

УДК 539.3

© 2005 г. О.Д. ПРЯХИНА, А.В. СМИРНОВА

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Предложен эффективный аналитический метод построения решения динамических задач для многослойных сред, содержащих дефекты-включения на стыках слоев. Получены новые функционально-матричные соотношения и построены системы интегральных уравнений, связывающие перемещения и скачки напряжений на границах включений. Для некоторых частных типов сред приведены примеры использования указанных соотношений и проведен численный анализ.

Метод построения решения динамических задач для слоистых сред при наличии дефектов-трещин был предложен ранее [1, 2]. Другие подходы к решению такого рода задач представлены в работах [3–9]. Условия локализации вибрационного процесса системой трещин и (или) включений установлены в [5–6].

Актуальность исследования рассматриваемых задач обусловлена их практической значимостью в сейсмологии, сейсморазведке, дефектоскопии, электронике и других областях.

1. Постановка задачи. Пусть координатная плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью слоистой среды, содержащей включения. Среда моделируется пакетом N плоскопараллельных слоев толщины $H = 2(h_1 + h_2 + \dots + h_N)$, занимающим область $-H \leq z \leq 0$, $-\infty \leq x, y \leq +\infty$ (h_k – полутолщина k -го слоя). Нижняя грань пакета жестко сцеплена с недеформируемым основанием.

Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$x_k = x, \quad y_k = y, \quad z_k = z + 2 \sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Вектор перемещений точек k -го слоя $\mathbf{w}_k(x_k, y_k, z_k, t)$ удовлетворяет уравнениям движения Ляме, которые при отсутствии в среде внутренних массовых сил запишем в виде [10]:

$$(\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } \mathbf{w}_k + \mu_k \Delta \mathbf{w}_k = \rho_k \partial^2 \mathbf{w}_k / \partial t^2 \quad (1.1)$$

Здесь λ_k, μ_k, ρ_k – упругие постоянные и плотность материала k -го слоя соответственно, t – время.

Предположим, что поверхность среды в области Ω_0 подвергается некоторому динамическому воздействию, характеризуемому вектором $\mathbf{t}_0(x, y, t)$, имеющим своими компонентами касательные t_{10}, t_{20} и нормальные t_{30} напряжения.

$$\mathbf{t}_0(x, y, t) = \begin{cases} \mathbf{t}_0, & (x, y) \in \Omega_0 \\ \mathbf{0}, & (x, y) \notin \Omega_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

На границах раздела слоев имеют место непрерывные условия для перемещений и разрывные для напряжений, обусловленные дефектами типа плоских жестких включений, занимающих области Ω_{km} ($m = 1, 2, \dots, M_k$) в плоскостях $z_k = h_k$:

$$w_k(x, y, -h_k, t) = w_{k+1}(x, y, h_{k+1}, t), \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty \quad (1.3)$$

$$\Delta t_{km}(x, y, t) = \begin{cases} t_{km}^+ - t_{km}^-, & (x, y) \in \Omega_{km} \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_{km} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\Delta t_k(x, y, t) = \sum_{m=1}^{M_k} \Delta t_{km}(x, y, t) \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

где Δt_k – скачки векторов напряжений на границах включений, M_k – количество дефектов в плоскости $z_k = h_k$.

На нижней грани пакета слоев выполняются условия жесткой заделки

$$w_N(x, y, -h_N, t) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty \quad (1.5)$$

Если подстилающее основание представляет собой слоистую среду, жестко сцепленную с упругим полупространством, то последнее соотношение следует заменить условием затухания перемещений $w_N(x, y, z, t) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$.

Уравнения (1.1) представляют собой систему $3 \times N$ дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (в проекциях на оси локальных систем координат), решение которой строится с граничными условиями (1.2)–(1.5) и нулевыми начальными условиями.

Наиболее сложным этапом построения решения является вывод функционально-матричных соотношений, исследование классов разрешимости и решение систем интегральных уравнений.

2. Вывод основных функционально-матричных соотношений. В случае разрывных граничных условий для напряжений решение уравнений Ляме для k -го слоя в трансформантах Фурье – Лапласа будет определяться выражением

$$W_k(z_k) = [B_+(z_k)T_{k-1} + B_-(z_k)(T_k + \eta_k)]/\mu_k \\ -h_k \leq z_k \leq h_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

$$T_0 = LFt_0, \quad T_k = LFT_k, \quad W_k = LFw_k, \quad \eta_k = LF\Delta t_k$$

где F – оператор двумерного преобразования Фурье по переменным x, y ; L – оператор Лапласа по времени t ; $t_k = \{t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}\}$ – векторы напряжений, характеризующие взаимодействие между слоями; $w_k = \{w_{1k}, w_{2k}, w_{3k}\}$ – вектор перемещений точек k -го слоя.

Матрицы-функции $B_{\pm}(z)$ для разных типов сред (упругих, электроупругих, анизотропных, термоупругих, термоэлектроупругих) имеют различную структуру и построены в [11]. Например, матрицы-функции $B_{\pm}(z)$ для упругой среды имеют вид

$$B_{\pm}(z) = \begin{vmatrix} \alpha^2 m_1^{\pm} + \beta^2 n^{\pm} & \alpha\beta(m_1^{\pm} - n^{\pm}) \pm i\alpha m_2^{\pm} \\ \alpha\beta(m_1^{\pm} - n^{\pm}) & \beta^2 m_1^{\pm} + \alpha^2 n^2 \pm i\beta m_2^{\pm} \\ -i\alpha k_1^{\pm} & -i\beta k_1^{\pm} & \pm k_2^{\pm} \end{vmatrix}$$

$$m_i^{\pm} = M_i^- \pm M_i^+, \quad n^{\pm} = N \pm N^+, \quad k_i^{\pm} = K_i^- \pm K_i^+ \quad (i = 1, 2)$$

Функции K_i^+ , M_i^+ , N^+ отвечают симметричной задаче для одного слоя, а K_i^- , M_i^- , N^- – кососимметричной. В частном случае изотропной среды их явное представление дано в [1, 11].

Элементы матриц $\mathbf{B}_\pm(z_k)$ зависят от параметров преобразования Фурье α , β , частоты гармонических колебаний ω (или параметра $p = -i\omega$), механических и геометрических параметров k -го слоя μ_k , ρ_k , ν_k , h_k . Здесь и далее с целью сокращения записи в функциональных зависимостях будем указывать только аргумент, обеспечивающий однозначное толкование функций.

Граничные условия (1.3) и (1.5) в трансформантах Фурье – Лапласа примут вид

$$\mathbf{W}_k(-h_k) = \mathbf{W}_{k+1}(h_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{W}_N(-h_N) = 0 \quad (2.3)$$

Используя (2.3) с учетом представления (2.1) определим

$$\mathbf{B}_-(-h_N)\mathbf{T}_N = -\mathbf{B}_+(-h_N)\mathbf{T}_{N-1} \quad (2.4)$$

Аналогично из условий (2.2) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+(-h_k)\mathbf{T}_{k-1} + (\mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{B}_+(h_{k+1}))\mathbf{T}_k - g_k\mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{T}_{k+1} = \\ = -\mathbf{B}_-(-h_k)\boldsymbol{\eta}_k + g_k\mathbf{B}_-(h_{k+1})\boldsymbol{\eta}_{k+1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$g_k = \mu_k/\mu_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

Соотношения (2.4), (2.5) приводят к рекуррентным формулам для определения векторов напряжений между слоями:

$$\mathbf{F}_k\mathbf{T}_k = \mathbf{G}_k\mathbf{T}_{k-1} - \mathbf{F}_k(\Delta_k + \boldsymbol{\eta}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

$$\Delta_k = \mathbf{S}_{k+1}\Delta_{k+1} + \mathbf{L}_k\boldsymbol{\eta}_k \quad \Delta_N = 0, \quad \boldsymbol{\eta}_N = 0$$

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{B}_-(-h_N)$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

$$\mathbf{R}_{N+1-k}(z_k) = \mathbf{B}_+(z_k) + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k \quad (2.7)$$

$$\mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k)$$

$$\mathbf{S}_{k+1} = g_k\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{B}_-(h_{k+1}), \quad \mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{B}_-(-h_k) - \mathbf{I}$$

где $\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}$ – единичная матрица.

Полагая в (2.6) последовательно $k = 1, 2, \dots, N$, определим усилия \mathbf{T}_k , действующие на k -й слой через поверхностную нагрузку \mathbf{T}_0 и скачки напряжений $\boldsymbol{\eta}_k$:

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{Y}_{k1}\mathbf{T}_0 - \sum_{m=2}^k \mathbf{Y}_{km}(\Delta_{m-1} + \boldsymbol{\eta}_{m-1}) - \Delta_k - \boldsymbol{\eta}_k \quad (2.8)$$

Последние соотношения представимы в виде

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{Y}_{k1}\mathbf{T}_0 + \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{L}_{km}^0\boldsymbol{\eta}_m$$

$$\mathbf{Y}_{km} = \begin{cases} \prod_{i=k}^m (\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i), & m \geq k \\ \mathbf{I}, & m < k \end{cases}$$

$$\mathbf{L}_{km}^0 = \begin{cases} \mathbf{A}_{1m}, & k = 1 \\ \mathbf{Y}_{kk} \mathbf{L}_{(k-1)m}^0, & k > m \\ \mathbf{Y}_{kk} \mathbf{L}_{(k-1)m}^0 + \mathbf{A}_{km}, & k \leq m \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}_{km} = -\mathbf{S}_k^{-1} \left(\prod_{i=k}^m \mathbf{S}_i \right) [\mathbf{F}_m^{-1} \mathbf{B}_-(-h_m) - (1 - \delta_{km}) \mathbf{I}]$$

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

Подставляя найденные выражения для усилий (2.8) в (2.1), определим смещения точек в k -м слое

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k} \left(\mathbf{R}_{N-k+1}(z_k) \left(\mathbf{Y}_{(k-1)1} \mathbf{T}_0 - \sum_{m=2}^{k-1} \mathbf{Y}_{(k-1)m} (\Delta_{m-1} + \boldsymbol{\eta}_{m-1}) - \Delta_{k-1} - \boldsymbol{\eta}_{k-1} \right) - \mathbf{B}_-(z_k) \Delta_k \right) \quad (2.10)$$

Преобразуем решение к виду, удобному для построения СИУ в случае большого числа включений

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k} \mathbf{R}_{N-k+1}(z_k) \left(\mathbf{Y}_{(k-1)1} \mathbf{T}_0 - \mathbf{Z}_k \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{P}_{km} \boldsymbol{\eta}_m \right)$$

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{R}_N^{-1}(z_1) \delta_{1k} + (1 - \delta_{1k}) \mathbf{I} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}_{km} = \begin{cases} -\mathbf{B}_-(z_1) \mathbf{A}_{1m}, & k = 1 \\ \mathbf{L}_{(k-1)m}^0 - \mathbf{B}_-(z_k) \mathbf{A}_{km}, & m > k - 1 \\ \mathbf{L}_{(k-1)m}^0, & m \leq k - 1 \end{cases}$$

Соотношения (2.9) и (2.11) являются искомыми функционально-матричными соотношениями при моделировании основания пакетом N слоев с включениями на их стыках, позволяющими построить систему интегральных уравнений смешанной задачи, связывающих перемещения и скачки напряжений на границах включений.

Если поверхность свободна от усилий, то

$$\mathbf{T}_k = \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{L}_{km}^0 \boldsymbol{\eta}_m, \quad \mathbf{W}_k(z_k) = -\frac{1}{\mu_k} \mathbf{R}_{N-k+1}(z_k) \mathbf{Z}_k \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{P}_{km} \boldsymbol{\eta}_m$$

Полагая в (2.8), (2.10) $\boldsymbol{\eta}_k = 0$, приходим к случаю идеального контакта между слоями

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{Y}_{k1} \mathbf{T}_0, \quad \mathbf{W}_k(z_k) = \frac{1}{\mu_k} \mathbf{R}_{N-k+1}(z_k) \mathbf{Y}_{(k-1)1} \mathbf{T}_0$$

Заметим, что матрица-функция $\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k) \equiv \mathbf{K}(\alpha, \beta, h_k, \omega)$ является матрицей-символом Грина динамической задачи для соответствующей слоистой среды без дефектов ($k = 1$ отвечает N -слойному основанию, а $k = N$ – однослойному).

Функционально-матричные соотношения для модели однородной полуограниченной среды, например, для слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, и содержащим $N - 1$ плоских, параллельно-ориентированных включений, получаются из (2.9), (2.11), если положить физико-механические параметры слоев равными для всех k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Переход к слоистому полупространству в (2.9), (2.11) осуществляется аналогично изложенному в [1].

Применяя обратное преобразование Фурье к соотношениям (2.11), получим интегральное представление решения (для гармонической задачи множитель $e^{-i\omega t}$ опущен)

$$\mathbf{w}(x, y, z, \omega) \equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \mathbf{W}(z) e^{-(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (2.12)$$

$$\mathbf{W}(z) \equiv \mathbf{W}_k(\alpha, \beta, z_k, \omega), \quad z = z_k - 2 \sum_{i=1}^{k-1} h_i - h_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Для нестационарной задачи необходимо в равенстве (2.12) положить $\omega = ip$ (p – параметр преобразования Лапласа) и применить обратное преобразование Лапласа. Было показано [12], что решение нестационарной задачи также можно представить в виде

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}[\mathbf{w}(x, y, z, \omega)] \cos(\omega t) d\omega$$

3. Построение системы интегральных уравнений. В случае гармонических колебаний, когда на поверхности среды и в плоскостях раздела слоев заданы смешанные граничные условия

$$\text{при } z = 0: \begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_0 \\ \mathbf{t}_0 = 0, & (x, y) \notin \Omega_0 \end{cases}$$

$$\text{при } z = -2 \sum_{i=1}^k h_i: \begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_{(k+1)m}(x, y), & (x, y) \in \Omega_{km} \\ \Delta \mathbf{t}_{km} = 0, & (x, y) \notin \Omega_{km} \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \dots, N-1, m = 1, 2, \dots, M)$$

функционально-матричные соотношения (2.11) приводят к системе матричных интегральных уравнений относительно неизвестных в области Ω_0 векторов контактных напряжений $\mathbf{t}_0(x, y)$ и скачков напряжений $\Delta \mathbf{t}_{km}$ в областях Ω_{km} :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{k}_{11}(x - \xi, y - \eta) \mathbf{t}_0(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \int_{\Omega_{km}} \mathbf{k}_{1(k+1)}(x - \xi, y - \eta) \Delta \mathbf{t}_{km}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mu_1 \mathbf{w}_1(x, y) \quad (x, y) \in \Omega_0$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{k}_{(p+1)1}(x-\xi, y-\eta) t_0(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \int_{\Omega_{km}} \mathbf{k}_{(p+1)(k+1)}(x-\xi, y-\eta) \Delta t_{km}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mu_1 \mathbf{w}_{(p+1)n}(x, y)$$

$$(\bar{x}, y) \in \Omega_{pn} \quad (n = 1, 2, \dots, M_p, p = 1, 2, \dots, N-1)$$

Ядра системы интегральных уравнений определяются выражениями

$$\mathbf{k}_{ij}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\delta_1 \delta_2} \mathbf{K}_{ij}(\alpha, \beta) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta$$

а подынтегральные матрицы-функции $\mathbf{K}_{ij}(\alpha, \beta)$ – в соответствии с (2.11). Контуры интегрирования δ_1, δ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [10].

Эта система интегральных уравнений имеет размерность $3 \times (M + 1)$. Здесь $M = \sum M_k$ – общее количество включений в среде, $\mathbf{w}_{pn} = \mathbf{w}_{pn}^+ = \mathbf{w}_{pn}^-$ – векторы перемещений на границах включений, \mathbf{w}_1 – вектор перемещений на поверхности среды $z = 0$ ($z_1 = h_1$), которые предполагаются заданными:

Дальнейшее решение этой системы предполагает использование аналитических или численных методов [10, 11, 13].

4. Примеры. 1. Для трехслойной среды с включениями на линиях раздела слоев из (2.11) получим следующую систему трех функционально-матричных уравнений:

$$\mathbf{K}_{i1} \mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{i2} \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{K}_{i3} \boldsymbol{\eta}_2 = \mu_1 \mathbf{W}_i(h_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

Согласно (2.11) матрицы-функции \mathbf{K}_{ij} определяются выражениями

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_3(h_1), \quad \mathbf{K}_{12} = -\mathbf{B}_-(h_1) \mathbf{L}_1, \quad \mathbf{K}_{13} = -g_1 \mathbf{B}_-(h_1) \mathbf{X}_1(h_2) \mathbf{L}_2$$

$$\mathbf{K}_{21} = g_1 \mathbf{R}_2(h_2) \mathbf{F}_1^{-1} \mathbf{G}_1, \quad \mathbf{K}_{22} = -g_1 \mathbf{R}_2(h_2) \mathbf{X}_1(-h_1)$$

$$\mathbf{K}_{23} = -g_1 \langle g_1 \mathbf{R}_2(h_2) \mathbf{X}_1 + \mathbf{B}_-(h_2) \rangle \mathbf{L}_2 \quad (4.2)$$

$$\mathbf{K}_{31} = g_1 g_2 \mathbf{R}_1(h_3) \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{G}_2 \mathbf{F}_1^{-1} \mathbf{G}_1, \quad \mathbf{K}_{32} = -g_1 g_2 \mathbf{R}_1(h_3) \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{G}_2 \mathbf{X}_1(-h_1)$$

$$\mathbf{K}_{33} = -g_1 g_2 \mathbf{R}_1(h_3) \{ g_1 \mathbf{F}_2^{-1} \mathbf{G}_2 \mathbf{X}_1(h_2) \mathbf{L}_2 + \mathbf{X}_2(-h_2) \}$$

$$\mathbf{X}_k(y) = \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{B}_-(y)$$

$$\mathbf{F}_1(h_1, h_2, h_3) = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1 \mathbf{R}_2(h_2), \quad \mathbf{F}_2(h_2, h_3) = \mathbf{B}_-(-h_2) - g_2 \mathbf{R}_1(h_3)$$

где $\mathbf{R}_1(h_3) \equiv \mathbf{K}(h_3)$, $\mathbf{R}_2(h_2) \equiv \mathbf{K}(h_2, h_3)$, $\mathbf{R}_3(h_1) \equiv \mathbf{K}(h_1, h_2, h_3)$ – матрицы-символы Грина соответственно одно-, двух-, трехслойной среды без дефектов. Их элементы не сложно получить по формуле (2.7):

$$\mathbf{R}_{4-k}(z_k) = \mathbf{B}_+(z_k) + \mathbf{B}_-(z_k) \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{G}_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

Между элементами матриц \mathbf{K}_{ij} и \mathbf{K}_{ji} ($i \neq j$) выявлена простая взаимосвязь. Например, для задачи в плоской постановке, если

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha^2 k_{11} & -i\alpha k_{12} \\ i\alpha k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad \mathbf{K}_{ji} = \begin{vmatrix} \alpha^2 k_{11} & -i\alpha k_{21} \\ i\alpha k_{12} & k_{22} \end{vmatrix}$$

2. Для двухслойной среды с включением при наличии внешнего воздействия приходим к системе двух функционально-матричных уравнений:

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{12}\boldsymbol{\eta} = \mu_1 \mathbf{W}_1(h_1), \quad \mathbf{K}_{21}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{22}\boldsymbol{\eta} = \mu_1 \mathbf{W}_2(h_2) \quad (4.3)$$

Матрицы-функции \mathbf{K}_{ij} имеют вид

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_2(h_1), \quad \mathbf{K}_{12} = -\mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{L}_1$$

$$\mathbf{K}_{21} = g_1 \mathbf{R}_1(h_2)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1, \quad \mathbf{K}_{22} = -g_1 \mathbf{R}_1(h_2)\mathbf{X}_1(-h_1)$$

$$\mathbf{F}_1(h_1, h_2) = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1 \mathbf{R}_1(h_2)$$

Для включения на стыке слоя и полупространства

$$\mathbf{F}_1(h_1) = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1 \mathbf{B}_+^\infty(0)$$

где $\mathbf{B}_+^\infty(0)$ – матрица-символ Грина для полупространства [1, 11].

Если совокупность M плоских включений расположена в плоскости $z_1 = h_1$, то

$$\boldsymbol{\eta}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_{1m}} \Delta t_m(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

Введем матричный интегральный оператор

$$\mathbf{K}^s \mathbf{t} = \iint_{\Omega_s} \mathbf{k}(x - \xi, y - \zeta) \mathbf{t}_s(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (s = 0, 1, \dots, M)$$

На основании (4.3) получим систему интегральных уравнений, записанную в операторном виде

$$\mathbf{K}_{11}^0 \mathbf{t}_0 + \sum_{m=1}^M \mathbf{K}_{12}^m \Delta t_m = \mu_1 \mathbf{w}_1, \quad (x, y) \in \Omega_0 \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K}_{21}^0 \mathbf{t}_0 + \sum_{m=1}^M \mathbf{K}_{22}^m \Delta t_m = \mu_1 \mathbf{w}_{2n}, \quad (x, y) \in \Omega_{1n} \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

Если учесть, что смещения \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_{2n} известны, то соотношения (4.4) представляют собой систему $M + 1$ уравнений относительно неизвестных векторов \mathbf{t}_0 и Δt_m в областях Ω_0 и Ω_{1m} соответственно.

3. Если в двухслойной среде на границе раздела слоев имеются включения, а внешнее воздействие отсутствует ($\mathbf{T}_0 = 0$), то (2.11) эквивалентно одному функционально-матричному уравнению

$$\mathbf{K}_{22} \boldsymbol{\eta} = \mu_1 \mathbf{W}_2(h_2) \quad (4.5)$$

Система интегральных уравнений в этом случае

$$\sum_{m=1}^M \int_{\Omega_{1m}} \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta) \Delta t_m(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mu_1 \mathbf{w}_{2n}(x, y)$$

$$(x, y) \in \Omega_{1n} \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

$$\mathbf{k}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\delta_1} \int_{\delta_2} \mathbf{L}(\alpha, \beta, \omega) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (4.6)$$

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{L}(\alpha, \beta, \omega, h_1, h_2) \equiv \mathbf{L}(\alpha, \beta, \omega)$$

Для плоской задачи система (4.6) упрощается

$$\sum_{m=1}^M \int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} \mathbf{k}(x - \xi) \Delta t_m(\xi) d\xi = \mu_1 \mathbf{w}_{2n}(x) \quad (n = 1, 2, \dots, M)$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} \mathbf{L}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad x \in [a_{2n-1}, a_{2n}] = \Omega_{1n} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha^2 l_{11} & -i\alpha l_{12} \\ i\alpha l_{12} & l_{22} \end{vmatrix}$$

Элементы матрицы \mathbf{L} описываются выражениями

$$l_{11} = -\frac{g_1^2 m_1^+ R + g_1 D r_{11}}{\Delta}, \quad l_{12} = -\frac{g_1^2 m_2^+ R + g_1 D r_{12}}{\Delta}$$

$$l_{22} = -\frac{g_1^2 k_2^+ R + g_1 D r_{22}}{\Delta}, \quad R = r_{11} r_{22} - r_{12}^2 \quad (4.8)$$

$$D = m_1^+ k_2^+ - (m_2^+)^2, \quad \Delta = g_1^2 R + g_1 (m_1^+ r_{22} - 2m_2^+ r_{12} + k_2^+ r_{11}) + D$$

В этих соотношениях функции r_{11}, r_{12}, r_{21} являются элементами матрицы Грина

$$\mathbf{K}(\alpha, \omega) = \mathbf{R}_1(h_2) = \begin{vmatrix} \alpha^2 r_{11} & -i\alpha r_{12} \\ i\alpha r_{12} & r_{22} \end{vmatrix}$$

динамической задачи о колебаниях одного слоя толщины $2h_2$ с параметрами ρ_2, μ_2, ν_2 , жестко сцепленного с недеформируемым основанием, а функции m_1^+, m_2^+, k_2^+ содержат параметры ρ_1, μ_1, ν_1 только верхнего слоя толщины $2h_1$ [11].

Полагая параметры слоев равными, можно получить решение динамической задачи о колебаниях системы включений в однородном слое толщины $H = 2h_1 + 2h_2$, расположенных на расстоянии $z = -2h_1$ от верхней границы слоя.

4. Если система включений расположена между первым и вторым слоем в трехслойной среде, то система интегральных уравнений имеет также вид (4.7), элементы $l_{ij}(\alpha, \Omega)$ матрицы \mathbf{L} описываются формулами (4.8), однако в этом случае функции $r_{ij}(\alpha, \Omega)$, участвующие в решении, являются элементами матрицы Грина двухслойной среды толщины $H = 2h_2 + 2h_3$ с параметрами μ_k, ρ_k, ν_k ($k = 2, 3$).

5. **Некоторые свойства решений.** Для исследования условий локализации вибрационного процесса [5] необходимо знание вещественных нулей определителей

функционально-матричных систем (2.11), (4.1), (4.3)–(4.5). Получены рекуррентные формулы для построения указанных определителей.

Установлено, что элементы всех матриц и их определители представимы в виде отношения целых функций, связанных с элементами и определителями матриц-символов Грина одно-, двух-, ..., N -слойной среды без дефектов.

В частности, для трехслойной среды без дефектов в плоской постановке

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{T}_0 = \mu_1 \mathbf{W}_1(h_1), \quad \det \mathbf{K}_{11} = \frac{D_3(h_1, h_2, h_3)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)}$$

Если в трехслойной среде на границе между n -м и $(n+1)$ -м слоем имеется дефект-включение, а $\mathbf{T}_0 = 0$, то определители рассматриваемых систем уравнений $\mathbf{K}_{nn} \boldsymbol{\eta}_n = \mu_1 \mathbf{W}_n(h_n)$, ($k = 2, 3$) равны

$$\det \mathbf{K}_{22} = \frac{D_2(h_2, h_3) \Delta_1(h_1)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)} \quad (5.1)$$

$$\det \mathbf{K}_{33} = \frac{D_1(h_3) \Delta_2(h_1, h_2)}{\Delta_3(h_1, h_2, h_3)} \quad (5.2)$$

В этих формулах $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – знаменатели, а D_1, D_2, D_3 – числители определителей матриц-символов Грина соответственно для одно-, двух- и трехслойной среды без дефектов.

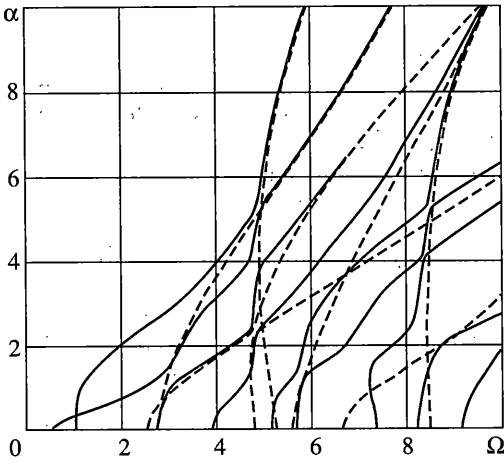
Таким образом, нулями определителя (5.1) являются нули определителя матрицы Грина для двухслойной среды толщины $H = 2h_2 + 2h_3$ и полюса определителя матрицы Грина для одного слоя толщины $H = 2h_1$: $D_2(h_2, h_3) = 0, \Delta_1(h_1) = 0$.

Нулями определителя (5.2) являются нули определителя матрицы Грина для одного слоя толщины $H = 2h_3$ и полюса определителя матрицы Грина для двухслойной среды толщины $H = 2h_1 + 2h_2$: $D_1(h_3) = 0, \Delta_2(h_1, h_2) = 0$.

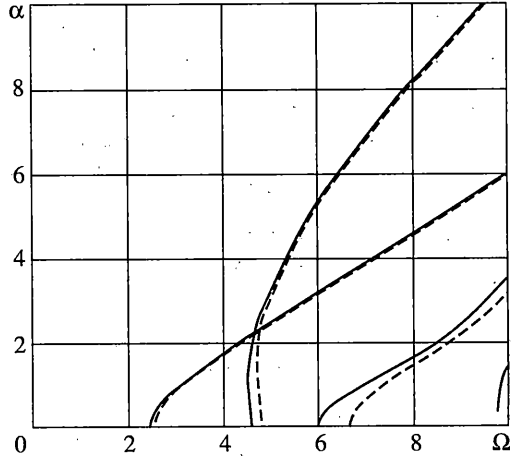
Несмотря на наличие сложных матричных выражений в решении (2.11), конечные формулы для элементов матриц \mathbf{K}_{ij} имеют один и тот же знаменатель Δ_n , что и элементы матрицы Грина аналогичной среды (пакет N слоев), но без дефектов. Например, для трехслойной среды элементы всех матриц \mathbf{K}_{ij} , описываемые формулами (4.2), имеют знаменатель Δ_3 , совпадающий со знаменателем элементов матрицы Грина трехслойной среды без дефектов. Указанное свойство распространяется и на случай дефектов в виде трещин [1]. Определители систем матрично-функциональных уравнений также обладают этим свойством.

Для построения решения системы интегральных уравнений (4.7) необходимо знание вещественных особенностей элементов подынтегральных матриц-функций \mathbf{K}_{ij} , \mathbf{K}_{ij}^{-1} и их определителей. С этой целью проведен численный анализ нулей, полюсов (дисперсионных кривых) элементов матриц и определителей систем для двух- и трехслойной среды в зависимости от приведенной частоты $\Omega = \sqrt{\rho_1/\mu_1} \omega a$ (a – некоторая линейная величина), механических и геометрических параметров задачи. Для диагональных элементов матриц \mathbf{K}_{ij} и \mathbf{K}_{ij}^{-1} наблюдается чередование нулей и полюсов, а для их определителей – нет. Изменение количества дисперсионных кривых в фиксированном диапазоне частот обратно пропорционально изменению по глубине относительной жесткости слоев.

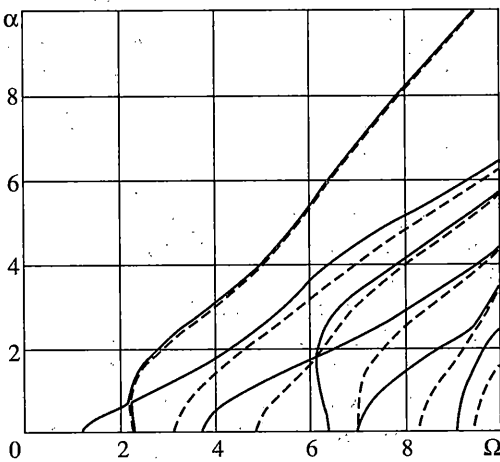
На фиг. 1, 2 представлены характерные графики нулей (штриховые линии) и полюсов (сплошные линии) $\det \mathbf{K}_{33}$ при следующих значениях безразмерных парамет-



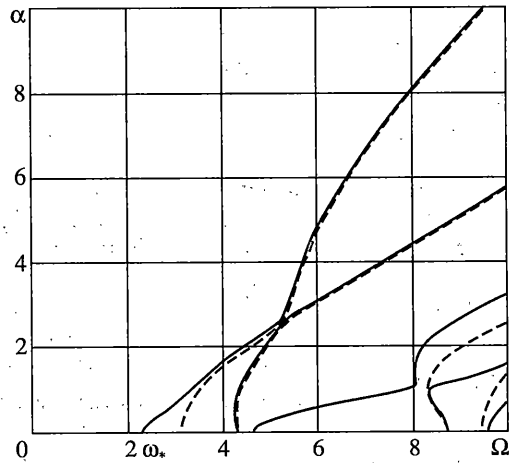
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ров: $v_1 = v_2 = v_3 = 0.3$; $h_1 = h_2 = h_3 = 0.25$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$, при этом $M_1 = \mu_2/\mu_1 = 5$; $M_2 = \mu_3/\mu_1 = 0.2$ (фиг. 1), $M_1 = 5$; $M_2 = 25$ (фиг. 2).

Анализ результатов в двухслойной среде показывает, что при одинаковой плотности слоев в случае, когда верхний слой жестче нижнего, количество нулей, полюсов элементов $l_{11}(\alpha, \Omega)$ и $l_{22}(\alpha, \Omega)$ матрицы-функции \mathbb{L} (4.8) уменьшается с глубиной залегания включений при одинаковой толщине пакета слоев и фиксированной частоте. Если же верхний слой мягче нижнего, то количество нулей и полюсов увеличивается при тех же условиях. В то же время при фиксированном заглублении включений $z = -2h_1$ и фиксированной толщине пакета с увеличением отношения μ_2/μ_1 количество дисперсионных кривых уменьшается.

Фиг. 3, 4 иллюстрируют кривые нулей (штриховые линии), полюсов (сплошные линии) для элемента $l_{11}(\alpha, \Omega)$ в случае трехслойной среды при тех же значениях параметров и $M_1 = 5$, $M_2 = 1$ (фиг. 3), $M_1 = 25$; $M_2 = 5$ (фиг. 4).

Очевидно, что соотношение модулей упругости μ_k слоев существенно влияет на характер поведения дисперсионных кривых и их количество. В частности, увеличение жесткости среднего слоя при фиксированных значениях μ_1 и μ_3 верхнего и нижнего слоя приводит к уменьшению нулей, полюсов на фиксированной частоте. Аналогичные выводы можно сделать при увеличении жесткости нижнего слоя и фиксированных значениях μ_1 и μ_2 верхнего и среднего слоев.

Выявлено наличие диапазона частот $(0, \omega_*)$, на котором волновод заперт, то есть в системе не возбуждаются волны, уходящие на бесконечность. На этом интервале частот включение или система включений может резонировать. Нули и полюса, как и в случае среды без дефектов, возникают на частотах $\omega > \omega_*$, ω_* называется частотой отпираания волновода. При фиксированной глубине залегания включений значение ω_* возрастает с увеличением жесткостей нижних слоев по отношению к верхнему слою (фиг. 3, 4).

Авторы выражают благодарность В.А. Бабешко, инициировавшего данную работу, за полезное обсуждение и помощь при ее выполнении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00694, 03-01-96537, 03-01-96645), Минобразования России (Е-02-4.0-191), Федеральной целевой программы "Интеграция" (Б0121), гранта Президента РФ (НШ-2107.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.
2. *Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* К постановке динамических смешанных задач для слоистых сред с дефектами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. № 2. С. 29–31.
3. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
4. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* К задаче о трещине на границе раздела упругих плоскости и полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 86–93.
5. *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
6. *Бабешко В.А.* К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // Доклады АН СССР. 1989. Т. 207. № 2. С. 324–327.
7. *Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
8. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Ехлаков А.В.* Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 147–156.
9. *Кит Г.С., Михаськив В.В., Хай О.М.* Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 855–863.
10. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
11. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
12. *Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.
13. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.