МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2005

УДК 539.374

© 2005 г. Л.А. МАКСИМОВА

О СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОМ СОСТОЯНИИ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ, СЖАТОГО ЖЕСТКИМИ ШЕРОХОВАТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Рассматривается статически неопределимое состояние идеально пластического слоя, сжатого жесткими шероховатыми поверхностями, при условии пластичности Мизеса. Рассматриваются случаи цилиндрического и плоскопараллельного слоев. Устанавливается зависимость предельной нагрузки от деформирования.

1. Рассмотрим осесимметричное напряженно-деформированное состояние цилиндрического слоя из идеально пластического материала. Компоненты напряжения в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$ обозначим σ_ρ, σ_θ, σ_z, $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\rho z}$, $\tau_{\theta z}$, компоненты скорости деформации – ε_ρ, ε_θ, ε_z, $\varepsilon_{\rho\theta}$, $\varepsilon_{\rho z}$, $\varepsilon_{\theta z}$. В случае осесимметричного состояния компоненты напряжений и скорости деформации не зависят от координаты θ, причем

$$\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta z} = \varepsilon_{\rho\theta} = \varepsilon_{\theta z} = 0 \tag{1.1}$$

Уравнения равновесия в случае осевой симметрии имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0\\ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Условия пластичности запишем в форме

$$\begin{gathered}f(\sigma'_\rho, \sigma'_\theta, \sigma'_z, \tau_{\rho z}) = 0\\ \sigma'_\rho = \sigma_\rho - \sigma, \quad \sigma'_\theta = \sigma_\theta - \sigma, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma, \quad \sigma = 1/3(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z)\end{gathered} \tag{1.3}$$

где штрих приписан компонентам девиатора. Имеет место соотношение

$$\sigma'_\rho + \sigma'_\theta + \sigma'_z = 0 \tag{1.4}$$

Условие пластичности (1.3), согласно (1.4), можно записать в виде

$$f(\xi, \eta, \tau_{\rho z}) = 0, \quad \xi = \sigma_\rho - \sigma_\theta, \quad \eta = \sigma'_\rho + \sigma'_\theta = 1/3(\sigma_\rho + \sigma_\theta - 2\sigma_z) \tag{1.5}$$

Согласно ассоциированному закону течения, из (1.5) будем иметь

$$\begin{gathered}\varepsilon_\rho = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial\xi} + \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right), \quad \varepsilon_\theta = \lambda\left(-\frac{\partial f}{\partial\xi} + \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\\ \varepsilon_z = \frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial\eta}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{\lambda}{2}\frac{\partial f}{\partial\tau_{\rho z}}, \quad \lambda \ge 0\end{gathered} \tag{1.6}$$

Согласно (1.6), условие несжимаемости запишется так

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \tag{1.7}$$

Имеют место также зависимости

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right), \quad \upsilon = 0 \tag{1.8}$$

где u, υ, w – компоненты скорости перемещения.

В рассматриваемом случае, сжатия цилиндрического слоя, положим

$$\tau_{\rho z} = m_1\rho + \frac{m_2}{\rho}, \quad m_1, m_2 - \text{const} \tag{1.9}$$

$$u = n_1\rho + n_2/\rho, \quad n_1, n_2 - \text{const} \tag{1.10}$$

Согласно (1.6), (1.8), (1.10), будем иметь

$$n_1 - \frac{n_2}{\rho^2} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial \eta}\right), \quad n_1 + \frac{n_2}{\rho^2} = \lambda\left(-\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial \eta}\right), \tag{1.11}$$

Исключая из (1.11) величину λ, получим соотношение, из которого, согласно (1.9) следует зависимость

$$\eta = \varphi(\sigma_\rho - \sigma_\theta, \rho, m_1, m_2, n_1, n_2) \tag{1.12}$$

Из (1.5), (1.12) найдем

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = F(\rho, m_1, m_2, n_1, n_2) \tag{1.13}$$

Из (1.2), (1.9), (1.13) будем иметь

$$\begin{gathered}\sigma_\rho = -\int\frac{F}{\rho}d\rho + f(z), \quad \sigma_\theta = -F - \int\frac{F}{\rho}d\rho + f(z) \\ \sigma_z = -\frac{1}{2}F - \int\frac{F}{\rho}d\rho - \frac{3}{2}\varphi + f(z)\end{gathered} \tag{1.14}$$

Из (1.2), (1.9) получим

$$\sigma_z = -2m_1 z + \Psi(\rho) \tag{1.15}$$

Согласно (1.14), (1.15), найдем

$$f(z) = -2m_1 z + c, \quad c - \text{const} \tag{1.16}$$

Постоянную c определим из условия отсутствия продольной силы P вдоль оси z при $z = 0$:

$$P = 2\pi\int_a^b \sigma_z \rho d\rho = 0 \tag{1.17}$$

где параметры a, b ($a < b$) определяют границы слоя. Из (1.14), (1.16), (1.17) следует

$$c = -\frac{1}{2}\int_a^b F\rho d\rho + \int_a^b\left(\int\frac{F}{\rho}d\rho\right)\rho d\rho - \frac{3}{2}\int_a^b \varphi\rho d\rho \tag{1.18}$$

Предположим, что касательное напряжение $\tau_{\rho z}$ (1.9) достигает предельных значений на внутренней и внешней границе слоя

$$\begin{aligned} m_1 a + m_2/a &= k_1, \; k_1 - \text{const} \\ m_1 b + m_2/b &= k_2, \; k_2 - \text{const} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Из (1.19)

$$m_1 = \frac{k_1 a - k_2 b}{a^2 - b^2}, \quad m_2 = \frac{-ab(k_1 b - k_2 a)}{a^2 - b^2} \tag{1.20}$$

При фиксированных величинах k_1, k_2, a, b величина c, согласно (1.13), (1,18), (1.20) зависит от величин n_1, n_2, определяющих, согласно (1.10), характер деформирования слоя материала.

2. Рассмотрим условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\rho z}^2 + \tau_{\theta z}^2)^2 = 6k^2 \tag{2.1}$$

Соотношения ассоциированного закона имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \lambda(2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_z), \quad \varepsilon_{\rho\theta} = 3\lambda\tau_{\rho\theta} \\ \varepsilon_\theta &= \lambda(2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_\rho), \quad \varepsilon_{\rho z} = 3\lambda\tau_{\rho z} \\ \varepsilon_z &= \lambda(2\sigma_z - \sigma_\rho - \sigma_\theta), \quad \varepsilon_{\theta z} = 3\lambda\tau_{\theta z} \end{aligned} \tag{2.2}$$

На осесимметричное состояние (1.9), (1.10) наложим состояние сдвига $\tau_{\rho\theta}(\rho)$. Уравнение равновесия для определения $\tau_{\rho\theta}$ имеет вид

$$d\tau_{\rho\theta}/d\rho + 2\tau_{\rho\theta}/\rho = 0 \tag{2.3}$$

Откуда находим

$$\tau_{\rho\theta} = C/\rho^2, \quad C = \tau_{\rho\theta}(a)a^2 = \tau_{\rho\theta}(b)b^2 = \text{const} \tag{2.4}$$

Из (1.10), (2.1) следует

$$\sigma_z = \frac{3n_1\rho^2}{2n_2}(\sigma_\rho - \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_\theta) \tag{2.5}$$

Из (2.1), (2.5), получим

$$F = \sigma_\rho - \sigma_\theta = \frac{2\mu n_2\sqrt{k^2 - T^2}}{\sqrt{n_2^2 + 3n_1\rho^2}}, \quad T^2 = \tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\rho z}^2, \quad \mu = \operatorname{sign}(\sigma_\rho - \sigma_\theta) \tag{2.6}$$

Компоненты напряжения определяются согласно (1.9), (1.14), (1.15), (1.16), (2.4), (2.6).

Предположим, что касательные напряжения достигают предельных значений на поверхностях $\rho = a$, $\rho = b$. Согласно (1.9), (2.4), (2.6) получим

$$\begin{aligned} m_1 a + m_2/a &= k_1 = \sqrt{k^2 - C^2/a^4} \\ m_1 b + m_2/b &= k_2 = -\sqrt{k^2 - C^2/b^4} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Величины m_1, m_2 определяются согласно (1.20), (2.7). Отметим, что результирующие касательные напряжения $T = \sqrt{\tau_{\rho\theta}^2 + \tau_{\rho z}^2}$ на поверхностях $\rho = a$, $\rho = b$ неколлинеарны [1].

Итак, если касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\rho z}$ определены из граничных условий (2.4), (2.7), то напряженное состояние (1.14), (1.15), (1.16), (2.5), (2.6) зависит от параметров n_1, n_2 (1.10), определяемых значениями скорости перемещения на сжимающих поверхностях

$$u_a = n_1 a + n_2/a, \quad u_b = n_1 b + n_2/b \tag{2.8}$$

Откуда получим

$$n_1 = \frac{u_a a - u_b b}{a^2 - b^2}, \quad n_2 = -\frac{ab(u_a b - u_b a)}{a^2 - b^2} \tag{2.9}$$

Нормальные напряжения σ_ρ, σ_θ, σ_z (1.14)–(1.16) при ρ – const, меняются линейно вдоль оси z с угловым коэффициентом m_1, определяемым статическими граничными условиями (1.19), (1.20), (2.7). Величины напряжений σ_ρ, σ_θ, σ_z зависят от значений скоростей перемещений u_a, u_b, определяющих сближение сдавливающих поверхностей согласно (1.14)–(1.16), (2.5), (2.6), (2.9). Отметим, что случай $C = 0$ рассматривался также в [2].

3. Рассмотрим сжатие идеально пластического слоя параллельными жесткими шероховатыми плитами при условии пластичности Мизеса. Уравнения равновесия будут

$$\begin{aligned}
&\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y + \partial\tau_{xz}/\partial z = 0\\
&\partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_{yz}/\partial z = 0\\
&\partial\tau_{xz}/\partial x + \partial\tau_{yz}/\partial y + \partial\sigma_z/\partial z = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где σ_x, τ_{xy}, ... – компоненты напряжения в декартовой системе координат. Условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6k^2 \tag{3.2}$$

где k – предел текучести на сдвиг.

Соотношения связи между напряжениями и скоростями деформаций согласно ассоциированному закону пластического течения, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \lambda(\sigma_x - \sigma), \quad \varepsilon_{xy} = 3\lambda\tau_{xy}\\
&\varepsilon_y = \lambda(\sigma_y - \sigma), \quad \varepsilon_{yz} = 3\lambda\tau_{yz}\\
&\varepsilon_z = \lambda(\sigma_z - \sigma), \quad \varepsilon_{xz} = 3\lambda\tau_{xz}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где ε_x, ε_{xy}, ... – компоненты скорости деформации, $\sigma = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. Из (3.2), (3.3) следует

$$\lambda = \frac{\sqrt{6}}{6k}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2)} \tag{3.4}$$

Из (3.3) получим условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \tag{3.5}$$

Имеют место формулы Коши

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \partial u/\partial x, \quad \varepsilon_y = \partial v/\partial y, \quad \varepsilon_z = \partial w/\partial z\\
&\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где u, v, w – скорости перемещения.

Соотношения (3.3) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma + \varepsilon_x/\lambda, \quad \sigma_y = \sigma + \varepsilon_y/\lambda, \quad \sigma_z = \sigma + \varepsilon_z/\lambda \\ &\tau_{xy} = \varepsilon_{xy}/\lambda, \quad \tau_{yz} = \varepsilon_{yz}/\lambda, \quad \tau_{xz} = \varepsilon_{xz}/\lambda \end{aligned} \tag{3.7}$$

Предположим, что компоненты девиаторов напряжений $\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ и скорости деформации ε_{ij} являются функциями координаты z. Положим аналогично [1]:

$$\tau_{xz} = az, \quad \tau_{yz} = bz, \quad a, b - \text{const} \tag{3.8}$$

Из (3.3), (3.8) следует

$$\varepsilon_{xz} \cdot b = \varepsilon_{yz} \cdot a \tag{3.9}$$

Согласно принятым предположениям из (3.1), (3.7), (3.8) получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + a = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} + b = 0, \quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_z}{\lambda}\right) = 0 \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует

$$\sigma_z = -ax - by + C, \quad \sigma = -ax - by + C - \frac{\varepsilon_z}{\lambda}, \quad C - \text{const} \tag{3.11}$$

Условие несжимаемости (3.5), согласно (3.6), имеет вид

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \tag{3.12}$$

Положим

$$\begin{aligned} &u = m_1 x + n_1 y + \varphi_1(z), \quad v = m_2 x + n_2 y + \varphi_2(z) \\ &w = m_3 x + n_3 y + q, \quad m_i, n_i, q - \text{const} \quad (i = 1\text{–}3) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Согласно (3.6), (3.12), (3.13) имеет место

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = m_1, \quad \varepsilon_y = n_2, \quad \varepsilon_z = q, \quad m_1 + n_2 + q = 0 \\ &\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(m_2 + n_1), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + n_3\right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi_1}{\partial z} + m_3\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{6}}{6k}\sqrt{(m_1 - n_2)^2 + (m_1 - q)^2 + (n_2 - q)^2 + \frac{3}{2}\left[(m_2 + n_1)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{\partial z} + n_3\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{\partial z} + m_3\right)^2\right]}$$

Согласно (3.7), (3.9), (3.11), (3.14), получим

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_z + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{\lambda} = -ax - by + C + \frac{m_1 - q}{\lambda} \\ &\sigma_y = \sigma_z + \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\lambda} = -ax - by + C + \frac{n_2 - q}{\lambda} \\ &\tau_{xy} = (m_2 + n_1)/(2\lambda) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Из (3.2), (3.4), (3.8), (3.15) следует

$$\frac{1}{\lambda} = A\sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2}, \quad A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3(m_2 + n_1)^2 + (m_1 - n_2)^2 + (m_1 - q)^2 + (n_2 - q)^2/2}} \tag{3.16}$$

Обозначим толщину слоя $2h$; предположим, что в некоторой точке x_0y_0 определено осредненное давление

$$p = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma dz, \quad p - \mathrm{const} \tag{3.17}$$

Из (3.11), (3.16), (3.17) следует

$$\begin{aligned} C &= p + ax_0 + by_0 + \frac{q}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{dz}{\lambda} = \\ &= p + ax_0 + by_0 + \frac{qA}{2}\left[\sqrt{k^2 - (a^2+b^2)h^2} + \frac{k^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\arcsin\frac{h\sqrt{a^2+b^2}}{k}\right] \end{aligned} \tag{3.18}$$

Согласно (3.11), (3.16), (3.18) величина сдавливающего напряжения σ_z будет зависеть от характера деформирования плиты. Аналогичная зависимость сохраняется при различных осреднениях краевых условий, налагаемых на компоненты напряжения.

В случае статически определимой системы соотношений при условии полной пластичности имеет место:

$$\sigma_x = \sigma + \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}}, \quad \sigma_y = \sigma + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}}, \quad \sigma_z = \sigma + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} \tag{3.19}$$

$$\frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} + \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = 2k \tag{3.20}$$

Согласно (3.1), (3.8), (3.19), (3.20) получим

$$\alpha_z = -ax - by + C, \quad \sigma = -ax - by + C - \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} \tag{3.21}$$

Из (3.17), (3.21) следует

$$C = p + ax_0 + by_0 + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}dz \tag{3.22}$$

Согласно (3.21), (3.22) величина сдавливающего напряжения σ_z не зависит от характера деформирования плиты, аналогичная зависимость сохраняется при различных осреднениях краевых условий, налагаемых на компоненты напряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Максимова Л.А.* О предельном состоянии слоя, сжатого шероховатыми плитами // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 1057–1062.
2. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
31.03.2003