^5}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2} + \frac{k_{x2} m_3^2 \omega^5}{(n_{x2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{x2}^2 \omega^2}$$

$$M_{0z1} = \Delta m \omega^2 + \frac{8}{15} F Y_{oa} U_{11} + \frac{m_3^2 \omega^4 (n_{z2} - m_3 \omega^2)}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2}$$

$$M_{0x1} = M_{0z1} + \frac{m_3^2 \omega^4 (n_{z2} - m_3 \omega^2)}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2} - \frac{m_3^2 \omega^4 (n_{x2} - m_3 \omega^2)}{(n_{x2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{x2}^2 \omega^2}$$

$$M_{0z2} = -\frac{8}{15} F Y_{oa} U_{22} + \frac{k_{z2} m_3^2 \omega^5}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2}$$

$$M_{0x2} = M_{0z2} - \frac{k_{z2} m_3^2 \omega^5}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2} + \frac{k_{x2} m_3^2 \omega^5}{(n_{x2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{x2}^2 \omega^2}$$

$$A_{01} = -\frac{M_{0z1} M_{z1} + M_{0z2} M_{z2}}{M_{z1}^2 + M_{z2}^2}, \quad A_{02} = \frac{M_{0z1} M_{z2} - M_{0z2} M_{z1}}{M_{z1}^2 + M_{z2}^2}$$

Таблица 1

$f, \text{Гц}$	I	II
10	$3.63 \cdot 10^5$	$-1.32 \cdot 10^1$
100	$4.62 \cdot 10^3$	$-1.29 \cdot 10^1$
5300	$4.61 \cdot 10^0$	$2.73 \cdot 10^{-2}$
13300	$3.6 \cdot 10^2$	$8.76 \cdot 10^1$
26300	$3.82 \cdot 10^0$	$-5.61 \cdot 10^{-2}$
39300	$1.04 \cdot 10^1$	$-1.13 \cdot 10^0$
45200	$1.19 \cdot 10^6$	$5.16 \cdot 10^3$

Таблица 2

$f, \text{Гц}$	I	II
10	$1.45 \cdot 10^3$	$1.36 \cdot 10^0$
100	$1.61 \cdot 10^1$	$9.73 \cdot 10^0$
3900	$2.57 \cdot 10^1$	$-1.88 \cdot 10^0$
11900	$1.39 \cdot 10^3$	$-9.12 \cdot 10^0$
19900	$-8.82 \cdot 10^1$	$-2.07 \cdot 10^0$
27900	$-4.85 \cdot 10^5$	$-1.04 \cdot 10^4$
45200	$2.78 \cdot 10^7$	$1.7 \cdot 10^5$

$$B_{01} = \frac{M_{0x1}M_{x1} + M_{0x2}M_{x2}}{M_{x1}^2 + M_{x2}^2}, \quad B_{02} = \frac{M_{0x1}M_{x2} - M_{0x2}M_{x1}}{M_{x1}^2 + M_{x2}^2}$$

$$m = \pi \rho R_2^2 l_2, \quad \Delta m = m - m_2 - m_3$$

где m – масса жидкости в объеме поплавка.

Произведем расчеты для модели прибора со стальным корпусом (табл. 1) с параметрами $R_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $l_2 = 5.7 \cdot 10^{-2}$ м, $h_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 1.96 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 3 \cdot 10^{-1}$, $\rho_0 = 7.87 \cdot 10^3$ кг/м³, $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 3.53 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $n_0 = 0$ кг/с², $m_3 = 8.96 \cdot 10^{-2}$ кг, $n_{x2} = 3.56 \cdot 10^6$ кг/с², $k_{x2} = 1.12 \cdot 10^2$ кг/с, $n_{z2} = 1.05n_{x2}$, $k_{z2} = 1.05k_{x2}$, $l = 5.71 \cdot 10^{-2}$ м, $R_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, и для прибора с алюминиевым корпусом (табл. 2) с параметрами $R_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $l_2 = 5.7 \cdot 10^{-2}$ м, $h_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 6.96 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 3.4 \cdot 10^{-1}$, $\rho_0 = 2.7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 2.53 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $n_0 = 0$ кг/с², $m_3 = 8.96 \cdot 10^{-2}$ кг, $n_{x2} = 3.56 \cdot 10^6$ кг/с², $k_{x2} = 1.12 \cdot 10^2$ кг/с, $n_{z2} = 1.05n_{x2}$, $k_{z2} = 1.05k_{x2}$, $l = 5.71 \cdot 10^{-2}$ м, $R_1 = 2.025 \cdot 10^{-2}$ м, $\omega = 2\pi f$, получим, что упругая податливость корпуса прибора оказывает влияние в широком диапазоне частот колебаний основания прибора как при эллиптической $\Phi_{x0} - \Phi_{z0} = \pi/2$ (I), так и при линейной $\Phi_{z0} - \Phi_{x0} = 0$ (II) вибрации.

В таблицах приведены значения для $\eta_1 = M_e/M_s$, где M_e – момент $\langle L_{y2y}^1 \rangle$ для упругого, а M_s – момент $\langle L_{2y2}^1 \rangle$ для твердого корпусов прибора.

Из приведенных данных следует, что большее влияние упругости сказывается на высоких частотах, однако на малых и средних частотах упругость оказывает значительное влияние. Влияние упругости изменяется в зависимости от материала, из ко-

Таблица 3

$f, \Gamma\text{ц}$	I	II	I	II
800	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$-3.69 \cdot 10^{-9}$	$2.12 \cdot 10^{-7}$	$-3.75 \cdot 10^{-9}$
2100	$8.26 \cdot 10^{-9}$	$5.18 \cdot 10^{-11}$	$8.37 \cdot 10^{-9}$	$5.17 \cdot 10^{-11}$
4000	$8.4 \cdot 10^{-10}$	$2.24 \cdot 10^{-12}$	$8.4 \cdot 10^{-10}$	$2.29 \cdot 10^{-12}$
12000	$2.84 \cdot 10^{-11}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$2.42 \cdot 10^{-14}$
27900	$2.26 \cdot 10^{-12}$	$8.20 \cdot 10^{-16}$	$2.21 \cdot 10^{-12}$	$8.20 \cdot 10^{-16}$

торого изготовлен корпус прибора. Так для алюминиевого корпуса значения η_1 больше, чем для стального корпуса, так как значение модуля Юнга для стали больше, чем для алюминия. Наблюдается немонотонность поведения момента как для стального, так и для алюминиевого корпуса.

Кроме того, на поплавков в гироскопе действует инерционный момент со стороны ротора перемещающегося в опорах относительно поплавка [1, 3, 4]:

$$L_{yprg} = m_3[x_2(\ddot{z}_2 + \ddot{z}_1 + \ddot{z}_0) - z_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 + \ddot{x}_0)]$$

постоянная составляющая которого

$$\langle L_{yprg} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{yprg} d\tau$$

находится в виде

$$\langle L_{yprg} \rangle = -1/2E_x E_z m_3 \omega^2 [(D_{01} - C_{01} + A_{01} D_{01} + A_{02} D_{02} - B_{01} C_{01} - B_{02} C_{02}) \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) + (D_{02} + C_{02} - A_{02} D_{01} + A_{01} D_{02} + B_{01} C_{02} - B_{02} C_{01}) \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0})]$$

$$C_{01} = \frac{(n_{z2} - m_3 \omega^2) m_3 \omega^2 (A_{01} + 1) + k_{z2} m_3 \omega^3 A_{02}}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2}$$

$$C_{02} = \frac{(n_{z2} - m_3 \omega^2) m_3 \omega^2 A_{02} + k_{z2} m_3 \omega^3 (A_{01} + 1)}{(n_{z2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{z2}^2 \omega^2}$$

$$D_{01} = \frac{(n_{x2} - m_3 \omega^2) m_3 \omega^2 (B_{01} + 1) + k_{x2} m_3 \omega^3 B_{02}}{(n_{x2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{x2}^2 \omega^2}$$

$$D_{02} = \frac{(n_{x2} - m_3 \omega^2) m_3 \omega^2 B_{02} + k_{x2} m_3 \omega^3 (B_{01} + 1)}{(n_{x2} - m_3 \omega^2)^2 + k_{x2}^2 \omega^2}$$

Расчет инерционного момента по последней формуле для алюминиевого корпуса прибора приведен в табл. 3 (первые два столбца относятся к упругому корпусу, а два других – к абсолютно твердому).

Из табл. 3 видно, что инерционный момент $\langle L_{yprg} \rangle$ зависит как от наличия жидкости, так и от упругости корпуса прибора (как показали расчеты $A_{01}, A_{02}, B_{01}, B_{02} \ll 1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрейченко К.П., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом поплавка на вибрирующем основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 44–51.
2. Бургвиц А.Г., Завьялов Г.А. О влиянии сил инерции смазочного слоя на устойчивость движения шипа в подшипнике конечной длины // Изв. вузов. Машиностроение. 1963. № 12. С. 38–48.
3. Городецкий О.М., Климов Д.М. О применении квазистационарного метода для изучения динамики гироскопа с жидкостным подвесом // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 10–20.
4. Андрейченко К.П., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом поплавка при торцевом истечении жидкости // Машиноведение. 1987. № 1. С. 33–41.

Саратов

Поступила в редакцию
22.05.2003