МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2005

УДК 539.3

© 2005 г. С.А. КОРНЕЕВ

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Предложен термомеханический метод моделирования вязкоупругопластических сред при малых деформациях, позволяющий описывать наблюдаемый в опытах эффект скоростного упрочнения материалов, когда динамический предел текучести превышает статический предел текучести. Предварительно проделан анализ уравнений вязкопластичности П. Пэжины, которые представлены в другой, математически эквивалентной форме записи, согласованной с принципом макроскопической определимости А.А. Ильюшина.

Выведены динамические условия пластичности (в пространстве напряжений и деформаций) и закон изменения необратимой деформации, который совпал с ассоциированным законом пластического течения. Полученные результаты согласуются с классическими. При соответствующих значениях материальных параметров имеют место условия пластичности Треска – Сен-Венана, Губера – Мизеса, Ишлинского – Прагера, Кадашевича – Новожилова и динамические поверхности текучести Ивлева – Ишлинского, Калисского, Пэжины. Рассмотренные определяющие соотношения содержат, как предельный случай, уравнения состояния вязкоупругих тел Кельвина, Максвелла, Фойгта. Предложенный подход позволяет также учитывать упругий (механический) гистерезис.

1. Введение. В динамической теории пластического течения (теории вязкоупругопластичности) наиболее трудной является задача по заданию динамического условия пластичности $f_\sigma(\mathbf{T}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}'', \ldots) = 0$ и пластического потенциала $\varphi(\mathbf{T}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}'', \ldots)$, по которому определяется закон изменения необратимой (пластической или неупругой) деформации [1]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \lambda \partial\varphi(\mathbf{T}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}'', \ldots)/\partial\mathbf{T}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}''$ – тензор необратимой деформации, $\mathbf{T}$ – тензор напряжений, θ – температура, $\lambda \geq 0$ – некоторый скалярный множитель, точка сверху обозначает полную производную по времени. Установить экспериментальными методами функции $f_\sigma(\mathbf{T}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}'', \ldots)$, $\varphi(\mathbf{T}, \theta, \boldsymbol{\varepsilon}'', \ldots)$ без предварительного теоретического анализа крайне сложно. Этой цели отвечает, например, теория вязкопластичности Пэжины [2], которая нашла практическое применение при решении широкого круга задач [1, 3]. Данная теория обобщает классическую теорию пластического течения и основывается на работах Гогенемзера, Прагера, Малверна, Соколовского, Никитина и других отечественных и зарубежных ученых, которые изучали распространение пластических волн в стержнях.

В теории Пэжины для описания изотермических процессов динамического нагружения при малых деформациях принимаются следующие уравнения [1, 2]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', \quad \mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \dot{\sigma}/K, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}' = \dot{\tilde{\mathbf{T}}}/(2\mu) \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \gamma^0 \langle \Phi(f_\sigma)\rangle \partial f_\sigma / \partial \mathbf{T} \tag{1.2}$$

Для пластически несжимаемых материалов

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}'' = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ – линейный тензор деформации, $\boldsymbol{\varepsilon}'$ – тензор обратимой (упругой) деформации, $\sigma = \mathrm{tr}\mathbf{T}/3$ – среднее напряжение, $\Phi(x)$ – некоторая устанавливаемая из опыта скалярная функция, принимающая положительные значения при положительных значениях аргумента x и обращающаяся в нуль при $x = 0$. Волнистая черта сверху указывает на девиатор соответствующего тензора (к примеру, для тензора напряжений $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \sigma\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичный тензор). Символ $\langle\Phi(x)\rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle\Phi(x)\rangle = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \\ \Phi(x) & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

Модуль объемного сжатия K, модуль сдвига μ и материальный параметр γ^0 считаются постоянными. Предполагается, что вязкие свойства обнаруживаются только после перехода в пластическое состояние. Благодаря этому существенно упрощается выбор условия пластичности. Функция нагружения (текучести) берется в виде [2]:

$$f_\sigma(\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}'', A_p) = f(\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}'')/\kappa(A_p) - 1 \tag{1.4}$$

Здесь $f(\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}'')$, $\kappa(A_p)$ – некоторые функции соответствующих аргументов,

$$A_p = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}''} \mathbf{T} : d\boldsymbol{\varepsilon}'' \tag{1.5}$$

A_p – работа пластических деформаций (энергетический параметр упрочнения). При конкретизации модели пластической среды используется условие пластичности Губера – Мизеса, по которому

$$f(\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}'') = \|\tilde{\mathbf{T}}\| \tag{1.6}$$

где $\|\mathbf{A}\| = [\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T)]^{1/2}$ – норма (модуль, интенсивность) тензора $\mathbf{A}$. В результате по формулам (1.2), (1.4)–(1.6) получается

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \frac{\gamma^0}{\kappa(A_p)}\left\langle \Phi\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{T}}\|}{\kappa(A_p)} - 1\right)\right\rangle \frac{\tilde{\mathbf{T}}}{\|\tilde{\mathbf{T}}\|} \tag{1.7}$$

Недостатком теории вязкопластичности Пэжина является нечувствительность функции (1.4) и связанного с ней условия пластичности $f_\sigma = 0$ к скорости деформирования $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Как следует из опытов у многих материалов динамический предел текучести значительно превышает статический предел текучести [1, 2]. При попытке учесть данный эффект возникают принципиальные затруднения, которые не удается преодолеть в рамках используемого метода. "Зависимость поверхностей текучести от реологических явлений[1] приводит к некоторой неопределенности, так как неизвестны ни располо-

[1] Под реологическими явлениями понимаются эффекты, зависящие от масштаба времени (из примечания редактора перевода [2]). В их число входят все вязкие эффекты скоростного упрочнения, в частности, эффект превышения динамического предела текучести над статическим.

жение мгновенной поверхности текучести в пространстве напряжений, ни местонахождение точки, в которой достигается пластическое состояние. Направление гиперплоскости, касательной в рассматриваемой точке к мгновенной поверхности текучести, тоже неоднозначно" [2]. Впервые на эти трудности обратили внимание Нахди и Мёрч. Если в число аргументов функции нагружения $f_\sigma(\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \ldots)$ включить скорость изменения полной деформации $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, то тогда надо каким-то образом модифицировать соотношения (1.1), чтобы наряду с упругими свойствами материала учитывались бы его вязкие свойства до выхода на динамическую поверхность текучести. Обычно для этого используется разложение полной деформации на упругую, вязкую и пластическую деформации. Однако, как отмечается в [2], выяснение справедливости этой фундаментальной гипотезы, явное определение каждой из составляющих такого разложения является сложной задачей, решение которой до сих пор не найдено.

Настоящая статья посвящена анализу и дальнейшему развитию динамической теории пластического течения в направлении, обеспечивающем учет вязких эффектов скоростного упрочнения на всех режимах деформирования.

2. Выработка руководящей идеи. Чтобы преодолеть указанные выше затруднения, посмотрим на теорию вязкопластичности Пэжины под другим углом зрения. Для этого приведем систему соотношений (1.1)–(1.7) к эквивалентному виду. Проинтегрировав (1.1) и учтя (1.3), получим

$$\mathbf{T} = \sigma\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}}, \quad \sigma = K\mathrm{tr}\varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{T}} = 2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}'') \tag{2.1}$$

Соотношения (2.1) выполняются для всех режимов деформирования (упругого и пластического) и в этом смысле являются *универсальными*. Для режима пластического деформирования из (1.7) вытекает еще одно выражение для девиатора тензора напряжений

$$\tilde{\mathbf{T}} = \kappa(A_p)[1 + \Phi^{[-1]}(\kappa(A_p)\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|/\gamma^0)]\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|} \tag{2.2}$$

где $\Phi^{[-1]}(\cdot)$ – обратная к $\Phi(\cdot)$ функция.

Как видим, последняя формула (2.1) задает функциональную зависимость девиатора тензора напряжений одного типа $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'')$, а формула (2.2) устанавливает функциональную зависимость другого типа $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', A_p)$. В этой связи возникает вопрос, каким образом надо интерпретировать эти две принципиально разные зависимости, которые одновременно имеют место для девиатора тензора напряжений при пластическом деформировании.

Чтобы снять данный вопрос, поступим следующим образом. Сначала примем определение тензора необратимой деформации.

Определение. В данном, произвольно взятом напряженно-деформированном состоянии точки среды, характеризуемом некоторыми значениями тензора напряжений $\mathbf{T}$ и линейного тензора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, тензором необратимой (пластической) деформации называется тензор, задаваемый выражением

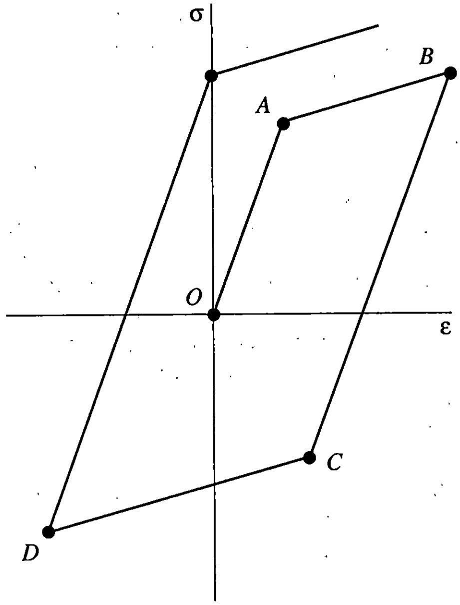
$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{T}}/(2\mu) \tag{2.3}$$

Затем в разложении тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

$$\mathbf{T} = \sigma\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}} \tag{2.4}$$

назначим следующие значения для среднего напряжения:

$$\sigma = K\mathrm{tr}\varepsilon \tag{2.5}$$



Фиг. 1

и для девиатора тензора напряжений:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{cases} 2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}'') \quad \text{при} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0 \\ \kappa(A_p)[1 + \Phi^{[-1]}(\kappa(A_p)\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|/\gamma^0)]\dfrac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|} \quad \text{при} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \neq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

С точки зрения принципа макроскопической определимости А.А. Ильюшина [4]

$$\mathbf{T}(t) = \underset{\tau = -\infty}{\overset{\tau = t}{\mathfrak{F}}} [\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)] \tag{2.7}$$

представление (2.4)–(2.6) означает, что функционал (2.7), описывающий зависимость тензора напряжений от предыстории изменения деформации, является многозначной функцией с бесконечным множеством ветвей. Каждая ветвь является однозначной функцией параметров состояния

$$\mathbf{\Pi} = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', A_p) \tag{2.8}$$

Влияние предыстории изменения деформации осуществляется за счет перехода с одной ветви на другую ветвь. По условию непрерывности конечное значение тензора напряжений на предшествующей ветви (этапе деформирования) равно его начальному значению на последующей ветви (этапе деформирования). Момент смены режима деформирования определяется некоторым условием пластичности, которое либо назначается (исходя из опытных данных), либо выводится (как следствие принятых предположений). Наглядно данное представление проиллюстрировано на фиг. 1, на которой *OA* – первая ветвь, *AB* – вторая ветвь, *BC* – третья ветвь, *CD* – четвертая ветвь и т.д.

Замечание. Если в (2.6) заменить $\kappa(A_p)$ на $f_1(\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\|)$, где f_1 – статическая зависимость интенсивности напряжений $\|\tilde{\mathbf{T}}\|$ от интенсивности деформаций $\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\|$ для материалов с упрочнением, то тогда соотношения (2.3)–(2.6) будут эквивалентны определяющим соотношениям, предложенным С. Калисским при обобщении теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина [1].

3. Определяющие соотношения. Постулируем существование естественной конфигурации, в которой среда находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре θ_0 и давлении p_0. Например, температура θ_0 – комнатная, а давление p_0 – атмосферное. Среду полагаем однородной и изотропной. Деформации и скорости их изменения считаем малыми. Ограничений на изменение температуры пока налагать не будем.

Считаем, что в естественном состоянии необратимая деформация $\boldsymbol{\varepsilon}'' = 0$. Изменение необратимой деформации (так называемый процесс активного нагружения) может происходить лишь при достижении поверхности текучести (т.е. пренебрегаем явлением ползучести). Для простоты начального изложения полагаем, что при любых условиях нагружения поверхность текучести охватывает точку пространства напряжений, соответствующую значению $\mathbf{T} = -p_0\mathbf{I}$. Позже данное ограничение будет снято, чтобы учесть известные опытные данные [5–7].

3.1. Определение необратимой деформации. Рассмотрим сначала случай, когда деформирование из естественной конфигурации происходит без выхода на динамическую поверхность текучести. Полагаем, что в этом случае тензор напряжений является функцией вида

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

Поскольку тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ малы по величине, то в первом приближении

$$\mathbf{T} = \sigma\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}}, \quad \sigma = -p_0 - \gamma(\theta)(\theta - \theta_0) + K(\theta)\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} + K_\upsilon(\theta)\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \tilde{\mathbf{T}} = 2\mu(\theta)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\mu_\upsilon(\theta)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (3.1)$$

Соотношения (3.1) отвечают модели вязкоупругой среды Фойгта и имеют практическое применение [8–11]. Их можно рассматривать как комбинацию уравнения состояния Дюамеля – Неймана

$$\mathbf{T} = [-p_0 - \gamma(\theta - \theta_0) + K\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}]\mathbf{I} + 2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

и вязкой добавки

$$\mathbf{T} = K_\upsilon\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{I} + 2\mu_\upsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (3.2)$$

подчиняющейся закону Навье – Стокса [12]. В динамических процессах добавка (3.2) отлична от нуля, а в квазистатических процессах она обращается в нуль.

Поскольку в рассматриваемой ситуации материал пока не подвергается активному нагружению, то пластическая (необратимая) деформация должна отсутствовать ($\boldsymbol{\varepsilon}'' = 0$). Данный факт можно учесть, если на основании формул (3.1) принять следующее определение тензора необратимой деформации.

Определение. В произвольном напряженно-деформированном состоянии точки среды, характеризуемом некоторыми значениями тензора напряжений $\mathbf{T}$, линейного тензора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, температуры θ и скорости деформации $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, тензором необратимой (пластической) деформации называется тензор, задаваемый следующими выражениями:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}''\mathbf{I}/3 + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \\ \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathrm{tr}\mathbf{T}/3 + p_0 + \gamma(\theta)(\theta - \theta_0) - K_\upsilon(\theta)\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]/K(\theta) \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - [\tilde{\mathbf{T}} - 2\mu_\upsilon(\theta)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}]/[2\mu(\theta)] \end{cases} \quad (3.3)$$

В этом случае подстановка (3.1) в (3.3) дает нужное значение $\boldsymbol{\varepsilon}'' = 0$.

В дальнейшем режим деформирования, при котором $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \neq 0$, будем называть *пластическим*. Если же $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0$, то режим деформирования будем называть *изопластическим* (по аналогии с известными терминами "изотермический процесс", "изохорический процесс", "изобарный процесс" и т.д.).

3.2. Изопластический режим деформирования. Рассмотрим случай, когда бесконечно малая окрестность точки среды подверглась активному нагружению, была разгружена и приобрела остаточную деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}_c$. Чтобы установить определяющее соотношение для тензора напряжений при последующем нагружении, будем исходить из предположения, что приобретенная остаточная деформация не оказывает существенного влияния на основную кристаллическую структуру материала. Другими словами, предполагаем, что при изопластическом деформировании из разгруженной конфигурации выражение для тензора напряжений имеет такой же вид, как при изопластическом деформировании из естественной конфигурации. Тогда на основании (3.1) можно записать

$$\mathbf{T} = \sigma\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}}, \quad \sigma = -p_0 - \gamma(\theta)(\theta - \theta_0) + K(\theta)\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^* + K_\upsilon(\theta)\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*, \quad \tilde{\mathbf{T}} = 2\mu(\theta)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* + 2\mu_\upsilon(\theta)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^*$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_c$ – линейный тензор деформации относительно разгруженной конфигурации[2]. Отсюда получаем

$$\sigma = -p_0 - \gamma(\theta)(\theta - \theta_0) + K(\theta)(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_c) + K_\upsilon(\theta)\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \tilde{\mathbf{T}} = 2\mu(\theta)(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c) + 2\mu_\upsilon(\theta)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{3.4}$$

поскольку $\boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathrm{const}$. Подставив (3.4) в определение тензора необратимой деформации (3.3), будем иметь $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_c$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ (или $\boldsymbol{\varepsilon}'' = \boldsymbol{\varepsilon}_c$), как и должно быть.

3.3. Пластический режим деформирования. Принимаем, что когда $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \neq 0$ (активное нагружение) тензор напряжений является однозначной функцией $\mathbf{T} = \mathbf{T}^p(\boldsymbol{\Pi})$ конечного числа аргументов $\boldsymbol{\Pi}$, например, набора параметров (2.8), тензора скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, температуры θ и параметра упрочнения Одквиста Γ, определяемого формулой

$$\Gamma = \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| dt \tag{3.5}$$

В последнем случае

$$\boldsymbol{\Pi} = (\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', A_p, \Gamma) \tag{3.6}$$

Набор параметров (3.6) совместно с зависимостями (3.4) приводит к следующей системе определяющих соотношений:

$$\mathbf{T} = \sigma\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{T}} \tag{3.7}$$

$$\sigma = \begin{cases} -p_0 - \gamma(\theta)(\theta - \theta_0) + K(\theta)(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_c) + K_\upsilon(\theta)\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & \text{при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0 \\ (1/3)\mathrm{tr}[\mathbf{T}^p(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', A_p, \Gamma)] & \text{при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \neq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{cases} 2\mu(\theta)(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_c) + 2\mu_\upsilon(\theta)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \text{при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0 \\ \tilde{\mathbf{T}}^p(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', A_p, \Gamma) & \text{при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \neq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

[2] Отметим, что линейный тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ характеризует деформацию по отношению к естественной конфигурации среды.

4. Анализ системы определяющих соотношений. Считая среду пластически несжимаемой ($\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}'' = 0$), ограничимся частным случаем, когда

$$\tilde{\mathbf{T}}^p(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', A_p, \Gamma) = 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' + 2\mathrm{M}_\upsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' + 2\mu_\upsilon^p\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \sigma_p\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''/\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| \tag{4.1}$$

а материальные параметры среды M, M_υ, μ_υ^p, σ_p являются некоторыми скалярными функциями аргументов (3.6) и удовлетворяют требованиям

$$\mathrm{M} \ge 0, \quad \mathrm{M}_\upsilon \ge 0, \quad \mu_\upsilon^p \ge 0, \quad \sigma_p > 0 \tag{4.2}$$

В соответствии с (3.3) при выполнении условия $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}'' = 0$ среднее напряжение будет подчиняться единой (для всех режимов деформирования) зависимости

$$\sigma = -p_0 - \gamma(\theta - \theta_0) + K\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} + K_\upsilon\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.3}$$

а тензор необратимой деформации определится формулой

$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\tilde{\mathbf{T}} - 2\mu_\upsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}})/(2\mu) \tag{4.4}$$

С учетом (4.1) девиатор тензора напряжений (3.9) примет вид

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{cases} 2\mu(\theta)(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}_c) + 2\mu_\upsilon(\theta)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \text{при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0 \\ 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' + 2\mathrm{M}_\upsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' + 2\mu_\upsilon^p\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \sigma_p\dfrac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|} & \text{при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \neq 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

В (4.5) тензор $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ является некоторым постоянным тензором, принимающим разные значения на разных этапах изопластического деформирования. Теперь уже не исключается возможность того, что в ходе разгрузки может происходить повторное пластическое деформирование (область пространства напряжений, ограниченная поверхностью текучести, может не содержать точку $\mathbf{T} = -p_0\mathbf{I}$).

Рассматривая соотношения (4.2)–(4.5) как исходные (постулируемые) положения, установим вытекающие из них следствия.

Подставив верхнее соотношение (4.5) в определение тензора необратимой деформации (4.4), получим очевидное равенство $\boldsymbol{\varepsilon}'' = \boldsymbol{\varepsilon}_c$. Поэтому все последующие результаты являются нетривиальными следствиями определения (4.4) и нижнего соотношения (4.5), описывающего изменение девиатора тензора напряжений при пластическом деформировании.

4.1. Статические условия пластичности в пространстве напряжений. Для квазистатических процессов определение (4.4) и нижнее определяющее соотношение (4.5) имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\mathbf{T}}/(2\mu) \tag{4.6}$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' + \sigma_p\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\|} \tag{4.7}$$

Из (4.7) получаем

$$\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' = \sigma_p\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\|} \tag{4.8}$$

Взяв норму от левой и правой частей (4.8), придем к статическому условию пластичности в пространстве напряжений

$$\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}''\| = \sigma_p \tag{4.9}$$

В координатной форме записи выражение (4.9) имеет вид

$$3/2(\tilde{T}_{ij} - 2M\varepsilon''_{ij})(\tilde{T}_{ij} - 2M\varepsilon''_{ij}) = \sigma_s^2 \tag{4.10}$$

где $\tilde{T}_{ij}$ – компоненты девиатора тензора напряжений, а

$$\sigma_s = \sqrt{3/2}\sigma_p \tag{4.11}$$

σ_s – предел текучести на растяжение. Если в (4.10) принять $M = M(\theta, \Gamma)$ и $\sigma_p = \sigma_p(\theta, \Gamma)$, получим условие пластичности Кадашевича – Новожилова

$$(3/2)[\tilde{T}_{ij} - 2M(\theta, \Gamma)\varepsilon''_{ij}][\tilde{T}_{ij} - 2M(\theta, \Gamma)\varepsilon''_{ij}] = \sigma_s^2(\theta, \Gamma)$$

которое содержит, как частный случай, условия пластичности Ишлинского – Прагера и Губера – Мизеса (при значениях $M = M(\theta)$, $\sigma_p = \sigma_p(\theta)$ и $M = 0$, $\sigma_p = \sigma_p(\theta)$ соответственно). Если же в (4.10) положить

$$M = 0, \quad \sigma_p = \tau_s(\theta)\sqrt{2(3 + \mu^2_{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon'')})/3}$$

придем к условию пластичности Треска – Сен-Венана

$$\tau_{\max} = \tau_s(\theta)$$

где $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ – максимальное касательное напряжение ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ – главные напряжения), $\tau_s(\theta)$ – предел текучести при чистом сдвиге, $\mu_{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon'')}$ – параметр Лоде – Надаи тензора $(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}'')$. Чтобы убедиться в последнем, надо учесть, что в главных осях тензора напряжений [13]:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{\tau_{\max}}{3}\begin{Vmatrix} -(\mu_\sigma - 3) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu_\sigma + 3) \end{Vmatrix}$$

и в соответствии с (4.6) тензоры $\tilde{\mathbf{T}}$, $(\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \boldsymbol{\varepsilon}'')$ соосны:

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}'') \tag{4.12}$$

Поэтому (см. [13]) параметры Лоде – Надаи у них одинаковые: $\mu_{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon'')} = \mu_\sigma$.

4.2. Динамические условия пластичности в пространстве напряжений. Для динамических процессов нижнее соотношение (4.5) можно записать двумя эквивалентными способами:

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{T}} - 2M\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - 2M_\upsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \sigma_p\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|} \\ \tilde{\mathbf{T}} - 2M\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (\sigma_p + 2M_\upsilon\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}\end{gathered} \tag{4.13}$$

Взяв норму, получим выражения

$$\begin{gathered}\|\tilde{\mathbf{T}} - 2M\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - 2M_\upsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| = \sigma_p \\ \|\tilde{\mathbf{T}} - 2M\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\| = \sigma_p + 2M_\upsilon\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|\end{gathered} \tag{4.14}$$

которые отражают эволюцию динамических поверхностей текучести в пространстве напряжений. Поскольку в момент смены режима деформирования $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0$, из (4.14) вытекает динамическое условие пластичности

$$\left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\| = \sigma_p \tag{4.15}$$

Благодаря члену, содержащему скорость изменения полной деформации $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, динамическое условие пластичности (4.15) учитывает вязкие эффекты скоростного упрочнения при изопластическом (или вязкоупругом) деформировании. Это важно, так как, например, у низкоуглеродистых сталей динамический предел текучести может превышать статический предел текучести в 2–3 раза [1, 2].

Выражения (4.14) определяют динамические функции нагружения

$$\begin{aligned} f_\sigma &= \left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\mathrm{M}_\upsilon \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| - \sigma_p \\ f_\sigma &= \left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\| - \sigma_p - 2\mathrm{M}_\upsilon \left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ниже будет показано, что каждая из формул (4.13) приводит к закону пластического течения $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \lambda \partial f_\sigma / \partial \mathbf{T}$, ассоциированному с соответствующей поверхностью текучести $f_\sigma = 0$, задаваемой (4.16). Эти динамические поверхности текучести имеют разную кинематическую интерпретацию. По отношению к скорости изменения необратимой деформации $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''$ верхнее выражение (4.16) указывает на трансляционное упрочнение материала, а нижнее выражение – на его изотропное упрочнение. Несмотря на это обстоятельство, функции нагружения (4.16) *функционально* эквивалентны (рассчитываемые по ним приращения необратимой деформации имеют одинаковое значение), поскольку основываются на эквивалентных представлениях (4.13).

Если в верхних формулах (4.13), (4.16) положить $\mu_\upsilon^p = 0$, получим

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' + 2M_\upsilon \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' + \sigma_p \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\|} \tag{4.17}$$

$$f_\sigma = \left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mathrm{M}_\upsilon \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| - \sigma_p \tag{4.18}$$

С точностью до обозначений уравнение состояния (4.17) совпадает с определяющим соотношением для девиатора тензора напряжений, выведенным в [14] на основании принципа максимума Мизеса и предположения о том, что динамическая функция нагружения имеет вид (4.18). Если в нижних формулах (4.13), (4.16) принять $\mu_\upsilon^p = 0$, $\mathrm{M} = 0$, $\sigma_p = \sigma_p(\theta, A_p)$, $\mathrm{M}_\upsilon = \mathrm{M}_\upsilon(\theta, A_p, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|)$, будем иметь

$$\tilde{\mathbf{T}} = \left(\sigma_p + 2\mathrm{M}_\upsilon \left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\|\right) \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\|} \tag{4.19}$$

$$f_\sigma = \left\|\tilde{\mathbf{T}}\right\| - \sigma_p - 2\mathrm{M}_\upsilon \left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| \tag{4.20}$$

При

$$\sigma_p = \kappa(A_p), \quad 2\mathrm{M}_\upsilon \left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| = \kappa(A_p)\Phi^{[-1]}\left(\kappa(A_p)\left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| / \gamma^0\right)$$

формула (4.19) переходит в нижнее соотношение (2.6), а формула (4.20) задает динамическую поверхность текучести Пэжины [2]:

$$\left\|\tilde{\mathbf{T}}\right\| = \kappa(A_p)\left\lfloor 1 + \Phi^{[-1]}\left(\kappa(A_p)\left\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| / \gamma^0\right) \right\rfloor$$

4.3. Ассоциированный закон течения. Чтобы убедиться в том, что определяющие соотношения (4.5) приводят к ассоциированному закону течения, рассмотрим, например, верхнее выражение (4.16). Поскольку в данном случае

$$\frac{\partial f_\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{\Pi})}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}(\mathbf{\Pi})\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p(\mathbf{\Pi})\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - 2\mathrm{M}_\upsilon(\mathbf{\Pi})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}(\mathbf{\Pi})\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p(\mathbf{\Pi})\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - 2\mathrm{M}_\upsilon(\mathbf{\Pi})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\|}$$

из верхнего уравнения (4.13) находим

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \lambda \partial f_\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{\Pi})/\partial \mathbf{T} \tag{4.21}$$

$$\lambda = \frac{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}{\sigma_p}\left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'' - 2\mu_\upsilon^p\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - 2\mathrm{M}_\upsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\right\| \geq 0 \tag{4.22}$$

где λ – скалярный множитель. Нетрудно проверить, что закон (4.21) имеет место и для нижних соотношений (4.13), (4.16), но с иным значением множителя λ. В случае квазистатических процессов из (4.16), (4.21), (4.22) получаем

$$\begin{gathered} f_\sigma = \left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}(\mathbf{\Pi}_{st})\boldsymbol{\varepsilon}''\right\| - \sigma_p(\mathbf{\Pi}_{st}), \quad d\boldsymbol{\varepsilon}'' = d\lambda' \partial f_\sigma/\partial \mathbf{T}, \\ d\lambda' = \|d\boldsymbol{\varepsilon}''\|\left\|\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}(\mathbf{\Pi}_{st})\boldsymbol{\varepsilon}''\right\|/\sigma_p(\mathbf{\Pi}_{st}) \end{gathered} \tag{4.23}$$

где $\mathbf{\Pi}_{st} = (\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', A_p, \Gamma)$ – “квазистатический” набор параметров состояния (3.6), $d\lambda'$ – бесконечно малый скалярный множитель.

4.4. Уравнения состояния А.Ю. Ишлинского и Прандтля – Рейсса. Продифференцируем выражение (4.6) или, что то же самое, выражение (4.12):

$$d\tilde{\mathbf{T}} = 2\mu(d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - d\boldsymbol{\varepsilon}'') + 2(d\mu/d\theta)(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}'')d\theta \tag{4.24}$$

Выразив отсюда $d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и приняв во внимание (4.6), (4.11), (4.23), получим

$$\begin{gathered} \sqrt{(3/2)(\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'') : (\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'')} = \sigma_s \\ d\boldsymbol{\varepsilon}'' = d\lambda'(\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}''), \quad d\lambda' = \sqrt{(3/2)d\boldsymbol{\varepsilon}'' : d\boldsymbol{\varepsilon}''}/\sigma_s \\ d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu}d\tilde{\mathbf{T}} - \frac{(d\mu/d\theta)}{2\mu^2}\tilde{\mathbf{T}}d\theta + d\lambda'(\tilde{\mathbf{T}} - 2\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}'') \end{gathered} \tag{4.25}$$

Если в системе уравнений (4.25), описывающих квазистатические процессы, положить $d\mu/d\theta = 0$, $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\theta)$ придем к уравнениям состояния А.Ю. Ишлинского [15]. Если же дополнительно принять $\mathrm{M} = 0$, придем к уравнениям Прандтля – Рейсса с условием пластичности Губера – Мизеса [16, 17].

4.5. Динамическое условие пластичности в пространстве деформаций. Чтобы получить деформационное условие пластичности, подставим в определение тензора необратимой деформации (4.4) нижнее соотношение (4.5). После несложных преобразований получим

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}'' + \mathrm{K}_\varepsilon \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + (\varepsilon_p + \tau_\varepsilon\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|} \tag{4.26}$$

$$\kappa_\varepsilon = 1 + \mathrm{M}/\mu \geq 1, \quad \varepsilon_p = \sigma_p/(2\mu) > 0, \quad \mathrm{K}_\varepsilon = (\mu_\upsilon^p - \mu_\upsilon)/\mu, \quad \tau_\varepsilon = \mathrm{M}_\upsilon/\mu \geq 0 \tag{4.27}$$

Выражение (4.26) можно записать двумя способами:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}'' - \mathrm{K}_\varepsilon \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (\varepsilon_p + \tau_\varepsilon \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}'' - \mathrm{K}_\varepsilon \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \tau_\varepsilon \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \varepsilon_p \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}$$

Взяв норму, получим

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}'' - \mathrm{K}_\varepsilon \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\| = \varepsilon_p + \tau_\varepsilon \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \quad \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}'' - \mathrm{K}_\varepsilon \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \tau_\varepsilon \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| = \varepsilon_p \tag{4.28}$$

По отношению к параметру $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''$ первая поверхность текучести (4.28) указывает на изотропное упрочнение материала, а вторая поверхность текучести (4.28) – на его трансляционное упрочнение. По отношению к параметрам $\boldsymbol{\varepsilon}''$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ упрочнение носит трансляционный характер. Положив в (4.28) $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0$, придем к следующему динамическому условию пластичности в пространстве деформаций:

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}'' - \mathrm{K}_\varepsilon \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\| = \varepsilon_p \tag{4.29}$$

4.6. Квазистатический закон изменения необратимой деформации. Согласно (4.26), (4.28) в квазистатических процессах пластического деформирования

$$d\boldsymbol{\varepsilon}'' = \|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}''\|}, \quad \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}''\| = \varepsilon_p \tag{4.30}$$

Считая для определенности материальные параметры в нижнем соотношении (4.5) функциями температуры и параметра упрочнения Одквиста (3.5), со ссылкой на (4.27) будем иметь

$$\kappa_\varepsilon = 1 + \frac{\mathrm{M}(\theta, \Gamma)}{\mu(\theta)}, \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma_p(\theta, \Gamma)}{2\mu(\theta)}, \quad \mathrm{K}_\varepsilon = \frac{\mu_\upsilon^p(\theta, \Gamma) - \mu_\upsilon(\theta)}{\mu(\theta)}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{\mathrm{M}_\upsilon(\theta, \Gamma)}{\mu(\theta)} \tag{4.31}$$

Продифференцируем второе выражение (4.30) и учтем (4.31); тогда получим

$$\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| = Y^{-1}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}''\|} : d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \theta} + \frac{\partial \kappa_\varepsilon}{\partial \theta}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}''\|} : \boldsymbol{\varepsilon}''\right)\mathrm{d}\theta\right] \tag{4.32}$$

$$Y(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \theta, \Gamma) = \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma) + \frac{\partial \varepsilon_p(\theta, \Gamma)}{\partial \Gamma} + \frac{\partial \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)}{\partial \Gamma}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''\|} : \boldsymbol{\varepsilon}'' \tag{4.33}$$

Подставив (4.32) в первое выражение (4.30), находим[3]

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{A}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \theta, \Gamma) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \theta, \Gamma)\mathrm{d}\theta \tag{4.34}$$

где ($\otimes$ – знак диадного умножения).

$$\mathbf{A}_\varepsilon = [Y(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \theta, \Gamma)]^{-1}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''\|} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''\|} \tag{4.35}$$

$$\mathbf{B}_\varepsilon = -[Y(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \theta, \Gamma)]^{-1}\left(\frac{\partial \varepsilon_p(\theta, \Gamma)}{\partial \theta} + \frac{\partial \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)}{\partial \theta}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''\|} : \boldsymbol{\varepsilon}''\right)\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''\|} \tag{4.36}$$

[3] Здесь учтено, что $\mathbf{A}_\varepsilon : d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_\varepsilon : d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Согласно (4.32) параметр (4.33) не может быть равным нулю, ибо в противном случае в изотермических процессах пластического деформирования бесконечно малым приращениям полной деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ отвечали бы бесконечно большие приращения необратимой деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}''$. Рассмотрев простые процессы [4], нетрудно убедиться, что $Y > 0$. Из (4.33) можно также установить, что

$$Y_{\min}(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}'', \Gamma) \equiv \min_{\boldsymbol{\varepsilon}}[Y(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \Gamma)] = \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma) + \partial\varepsilon_p(\theta, \Gamma)/\partial\Gamma - |\partial\kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)/\partial\Gamma|\|\boldsymbol{\varepsilon}''\|$$

Поэтому в течение процесса деформирования должно выполняться условие

$$Y_{\min}(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}'', \Gamma) = \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma) + \frac{\partial\varepsilon_p(\theta, \Gamma)}{\partial\Gamma} - \left|\frac{\partial\kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)}{\partial\Gamma}\right|\|\boldsymbol{\varepsilon}''\| > 0$$

Например, для идеально пластических сред, у которых $\sigma_p = \sigma_p(\theta)$ и $M = 0$, по формулам (4.31), (4.33) имеем $Y = 1$.

Поскольку $\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| \geq 0$, приходим к выводу, что при выполнении статического условия пластичности (второго условия (4.30) в пространстве деформаций или условия (4.9) в пространстве напряжений) активное нагружение ($\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| > 0$), нейтральное нагружение ($\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| = 0$) или разгрузка (переход от пластического деформирования к изопластическому) будут происходить тогда, когда в правой части (4.32) выражение

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|} : d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial\theta} + \frac{\partial\kappa_\varepsilon}{\partial\theta}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|} : \boldsymbol{\varepsilon}''\right)d\theta$$

будет больше нуля, равно нулю или меньше нулю соответственно.

Если в двучленной формуле (4.34) положить

$$\mathbf{B}_\varepsilon = 0 \tag{4.37}$$

то тогда в соответствии с (4.36) будем иметь

$$\partial\kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)/\partial\theta = 0, \quad \partial\varepsilon_p(\theta, \Gamma)/\partial\theta = 0 \tag{4.38}$$

Из (4.11), (4.31), (4.38) вытекает, что отношения предела текучести σ_s и модуля упрочнения M к модулю сдвига μ не должны зависеть от температуры

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sigma_s(\theta, \Gamma)}{\mu(\theta)}\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{M(\theta, \Gamma)}{\mu(\theta)}\right] = 0 \tag{4.39}$$

С физической точки зрения допущение (4.37) означает, что при отсутствии деформации среды приращения необратимой (пластической) деформации, вызванные изменением температуры, либо отсутствуют, либо пренебрежимо малы. Для некоторых металлов с кубической структурой кристаллической решетки предположение (4.37) подтверждается экспериментально [18]. В общем случае указанное допущение не всегда является оправданным.

Замечание. Если в (4.31) вместо параметра упрочнения Одквиста (3.5) использовать энергетический параметр упрочнения (1.5), для которого в соответствии с (1.3), (4.12) при квазистатическом деформировании

$$dA_p = 2\mu(\theta)(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}'') : d\boldsymbol{\varepsilon}''$$

то тогда вместо (4.34)–(4.36), (4.32) получились бы следующие соотношения:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{A}_\varepsilon(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', A_p) : d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}_\varepsilon(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', A_p)d\theta \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\varepsilon &= Y^{-1}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''\|}\otimes\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''\|}\\
\mathbf{B}_\varepsilon &= -Y^{-1}\left[\frac{\partial\varepsilon_p(\theta, A_p)}{\partial\theta}+\frac{\partial\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)}{\partial\theta}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''\|}:\boldsymbol{\varepsilon}''\right]\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''\|}\\
\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| &= Y^{-1}\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|}:d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\left(\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial\theta}+\frac{\partial\kappa_\varepsilon}{\partial\theta}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|}:\boldsymbol{\varepsilon}''\right)d\theta\right]\\
Y(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', A_p) &= \kappa_\varepsilon+2\mu\left(\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial A_p}+\frac{\partial\kappa_\varepsilon}{\partial A_p}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|}:\boldsymbol{\varepsilon}''\right)\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|}:(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}'')>0
\end{aligned}\qquad(4.41)$$

Тогда если в данном напряженно-деформированном состоянии точки среды выполняется статическое условие пластичности

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, A_p)\boldsymbol{\varepsilon}''\| = \varepsilon_p(\theta, A_p)$$

то активное нагружение ($\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| > 0$), нейтральное нагружение ($\|d\boldsymbol{\varepsilon}''\| = 0$) или разгрузка из указанного состояния будут происходить при таких приращениях $d\boldsymbol{\varepsilon}$ и $d\theta$, для которых величина

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|}:d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\left(\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial\theta}+\frac{\partial\kappa_\varepsilon}{\partial\theta}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}''\|}:\boldsymbol{\varepsilon}''\right)d\theta$$

соответственно положительна, равна нулю или отрицательна. При наложении на выражение (4.41) ограничения (4.37) получаются равенства вида (4.38), (4.39), в которых параметр упрочнения Γ заменяется параметром A_p.

4.7. Динамический закон изменения необратимой деформации. Представим нижнее определяющее соотношение (4.5) в виде

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\mathrm{M}(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''+2\mu_\upsilon^p(\theta, \Gamma)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}+\Sigma_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}\qquad(4.42)$$

положив тем самым

$$\Sigma_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma) = 2\mathrm{M}_\upsilon(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma)\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|+\sigma_p(\theta, \Gamma)\qquad(4.43)$$

Подставив (4.42) в (4.4) и приняв во внимание (4.31), получим

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''-\mathrm{K}_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathrm{E}_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma)\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}\qquad(4.44)$$

где в соответствии с (4.2), (4.31), (4.43):

$$\mathrm{E}_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma)\equiv\Sigma_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma)/[2\mu(\theta)]\geq\mathrm{E}_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|=0, \Gamma) = \varepsilon_p(\theta, \Gamma)>0$$

Из уравнения (4.44) вытекают следующие два равенства:

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''-\mathrm{K}_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\| = \mathrm{E}_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma)\qquad(4.45)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''-\mathrm{K}_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}''-\mathrm{K}_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\|}\qquad(4.46)$$

Равенство (4.45) определяет динамическую поверхность текучести в пространстве деформаций. Полагая

$$\partial E_p(\theta, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|, \Gamma)/\partial\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| > 0 \tag{4.47}$$

из (4.45) находим

$$\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| = E_p^{[-1]}(\theta, \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}'' - K_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|, \Gamma) \tag{4.48}$$

где $E_p^{[-1]}(\theta, \|\cdot\|, \Gamma)$ – функция, обратная к функции $E_p(\theta, \|\cdot\|, \Gamma)$. Подставив (4.48) в (4.46), получим уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = E_p^{[-1]}(\theta, \|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}'' - K_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|, \Gamma)\frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}'' - K_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon(\theta, \Gamma)\boldsymbol{\varepsilon}'' - K_\varepsilon(\theta, \Gamma)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|}$$

которое определяет закон изменения тензора необратимой деформации в виде $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' =$ $= \boldsymbol{\varphi}(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Gamma)$. В результате остается лишь установить, каким образом происходит смена режима деформирования в случаях, когда выполняется динамическое условие пластичности (4.29). С этой целью продифференцируем по времени (4.45). После несложных преобразований, использующих уравнение (4.46), получим

$$\frac{\partial E_p}{\partial\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}\frac{d\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}{dt} + \left[\frac{\partial E_p}{\partial \Gamma} + \kappa_\varepsilon + \mathbf{n}_\varepsilon : \left(\frac{\partial \kappa_\varepsilon}{\partial \Gamma}\boldsymbol{\varepsilon}'' + \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \Gamma}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\right]\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| =$$

$$= \mathbf{n}_\varepsilon : \left[\left(1 - \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \theta}\dot{\theta}\right)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - K_\varepsilon\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \kappa_\varepsilon}{\partial \theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}''\right] - \frac{\partial E_p}{\partial \theta}\dot{\theta} \tag{4.49}$$

$$\mathbf{n}_\varepsilon = \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}'' - K_\varepsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}'' - K_\varepsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\|}$$

где $\mathbf{n}_\varepsilon$ – направляющий тензор-девиатор, отвечающий внешней нормали к динамической поверхности текучести (4.45). В момент смены режима деформирования $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0$. Поэтому уравнение (4.49) принимает вид

$$\frac{\partial E_p}{\partial\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}\frac{d\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}{dt} = \mathbf{n}_\varepsilon : \left[\left(1 - \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \theta}\dot{\theta}\right)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - K_\varepsilon\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \kappa_\varepsilon}{\partial \theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}''\right] - \frac{\partial E_p}{\partial \theta}\dot{\theta} \tag{4.50}$$

Поскольку $\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| \geq 0$, то с учетом (4.47) приходим к выводу, что при выполнении динамического условия пластичности (4.29) в пространстве деформаций (или динамического условия (4.15) в пространстве напряжений) активное нагружение, нейтральное нагружение или разгрузка будут происходить в том случае, когда в правой части (4.50) выражение

$$\mathbf{n}_\varepsilon : \left[\left(1 - \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial \theta}\dot{\theta}\right)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} - K_\varepsilon\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \kappa_\varepsilon}{\partial \theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}''\right] - \frac{\partial E_p}{\partial \theta}\dot{\theta}$$

будет больше нуля, равно нулю или меньше нуля соответственно.

Замечание. Нетрудно убедиться, что при использовании энергетического параметра упрочнения A_p все полученные соотношения сохраняют свой вид, если только в них заменить параметр Г параметром A_p. Исключение составляет лишь релаксационное уравнение (4.49), которое надо заменить уравнением

$$\frac{\partial E_p}{\partial\|\boldsymbol{\varepsilon}''\|}\frac{d\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|}{dt}+\left\{\kappa_\varepsilon+2\mathbf{n}_\varepsilon:[\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}'')+\mu_\upsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}]\left[\frac{\partial E_p}{\partial A_p}+\frac{\partial\kappa_\varepsilon}{\partial A_p}\mathbf{n}_\varepsilon:\boldsymbol{\varepsilon}''+\frac{\partial K_\varepsilon}{\partial A_p}\mathbf{n}_\varepsilon:\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right]\right\}\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\| =$$

$$= \mathbf{n}_\varepsilon:\left[\left(1-\frac{\partial K_\varepsilon}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}-K_\varepsilon\ddot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}-\frac{\partial\kappa_\varepsilon}{\partial\theta}\dot{\theta}\boldsymbol{\varepsilon}''\right]-\frac{\partial E_p}{\partial\theta}\dot{\theta}$$

4.8. Предельные случаи. Если в соотношениях (4.3)–(4.5) принять $\sigma_p = \infty$, то тогда любое деформирование среды будет изопластическим, а тензор напряжений будет описываться уравнением

$$\mathbf{T} = [-p_0-\gamma(\theta-\theta_0)+K\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}+K_\upsilon\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\mathbf{I}+2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}+2\mu_\upsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{4.51}$$

соответствующем модели вязкоупругого твердого тела Фойгта. Если же положить $\sigma_p = 0$ и $\mu_\upsilon = \mu_\upsilon^p$, то деформирование среды всегда будет пластическим, а изменение девиатора тензора напряжений и тензора необратимой деформации будет описываться системой уравнений

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}} &= 2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}'')+2\mu_\upsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\\ \tilde{\mathbf{T}} &= 2M\boldsymbol{\varepsilon}''+2\mu_\upsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}+2M_\upsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\end{aligned} \tag{4.52}$$

Путем несложных преобразований систему (4.52) можно привести к виду

$$\tilde{\mathbf{T}} = 2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\varepsilon}'')+2\mu_\upsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}},\quad \tau_\varepsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''+\kappa_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}'' = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.53}$$

где τ_ε, κ_ε задаются формулами (4.27). При $\mu_\upsilon = 0$, $\mu = \mathrm{const}$ система (4.53) сводится к одному уравнению

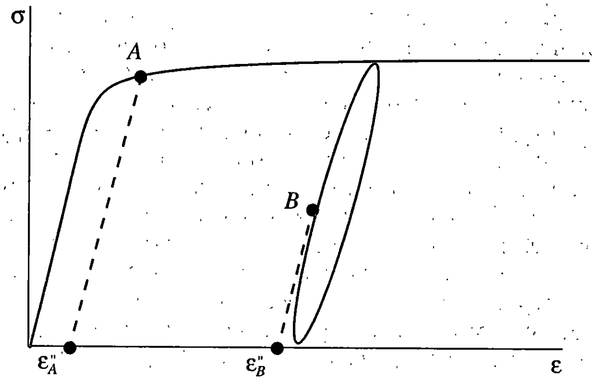
$$\dot{\tilde{\mathbf{T}}}+\frac{\kappa_\varepsilon}{\tau_\varepsilon}\tilde{\mathbf{T}} = 2\mu\left(\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}+\frac{\kappa_\varepsilon-1}{\tau_\varepsilon}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{4.54}$$

соответствующему модели вязкоупругого твердого тела Кельвина. Наконец, если положить $\kappa_\varepsilon = 1$, то уравнение (4.54) перейдет в определяющее соотношение вязкоупругого твердого тела Максвелла (см., например, [16, 17, 19]):

$$\tau_\varepsilon\dot{\tilde{\mathbf{T}}}+\tilde{\mathbf{T}} = 2\mu\tau_\varepsilon\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{4.55}$$

В теории вязкопластичности Пэжины предельным переходом можно получить лишь соотношение Максвелла (4.55). Переход к соотношениям Фойгта (4.51) и Кельвина (4.54) не представляется возможным, так как в отличие от (4.5) в (2.6) нет членов, которые учитывали бы вязкие свойства среды нужным образом.

Замечание. Здесь надо еще раз сделать оговорку о пределах применимости уравнений (4.3)–(4.5). Хотя данные уравнения и содержат, как частный случай, уравнения Кельвина и Максвелла, в общем случае они не предназначены для описания таких явлений, как ползучесть и релаксация напряжений в общепринятом их понимании [17, 20]. Это видно хотя бы из того, что при мгновенном одноосном нагружении стержня постоянным растягивающим напряжением, не превышающем предел текучести, деформирование стержня, описываемое верхним уравнением (4.5), будет происходить без изменения обратимой деформации. После снятия нагрузки стержень примет свои первоначальные размеры.



Фиг. 2

4.9. Возможные обобщения. Путем небольшой модификации исходных положений (3.7)–(3.9) можно учесть упругий (механический) гистерезис (фиг. 2). Для этого достаточно, например, сохранить прежними определение тензора необратимой деформации (3.3) и условие пластической несжимаемости (1.3), задав определяющее соотношение для девиатора тензора напряжений в виде

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{T}}^{(\mathrm{I})}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', \ldots) - \text{режим I типа} \\ \tilde{\mathbf{T}}^{(\mathrm{II})}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', \ldots) - \text{режим II типа} \end{cases}$$

При этом из-за непрерывного изменения необратимой деформации необходимо говорить, например, о режимах деформирования первого и второго типов.

Возможности рассмотренной модели можно также расширить, если включить в список параметров (3.6) еще два внутренних параметра состояния – тензор дополнительных напряжений $\mathbf{T}_\rho$ и предел пластичности σ_p:

$$\Pi = (\theta, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}'', \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'', A_p, \Gamma, \mathbf{T}_\rho, \sigma_p)$$

Если ограничиться известными моделями пластических сред, которые перечисляются в обзоре монографии [21, стр. 111–113], то тогда надо тензор необратимой деформации определить формулой (2.3), а определяющее соотношение для девиатора тензора напряжений задать в виде

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{cases} 2\mu(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}_c) \text{ при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0 \\ \mathbf{T}_\rho + \sigma_p \dfrac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''}{\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}''\|} \text{ при } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' \neq 0 \end{cases}$$

и, наконец, изменение внутренних параметров $\mathbf{T}_\rho$, σ_p следует подчинить релаксационным уравнениям

$$\dot{\mathbf{T}}_\rho = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Pi}), \quad \dot{\sigma}_p = F(\boldsymbol{\Pi})$$

В этом случае получится условие пластичности

$$\|\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_\rho\| = \sigma_p$$

которое не учитывает эффект скоростного упрочнения, так как в естественном состоянии $\mathbf{T}_\rho = 0$, а $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Pi}) = 0$, $F(\boldsymbol{\Pi}) = 0$ при $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'' = 0$. Поэтому возможности предложенного метода дополняют возможности указанных моделей пластических сред.

5. Заключение. При феноменологическом описании пластических сред одной из главных трудностей является неоднозначность зависимости между напряжениями и деформациями. По принципу макроскопической определимости А.А. Ильюшина связь между ними устанавливается некоторым функционалом, имеющим довольно сложную математическую структуру. Чтобы уйти от использования теории функционалов и перейти к более развитой теории функций нескольких переменных, достаточно ввести понятие тензора пластической (необратимой, неупругой и т.п.) деформации и представить функционал для тензора напряжений как многозначную функцию, состоящую из бесконечного множества ветвей, каждая из которых является однозначной функцией от надлежащим образом подобранных параметров термомеханического состояния среды. Исходя из этого представления, можно получить условия пластичности и закон изменения необратимой деформации, которые позволят описывать вязкие эффекты скоростного упрочнения и, если надо, механический гистерезис. Предложенный подход допускает прямое обобщение на случай конечных деформаций.

Выражаю глубокую благодарность И.А. Кийко за ценные замечания, внимание и поддержку моей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
2. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
3. *Кукуджанов В.Н.* Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 96–111.
4. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
5. *Ягн Ю.И., Шишмарёв О.А.* Некоторые результаты исследования границ упругого состояния пластически растянутых образцов никеля // ДАН СССР. 1958. Т. 119. № 1. С. 46–48.
6. *Изотов И.Н., Ягн Ю.И.* Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения // ДАН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 576–579.
7. *Ivey H.J.* Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys // J. Mech. Eng. Sci. 1961. V. 3. № 1. P. 15–31.
8. *Зверев И.Н.* Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластическом стержне // ПММ. 1950. Т. 14. С. 295–302.
9. *Шемякин Е.И.* Распространение нестационарных возмущений в вязкоупругой среде // ДАН СССР. 1995. Т. 104. № 1. С. 34–37.
10. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1970. 415 с.
11. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
12. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1–2.
13. *Анин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
14. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.
15. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. 360 с.
16. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
17. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
18. *Костюк А.Г.* Пластичность и разрушение кристаллического материала при сложном нагружении. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 180 с.
19. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
20. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
21. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструктивных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.

Омск

Поступила в редакцию
17.09.2002