

УДК 539.312

© 2005 г. Н.А. ВЕКЛИЧ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КЛИНЕ ПРИ УДАРЕ ГРАНЬЮ О ПЛОСКУЮ НЕПОДВИЖНУЮ ПРЕГРАДУ

В предлагаемой работе приведено точное аналитическое решение плоской задачи об ударе упругого прямоугольного клина (четверти плоскости) о неподвижную идеально гладкую преграду. Она является составной частью более сложной плоской задачи о соударении двух упругих стержней, когда не учитываются отражения волн от свободных боковых поверхностей стержней. Кроме того, ее можно рассматривать как частный случай более сложной задачи о волновом движении упругой полуплоскости со свободной поверхностью, при подходящих начальных условиях. Общее решение волновой задачи для полуплоскости при произвольных начальных условиях было дано [1].

Задача о соударении двух упругих стержней впервые рассматривалась [2] методом функционально-инвариантных решений, но в ряде существенных деталей это решение оказалось несовершенным. Некоторые критические замечания по этому поводу были высказаны [3, 4]. Анализ решения [2] показывает, что противоречивость данной там волновой картины, некоторых графиков и выводов вызвана невыполнением граничных условий для касательных напряжений на свободной боковой поверхности стержня ([2], с. 782).

В предлагаемой работе система уравнений движения, записанная в перемещениях, решалась для клина с помощью интегральных преобразований; применявшихся, в частности, при исследовании удара акустической полосы о преграду [5].

Полученное решение дает возможность полного количественного описания всех характеристик распространения упругих волн в клине при ударе о преграду в принятой линейной постановке задачи. На его основе можно проводить динамические расчеты, связанные с учетом распространения упругих волн в твердых телах. Оно может быть применено в качестве тестового примера, необходимого при разработке правильных и достоверных численных методов решения двумерных динамических задач теории упругости. Оно позволяет получить обоснованную теоретическую оценку условий, при которых применима приближенная одномерная теория Сен-Венана соударения упругих стержней.

1. Постановка задачи. Модули упругости (коэффициенты Ламе) λ , μ и плотность материала клина ρ считаются известными. До удара о преграду клин двигался как твердое тело со скоростью u_0 , направленной перпендикулярно плоской граничной поверхности неподвижной преграды. Так как передняя грань клина и поверхность преграды в процессе сближения остаются параллельными друг другу, то удар нормальный.

Движение клина после удара будет плоским, и для его описания достаточно рассмотреть какую-нибудь плоскость, перпендикулярную обоим граням и ребру клина. В этой плоскости введем неподвижную декартову систему координат Oxy так, чтобы непосредственно перед ударом о преграду клин занимал область $-\infty < x \leq 0$, $0 \leq y < +\infty$.

Поверхность преграды и передняя грань клина располагаются вдоль оси абсцисс ($y = 0$). Начало координат $x = y = 0$ помещается в вершине клина. Боковая грань клина ($x = 0$) свободна от нормального и касательного напряжения.

Пусть $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ – перемещения упругих частиц в направлениях, параллельных осям Ox и Oy соответственно, в точке с координатами x и y , t – время. Движение частиц определяется при $t > 0$.

Деформации ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} , объемную деформацию Δ , интенсивность вихря (компоненту вращения) ω , скорости U и V и напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} определяем по обычным формулам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \Delta &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ U &= \partial u / \partial t, \quad V = \partial v / \partial t \\ \sigma_{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{yy}, \quad \sigma_{xy} = 2\mu \epsilon_{xy} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Запишем для u и v систему уравнений движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - b^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + b^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь a и b – скорости распространения продольных и поперечных волн в упругом материале.

Введем основной безразмерный параметр задачи γ , равный отношению скоростей распространения поперечных и продольных волн $\gamma = b/a$. Параметр γ изменяется в пределах $0 \leq \gamma \leq 1/\sqrt{2}$. Он может быть выражен также через коэффициент Пуассона ν [6]:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}} \quad (1.3)$$

Начальные условия для системы уравнений движения (1.2) имеют следующий вид:

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v(x, y, 0)}{\partial t} = -v_0 \quad (1.4)$$

Граничные условия на обеих гранях запишем, полагая γ отличным от нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(0, y, t)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} + (1-2\gamma^2) \frac{\partial v(0, y, t)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, 0, t)}{\partial x} &= 0, \quad v(x, 0, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для акустического клина ($\gamma = 0$) в граничных условиях (1.5) следовало бы оставить только второе и четвертое уравнения. При этом нельзя требовать, чтобы выполнялись первое и третье условия, означающие равенство нулю деформации сдви-

га ϵ_{xy} , на гранях $x = 0$ и $y = 0$. В противном случае получим противоречивый результат $\omega \neq 0$ [2], т. е. при $\gamma = 0$ движение не будет потенциальным. На обеих гранях акустического клина деформация сдвига ϵ_{xy} предполагается конечной и отличной от нуля.

Перемещения u и v должны также удовлетворять известным условиям существования интегральных преобразований и быть ограниченными на бесконечности ($x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$).

Заметим, что можно было бы вместо удара клина (четверти плоскости $-\infty < x \leq 0$, $0 \leq y < +\infty$) о преграду рассмотреть движение полуплоскости $-\infty < x \leq 0$, $-\infty < y < +\infty$. Для этого надо продолжить начальные условия (1.4) на область отрицательных координат y нечетным образом, а в граничных условиях (1.5) оставить только первые два условия, полагая их справедливыми и для отрицательных координат y . Тогда в области положительных координат y решения задач для полуплоскости и четверти плоскости будут совпадать.

Задача (1.2), (1.4)–(1.5) является линейной. Ее решение было получено аналогично [5] методами интегральных преобразований, которые применялись непосредственно к перемещениям u и v . Это существенно сокращало выкладки. Заметим, что постановка задачи в потенциалах перемещений вносила ненужные дополнительные трудности в математические преобразования, и по этой причине потенциалы перемещений не использовались.

2. Основной вид решения. При переходе от изображений к решению было установлено, что решение рассматриваемой задачи является автомодельным. Было также получено достаточное условие автомодельности. Чтобы записать решение в виде, удобном для проведения расчетов, перейдем к безразмерным величинам. Обозначим безразмерные отношения x/at и y/at просто x и y соответственно, называя x и y безразмерными координатами. Введем масштабные величины: перемещение $l = v_0 t$, деформацию $\epsilon_0 = v_0/a$ и напряжение $\sigma_0 = \rho a v_0$. Пусть

$$u(x, y) = \frac{u}{l}, \quad v(x, y) = \frac{v}{l}, \quad \epsilon_{xx}(x, y) = \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_0}, \quad \epsilon_{yy}(x, y) = \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_{xy}(x, y) = \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_0}, \quad \Delta(x, y) = \frac{\Delta}{\epsilon_0}, \quad \omega(x, y) = \frac{\omega}{\epsilon_0}, \quad U(x, y) = \frac{U}{v_0}$$

$$V(x, y) = \frac{V}{v_0}, \quad \sigma_{xx}(x, y) = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}, \quad \sigma_{yy}(x, y) = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}, \quad \sigma_{xy}(x, y) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_0}$$

В этих обозначениях подчеркивается, что безразмерные перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$, деформации $\epsilon_{xx}(x, y)$ и другие характеристики движения зависят только от безразмерных координат x и y , что и означает автомодельность решения. Тогда наряду с (1.1) будем иметь:

$$\epsilon_{xx}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy}(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \tag{2.1}$$

$$\Delta(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)$$

$$U(x, y) = u(x, y) - x\epsilon_{xx}(x, y) - y(\epsilon_{xy}(x, y) - \omega(x, y))$$

$$V(x, y) = v(x, y) - x(\epsilon_{xy}(x, y) + \omega(x, y)) - y\epsilon_{yy}(x, y)$$

$$\sigma_{xx}(x, y) = \epsilon_{xx}(x, y) + (1 - 2\gamma^2)\epsilon_{yy}(x, y)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \epsilon_{yy}(x, y) + (1 - 2\gamma^2)\epsilon_{xx}(x, y), \quad \sigma_{xy}(x, y) = 2\gamma^2\epsilon_{xy}(x, y)$$

В окончательных расчетных формулах далее будут также применяться безразмерная скорость волны Релея s_R и несколько элементарных функций g, f и z , которые зависят от действительного аргумента s и от безразмерных координат x, y следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \sqrt{1-s^2}, \quad g_2(s) = s^2 - \gamma^2, \quad g_3(s) = s^2 - 2\gamma^2 \\ g_4(s) &= \sqrt{s^2 - \gamma^2}, \quad f_1(s) = 4\gamma^3 s^2 \sqrt{1-s^2} \sqrt{1-\gamma^2 s^2} + (1-2\gamma^2 s^2)^2 \\ f_2(s) &= 16\gamma^2(1-s^2)(s^2 - \gamma^2) + (s^2 - 2\gamma^2)^4 \\ f_3(s) &= s\sqrt{1-s^2} \left(\gamma^3 \left(\sqrt{\frac{1-s^2}{\gamma^2 - s^2}} + \sqrt{\frac{\gamma^2 - s^2}{1-s^2}} \right) + s^2 - 2\gamma^2 \right), \quad Q = \frac{1-2\gamma^2}{\pi^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x\sqrt{1-s^2}, \quad z_2 = 1+z_1, \quad z_3 = 1-z_1, \quad z_4 = x\sqrt{\gamma^{-2} - s^2}, \quad z_5 = 1+z_4 \\ z_6 &= 1-z_4, \quad z_7 = s+y, \quad z_8 = s-y, \quad z_9 = \sqrt{z_1^2 + z_7^2}, \quad z_{10} = \sqrt{z_1^2 + z_8^2} \\ z_{11} &= x\sqrt{s^2\gamma^{-2} - 1}, \quad z_{12} = x\sqrt{1-s^2\gamma^{-2}}, \quad z_{13} = \sqrt{z_7^2 + z_{12}^2}, \quad z_{14} = \sqrt{z_8^2 + z_{12}^2} \end{aligned}$$

В (2.2) и всюду ниже квадратные корни берутся в арифметическом смысле. Скорость s_R является действительным корнем следующего уравнения:

$$4\gamma^3 \sqrt{1-s_R^2} \sqrt{\gamma^2 - s_R^2} - (s_R^2 - 2\gamma^2)^2 = 0 \quad (2.3)$$

Размерная скорость волны Релея равна as_R .

Уравнение (2.3) для s_R можно решать при различных значениях γ численным методом деления отрезка $0 \leq s_R \leq 0.618$ пополам (здесь и ниже границы интервалов указываются с округлениями в третьем знаке). Оно допускает также точное аналитическое решение в параметрическом виде с помощью двух подстановок:

$$\gamma^2 = \frac{1}{16} \left(q^2 - 7q + 17 - \frac{1}{1-q} \right), \quad s_R^2 = \frac{1}{16} \left(q^3 - 7q^2 + 17q + 1 - \frac{1}{1-q} \right) \quad (2.4)$$

При проведении расчетов по формуле (2.4) параметр q надо задавать в диапазоне $0.763 < q < 0.913$, чтобы выполнялось ограничение $0 \leq \gamma \leq 0.707$. Согласно (2.3)–(2.4), отношение s_R/γ изменяется на узком интервале $0.874 < s_R/\gamma < 0.955$, монотонно убывая с ростом γ . Поэтому безразмерная скорость s_R оказывается лишь ненамного меньше γ . В частности, при $\gamma \rightarrow 0$, $s_R/\gamma \rightarrow 0.955$. График зависимости отношения s_R/γ от коэффициента Пуассона дан в [6, 7].

Для безразмерных перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеем следующие расчетные формулы:

$$u(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{(2\gamma^2 s^2 - 1)u_1(x, y, s) - 2\gamma^2 s^2 u_2(x, y, s) - 4 \ln s}{g_1(s)f_1(s)} ds + \right.$$

$$+ 4\gamma^3 \int_{\gamma}^1 \frac{g_3(s)g_4(s)u_3(x, y, s)}{f_2(s)} ds + \pi\gamma^2 \int_{\gamma}^1 \frac{(g_3(s))^2 u_4(x, y, s)}{g_1(s)f_2(s)} ds - \quad (2.5)$$

$$- 8\gamma^5 \int_{\gamma}^1 \frac{g_4(s)u_5(x, y, s)}{f_2(s)} ds + \frac{\pi g_3(s_R)u_3(x, y, s_R) + 2\gamma^2 u_6(x, y, s_R)}{4 f_3(s_R)} \Big\}$$

$$u_1(x, y, s) = (ys - z_2) \ln|ys - z_2| + (ys - z_3) \ln|ys - z_3| -$$

$$- (ys + z_2) \ln|ys + z_2| - (ys + z_3) \ln|ys + z_3|$$

$$u_2(x, y, s) = (ys - z_5) \ln|ys - z_5| + (ys - z_6) \ln|ys - z_6| -$$

$$- (ys + z_5) \ln|ys + z_5| - (ys + z_6) \ln|ys + z_6|$$

$$u_3(x, y, s) = 2 \left(z_1 \left(\arcsin \frac{z_7}{z_9} + \arcsin \frac{z_8}{z_{10}} \right) - z_7 \ln z_9 - z_8 \ln z_{10} \right)$$

$$u_4(x, y, s) = |z_{11} + z_7| + |z_{11} + z_8| - |z_{11} - z_7| - |z_{11} - z_8|$$

$$u_5(x, y, s) = (z_{11} + z_7) \ln|z_{11} + z_7| + (z_{11} + z_8) \ln|z_{11} + z_8| -$$

$$- (z_{11} - z_7) \ln|z_{11} - z_7| - (z_{11} - z_8) \ln|z_{11} - z_8|$$

$$u_6(x, y, s) = 2 \left(z_{12} \left(\arcsin \frac{z_7}{z_{13}} + \arcsin \frac{z_8}{z_{14}} \right) - z_7 \ln z_{13} - z_8 \ln z_{14} \right)$$

$$v(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{(2\gamma^2 s^2 - 1) v_1(x, y, s) + 2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 s^2} g_1(s) v_2(x, y, s)}{(g_1(s))^2 f_1(s)} ds - \right.$$

$$- 4\gamma^3 \int_{\gamma}^1 \frac{g_3(s)g_4(s)v_4(x, y, s)}{g_1(s)f_2(s)} ds - \pi\gamma \int_{\gamma}^1 \frac{(g_3(s))^2 g_4(s)v_4(x, y, s)}{g_1(s)f_2(s)} ds + \quad (2.6)$$

$$+ 8\gamma^4 \int_{\gamma}^1 \frac{g_2(s)v_5(x, y, s)}{f_2(s)} ds - \frac{\pi g_3(s_R)v_3(x, y, s_R) + 2\gamma \sqrt{\gamma^2 - s_R^2} g_1(s_R)v_6(x, y, s_R)}{4 g_1(s_R)f_3(s_R)} \Big\}$$

$$v_1(x, y, s) = (ys + z_3) \ln|ys + z_3| + (ys - z_3) \ln|ys - z_3| -$$

$$- (ys + z_2) \ln|ys + z_2| - (ys - z_2) \ln|ys - z_2|$$

$$v_2(x, y, s) = (ys + z_6) \ln|ys + z_6| + (ys - z_6) \ln|ys - z_6| -$$

$$- (ys + z_5) \ln|ys + z_5| - (ys - z_5) \ln|ys - z_5|$$

$$v_3(x, y, s) = 2 \left(z_1 \ln \frac{z_9}{z_{10}} + z_7 \arcsin \frac{z_7}{z_9} - z_8 \arcsin \frac{z_8}{z_{10}} \right)$$

$$v_4(x, y, s) = |z_{11} + z_7| + |z_{11} - z_7| - |z_{11} + z_8| - |z_{11} - z_8|$$

$$u_5(x, y, s) = (z_{11} + z_7) \ln|z_{11} + z_7| + (z_{11} - z_7) \ln|z_{11} - z_7| -$$

$$- (z_{11} + z_8) \ln|z_{11} + z_8| - (z_{11} - z_8) \ln|z_{11} - z_8|$$

$$u_6(x, y, s) = 2 \left(z_{12} \ln \frac{z_{13}}{z_{14}} + z_7 \arcsin \frac{z_7}{z_{13}} - z_8 \arcsin \frac{z_8}{z_{14}} \right).$$

Подставив перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (2.5)–(2.6) в правые части формул (2.1), получим выражения для деформации, скорости и напряжения. Заметим, что частное дифференцирование по x и по y в (2.5)–(2.6) можно выполнять непосредственно под знаками интегралов по обычным правилам дифференцирования.

Для деформаций $\epsilon_{xx}(x, y)$, $\epsilon_{yy}(x, y)$, $\Delta(x, y)$, $\epsilon_{xy}(x, y)$ и интенсивности вихря $\omega(x, y)$ имеем следующие формулы:

$$\epsilon_{xx}(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{(1 - 2s^2 \gamma^2) g_1(s) e_{x1}(x, y, s) + 2\gamma s^2 \sqrt{1 - s^2 \gamma^2} e_{x2}(x, y, s)}{g_1(s) f_1(s)} ds + \right.$$

$$+ 8\gamma^3 \int_{\gamma}^1 \frac{g_1(s) g_3(s) g_4(s) e_{x3}(x, y, s)}{f_2(s)} ds + 2\pi\gamma \int_{\gamma}^1 \frac{(g_3(s))^2 g_4(s) e_{x4}(x, y, s)}{g_1(s) f_2(s)} ds -$$

$$\left. - 8\gamma^4 \int_{\gamma}^1 \frac{g_2(s) e_{x5}(x, y, s)}{f_2(s)} ds + \frac{\pi g_1(s_R) g_3(s_R) e_{x3}(x, y, s_R) + 2\gamma \sqrt{\gamma^2 - s_R^2} e_{x6}(x, y, s_R)}{f_3(s_R)} \right\} \quad (2.7)$$

$$e_{x1}(x, y, s) = \ln \left| \frac{y^2 s^2 - z_2^2}{y^2 s^2 - z_3^2} \right|, \quad e_{x2}(x, y, s) = \ln \left| \frac{y^2 s^2 - z_5^2}{y^2 s^2 - z_6^2} \right|$$

$$e_{x3}(x, y, s) = \arcsin \frac{z_7}{z_9} + \arcsin \frac{z_8}{z_{10}}$$

$$e_{x4}(x, y, s) = H(z_{11} + z_7) + H(z_{11} + z_8) - H(z_{11} - z_7) - H(z_{11} - z_8)$$

$$e_{x5}(x, y, s) = \ln \left| \frac{(z_7 + z_{11})(z_8 + z_{11})}{(z_7 - z_{11})(z_8 - z_{11})} \right|, \quad e_{x6}(x, y, s) = \arcsin \frac{z_7}{z_{13}} + \arcsin \frac{z_8}{z_{14}}$$

$$\epsilon_{yy}(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{(1 - 2\gamma^2 s^2) e_{y1}(x, y, s) - 2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 s^2} g_1(s) e_{y2}(x, y, s)}{(1 - s^2) f_1(s)} s^2 ds - \right.$$

$$- 8\gamma^3 \int_{\gamma}^1 \frac{g_3(s) g_4(s) e_{y3}(x, y, s)}{g_1(s) f_2(s)} ds - 2\pi\gamma \int_{\gamma}^1 \frac{(g_3(s))^2 g_4(s) e_{y4}(x, y, s)}{g_1(s) f_2(s)} ds +$$

$$\left. + 8\gamma^4 \int_{\gamma}^1 \frac{g_2(s) e_{y5}(x, y, s)}{f_2(s)} ds - \frac{\pi g_3(s_R) e_{y3}(x, y, s_R) + 2\gamma \sqrt{\gamma^2 - s_R^2} g_1(s_R) e_{y6}(x, y, s_R)}{g_1(s_R) f_3(s_R)} \right\} \quad (2.8)$$

$$e_{y1}(x, y, s) = e_{x1}(x, y, s), \quad e_{y2}(x, y, s) = e_{x2}(x, y, s), \quad e_{y3}(x, y, s) = e_{x3}(x, y, s)$$

$$e_{y4}(x, y, s) = e_{x4}(x, y, s), \quad e_{y5}(x, y, s) = e_{x5}(x, y, s), \quad e_{y6}(x, y, s) = e_{x6}(x, y, s)$$

$$\Delta(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{(1 - 2\gamma^2 s^2) \Delta_1(x, y, s)}{(1 - s^2) f_1(s)} ds - 8\gamma^3 \int_\gamma^1 \frac{s^2 g_3(s) g_4(s) \Delta_2(x, y, s)}{g_1(s) f_2(s)} ds - \frac{\pi s_R^2 g_3(s_R) \Delta_2(x, y, s_R)}{2 g_1(s_R) f_3(s_R)} \right\} \quad (2.9)$$

$$\Delta_1(x, y, s) = e_{x1}(x, y, s), \quad \Delta_2(x, y, s) = e_{x3}(x, y, s)$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{s(2\gamma^2 s^2 - 1) e_{xy1}(x, y, s)}{g_1(s) f_1(s)} ds - 4\gamma^3 \int_\gamma^1 \frac{g_3(s) g_4(s) e_{xy2}(x, y, s)}{f_2(s)} ds - \pi \int_\gamma^1 \frac{(g_3(s))^3 e_{xy3}(x, y, s)}{g_1(s) f_2(s)} ds - \frac{\pi g_3(s_R) e_{xy4}(x, y, s_R)}{4 f_3(s_R)} \right\} \quad (2.10)$$

$$e_{xy1}(x, y, s) = \ln \left| \frac{(ys - z_2)(ys - z_3)(ys + z_5)(ys + z_6)}{(ys + z_2)(ys + z_3)(ys - z_5)(ys - z_6)} \right|$$

$$e_{xy2}(x, y, s) = \ln \left| \frac{(z_1^2 + z_7^2)(z_{11}^2 - z_8^2)}{(z_1^2 + z_8^2)(z_{11}^2 - z_7^2)} \right|$$

$$e_{xy3}(x, y, s) = H(z_7 + z_{11}) + H(z_8 - z_{11}) - H(z_7 - z_{11}) - H(z_8 + z_{11})$$

$$e_{xy4}(x, y, s) = \ln \frac{(z_1^2 + z_7^2)(z_{12}^2 + z_8^2)}{(z_1^2 + z_8^2)(z_{12}^2 + z_7^2)}$$

$$\omega = Q \left\{ \int_0^1 \frac{s \Omega_1(x, y, s)}{g_1(s) f_1(s)} ds - \pi \int_\gamma^1 \frac{s^2 (g_3(s))^2 \Omega_2(x, y, s)}{g_1(s) f_2(s)} ds - 4\gamma^3 \int_\gamma^1 \frac{s^2 g_4(s) \Omega_3(x, y, s)}{f_2(s)} ds - \frac{\pi s_R^2 \Omega_3(x, y, s_R)}{4 f_3(s_R)} \right\} \quad (2.11)$$

$$\Omega_1(x, y, s) = \ln \left| \frac{(sy - z_5)(sy - z_6)}{(sy + z_5)(sy + z_6)} \right|$$

$$\Omega_2(x, y, s) = H(z_7 + z_{11}) - H(z_8 + z_{11}) - H(z_7 - z_{11}) + H(z_8 - z_{11})$$

$$\Omega_3(x, y, s) = \ln \left| \frac{z_8^2 - z_{11}^2}{z_7^2 - z_{11}^2} \right|$$

Для скоростей $U(x, y)$ и $V(x, y)$ имеем расчетные формулы

$$U(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{(1 - 2\gamma^2 s^2) U_1(x, y, s) + 2\gamma^2 s^2 U_2(x, y, s) - 4 \ln s}{g_1(s) f_1(s)} ds - \right.$$

$$-4\gamma^3 \int_{\gamma}^1 \frac{g_3(s)g_4(s)U_3(x, y, s)}{f_2(s)} s ds + 2\pi\gamma^2 \int_{\gamma}^1 \frac{(g_3(s))^2 U_4(x, y, s)}{g_1(s)f_2(s)} s ds - \quad (2.12)$$

$$-8\gamma^5 \int_{\gamma}^1 \frac{g_4(s)U_5(x, y, s)}{f_2(s)} s ds - \frac{\pi s_R g_3(s_R)U_3(x, y, s_R) + 2\gamma^2 U_6(x, y, s_R)}{4 f_3(s_R)} \Big\}$$

$$U_1(x, y, s) = \ln |(y^2 s^2 - z_2^2)(y^2 s^2 - z_3^2)|, \quad U_2(x, y, s) = \ln |(y^2 s^2 - z_5^2)(y^2 s^2 - z_6^2)|$$

$$U_3(x, y, s) = \ln((z_1^2 + z_7^2)(z_1^2 + z_8^2))$$

$$U_4(x, y, s) = H(z_{11} + z_7) + H(z_{11} + z_8) - H(z_7 - z_{11}) - H(z_8 - z_{11})$$

$$U_5(x, y, s) = U_6(x, y, s) = \ln |(z_7^2 - z_{11}^2)(z_8^2 - z_{11}^2)|$$

$$V(x, y) = Q \left\{ \int_0^1 \frac{(2\gamma^2 s^2 - 1)V_1(x, y, s) + 2\gamma\sqrt{1 - \gamma^2 s^2} g_1(s)V_2(x, y, s)}{(g_1(s))^2 f_1(s)} s ds - \right.$$

$$-8\gamma^3 \int_{\gamma}^1 \frac{g_3(s)g_4(s)V_3(x, y, s)}{g_1(s)f_2(s)} s ds - 2\pi\gamma \int_{\gamma}^1 \frac{(g_3(s))^2 g_4(s)V_4(x, y, s)}{g_1(s)f_2(s)} s ds + \quad (2.13)$$

$$\left. + 8\gamma^4 \int_{\gamma}^1 \frac{g_2(s)V_5(x, y, s)}{f_2(s)} s ds - \frac{\pi s_R g_3(s_R)V_3(x, y, s_R) + 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - s_R^2} g_1(s_R)V_6(x, y, s_R)}{2 g_1(s_R)f_3(s_R)} \right\}$$

$$V_1(x, y, s) = \ln \left| \frac{(ys - z_2)(ys + z_3)}{(ys - z_3)(ys + z_2)} \right|, \quad V_2(x, y, s) = \ln \left| \frac{(ys - z_5)(ys + z_6)}{(ys - z_6)(ys + z_5)} \right|$$

$$V_3(x, y, s) = \arcsin \frac{z_7}{z_9} - \arcsin \frac{z_8}{z_{10}}$$

$$V_4(x, y, s) = H(z_7 + z_{11}) + H(z_7 - z_{11}) - H(z_8 + z_{11}) - H(z_8 - z_{11})$$

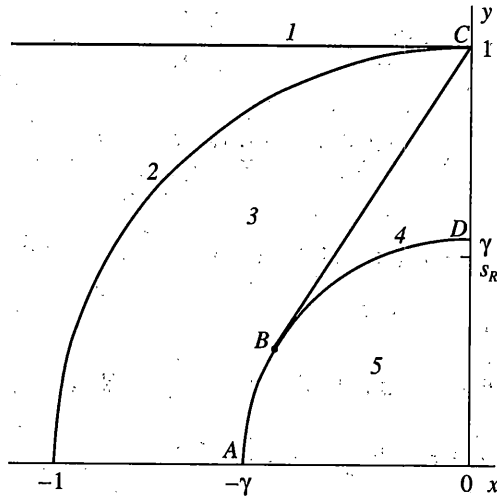
$$V_5(x, y, s) = \ln \left| \frac{(z_7 + z_{11})(z_8 - z_{11})}{(z_7 - z_{11})(z_8 + z_{11})} \right|, \quad V_6(x, y, s) = \arcsin \frac{z_7}{z_{13}} - \arcsin \frac{z_8}{z_{14}}$$

Упомянутое выше достаточное условие автомодельности задачи является тождеством для s_R и имеет следующий вид:

$$\int_0^1 \frac{ds}{g_1(s)f_1(s)} - 4\gamma^3 \int_{\gamma}^1 \frac{g_4(s)}{f_2(s)} s^3 ds - \frac{\pi s_R^3}{4 f_3(s_R)} \equiv 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Тождество (2.14) доказывается аналитически с помощью контурного интегрирования. В формулах (2.7)–(2.13) используется единичная функция Хевисайда $H(x)$.

3. О других допустимых формах решения. Все расчетные формулы (2.5)–(2.13) устроены одинаково, так как имеют вид произведения постоянного множителя Q на



Фиг. 1

сумму из 4–6 слагаемых. Причем одно слагаемое является конечным выражением, определяющим в явном виде аналитическую особенность соответствующей расчетной величины на боковой грани клина в особой точке Релея с безразмерными координатами $x = 0, y = s_R$.

Конечное слагаемое в каждой из формул (2.5)–(2.13) дает количественную оценку эффекта суперпозиции элементарных волн Релея, соответствующих перемещениям, деформациям и так далее с длинами волн, непрерывно изменяющимися в пределах от нуля до бесконечности.

Отметим, что для перемещений элементарные волны Релея достаточно подробно описаны, например, в [7]. С помощью операции дифференцирования по ним можно построить элементарные волны Релея для деформаций, скоростей и т.д., причем все эти волны не будут иметь аналитических особенностей.

Появление аналитических особенностей у характеристик движения упругого клина в точке Релея вызвано тем, что элементарные волны любой длины, участвующие в суперпозиции, имеют одинаковую скорость s_R и не подвержены дисперсии.

Наиболее простыми для программирования и расчетов являются формулы (2.5) и (2.6) для перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Интегралы в этих формулах являются несобственными только потому, что содержат интегрируемую корневую особенность в точке $s = 1$, порожденную функцией $g_1(s)$ в знаменателе соответствующих подынтегральных выражений. Избавиться от этой особенности можно с помощью тригонометрической подстановки $s = \sin \xi$, где ξ – новый аргумент интегрирования. После чего все интегралы (2.5)–(2.6) находятся численно, например, по формуле парабол. Это позволяет вычислять перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ при любых значениях безразмерных координат x и y по стандартным программам численного интегрирования, причем разбиения области движения фронтами на волны по существу не требуется.

В предельном случае $2\gamma^2 \rightarrow 1$ ($Q \rightarrow 0$) несобственные интегралы берутся в смысле главного значения по Коши.

Интегралы, входящие в формулы (2.7)–(2.13), содержат кроме корневой особенности также логарифмическую особенность. Однако они сходятся в любой точке (x, y) . Для их вычисления по-прежнему применяется метод парабол, который должен быть дополнен анализом положения точки (x, y) на плоскости движения. Плоскость дви-

жения (x, y) необходимо разбить фронтами на волны, в каждой из которых интегралы, входящие в расчетные формулы, являются определенными (без аналитических особенностей), или имеют одну или даже две логарифмические особые точки аргумента s у подынтегральных функций. Соответствующая волновая картина показана на плоскости безразмерных координат Oxy , фиг. 1. Чтобы в подынтегральных функциях избавиться от этих логарифмических особых членов, перед вычислениями соответствующие интегралы брались численно один раз по частям.

Следует отметить также и то обстоятельство, что от логарифмических членов под интегралами в (2.5)–(2.13) можно избавиться с помощью контурного интегрирования на вспомогательной комплексной плоскости, причем несколькими способами.

Например, в формуле (2.6) для перемещения $v(x, y)$ можно оставить без изменения одно слагаемое, содержащее под интегралом функцию $v_4(x, y, s)$. Тогда остальные слагаемые с логарифмическими членами можно преобразовать и заменить слагаемыми с интегралами, не содержащими логарифмов. Для этого достаточно рассмотреть интеграл от аналитической функции по кружку L достаточно малого радиуса с центром в неособой точке подынтегральной функции:

$$\oint_L \left(-\frac{p^2 + 2\gamma^2}{\sqrt{p^2 + 1}} F_1(p) + 2\gamma\sqrt{p^2 + \gamma^2} F_2(p) \right) \frac{dp}{4R(p)\sqrt{p^2 + 1}} = 0 \quad (3.1)$$

$$F_1(p) = p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3 + p_4 \ln p_4$$

$$F_2(p) = p_5 \ln p_5 - p_6 \ln p_6 - p_7 \ln p_7 + p_8 \ln p_8$$

$$p_1 = p - iy + x\sqrt{p^2 + 1}, \quad p_2 = p - iy - x\sqrt{p^2 + 1}$$

$$p_3 = p + iy + x\sqrt{p^2 + 1}, \quad p_4 = p + iy - x\sqrt{p^2 + 1}$$

$$p_5 = p - iy + x\sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2} + 1}, \quad p_6 = p - iy - x\sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2} + 1}$$

$$p_7 = p + iy + x\sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2} + 1}, \quad p_8 = p + iy - x\sqrt{\frac{p^2}{\gamma^2} + 1}$$

$$R(p) = 4\gamma^3 \sqrt{p^2 + 1} \sqrt{p^2 + \gamma^2} - (p^2 + 2\gamma^2)^2$$

Здесь i – мнимая единица. Для выделения однозначной ветви у подынтегральной функции (3.1) в плоскости интегрирования $p = \xi + is$ создаются два полубесконечных разреза по мнимой оси с началами в точках $\pm i\gamma$, и восемь полубесконечных разрезов, начинающихся в симметрично располагающихся на плоскости p точках ветвления логарифмов и идущих вдоль лучей $\arg(p) = \text{const}$. Кроме точек ветвления, у подынтегральной функции (3.1) имеются два простых полюса в точках $\pm is_R$, поскольку в них функция Релея $R(p)$ обращается в нуль. Начало координат $p = 0$ является устранимой особой точкой. Интеграл (3.1) равен нулю по теореме об однозначной аналитической функции. Деформируем контур L и перейдем в (3.1) к интегрированию по двум окружностям бесконечно малых радиусов с центрами в точках $\pm is_R$, а также по берегам упомянутых разрезов. В результате приходим к тому, что подлежащая замене группа интегралов (2.6) оказывается равной сумме восьми других несобствен-

ных интегралов, не содержащих логарифмических членов. Необходимо только проявлять достаточную внимательность при интегрировании и приведении подобных членов в случае, когда точки ветвления логарифмов попадают на мнимую ось между берегами разрезов: обход таких точек осуществляется по полуокружностям.

К формулам (2.7)–(2.13) можно также применить другой известный в математическом анализе метод преобразования. Продифференцируем каждую из них один раз слева и справа по какой-нибудь безразмерной координате, например по x (формулы (2.5), (2.6) необходимо было бы дифференцировать по x дважды). Тогда полученные в правых частях интегралы выражаются в конечном виде через степенные элементарные функции от x и y . Причем эти элементарные функции оказываются более наглядными и удобными для исследования аналитических свойств поля деформаций и поля скоростей внутри клина, по сравнению с подинтегральными функциями в формулах (2.7)–(2.13). Восстановить же деформацию и скорости по полученным производным первого (для перемещений – второго) порядка можно как обычно с помощью определенных интегралов, вполне пригодных для проведения расчетов и не уступающих формулам (2.7)–(2.13).

В качестве типичного примера применения указанного метода приведем упрощенные формулы для объемной деформации $\Delta(x, y)$ и для деформации сдвига $\epsilon_{xy}(x, y)$, заменяющие формулы (2.9) и (2.10) в областях 3–5 (фиг. 1):

$$\Delta(x, y) = -1 - 2\pi Q \int_{x_1(y)}^x \operatorname{Re} \left(\frac{p^2(p^2 + 2\gamma^2 p_0^2) p_1}{f_4(p) \sqrt{p^2 + p_0^2}} \right) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2-y^2}}$$

$$x_1(y) = -\sqrt{1-y^2}$$

$$p = -iy + s\sqrt{1-s^2-y^2}, \quad p_0 = 1-s^2, \quad p_1 = -iys + \sqrt{1-s^2-y^2}$$

$$f_4(p) = 4\gamma^3 p_0^2 \sqrt{p^2 + p_0^2} \sqrt{p^2 + \gamma^2 p_0^2} - (p^2 + 2\gamma^2 p_0^2)^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$
(3.2)

Символ Re в (3.2) означает действительную часть комплексной подинтегральной функции. Из (3.2) следует, что частная производная $\partial\Delta(x, y)/\partial x$ терпит разрыв второго рода (имеет корневую особенность) при подходе справа к круговому фронту, разделяющему волны 2 и 3.

Сохраняя обозначения формулы (3.2), в области 3 для деформации $\epsilon_{xy}(x, y)$ получим:

$$\epsilon_{xy}(x, y) = 2\pi Q \int_{x_1(y)}^x \operatorname{Im} \left(\frac{(p^2 + 2\gamma^2 p_0^2) \sqrt{p^2 + p_0^2}}{f_4(p)} \right) \frac{p_0 ds}{\sqrt{1-s^2-y^2}}$$
(3.3)

Здесь (и ниже) символ Im означает мнимую часть подинтегральной функции. В основной поперечной волне 5 имеем:

$$\epsilon_{xy}(x, y) = 2\pi Q \int_0^x \operatorname{Im} \left(\frac{(p^2 + 2\gamma^2 p_0^2) \sqrt{p^2 + p_0^2}}{f_4(p)} \right) \frac{p_0 ds}{\sqrt{1-s^2-y^2}} +$$

$$+ \frac{2\pi Q}{\gamma} \int_0^x \operatorname{Im} \left(\frac{(q^2 + 2\gamma^2 q_0^2)(q^2 + \gamma^2 q_0^2)}{\sqrt{q^2 + q_0^2} f_4(q)} \right) \frac{q_0 ds}{\sqrt{\gamma^2 - s^2 - y^2}}$$
(3.4)

$$q = -iy + s\sqrt{1 - (s^2 + y^2)/\gamma^2}, \quad q_0 = 1 - s^2/\gamma^2$$

В головной поперечной волне 4:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy}(x, y) = & 2\pi Q \int_{x_1(y)}^x \operatorname{Im} \left(\frac{(p^2 + 2\gamma^2 p_0^2) \sqrt{p^2 + p_0^2}}{f_4(p)} \right) \frac{p_0 ds}{\sqrt{1 - s^2 - y^2}} + \\ & + \frac{2\pi Q}{\gamma} \int_{x_2(y)}^x \frac{(q^2 - 2\gamma^2)^3 (q^2 - \gamma^2)}{\sqrt{s^2 + y^2 - \gamma^2} \sqrt{1 - q}} ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$A(q) = 16\gamma^6(1 - q^2)(q^2 - \gamma^2) + (q^2 - 2\gamma^2)^4$$

$$x_2(y) = -\frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}(1 - y), \quad q = \frac{-y\gamma^2 + s\gamma\sqrt{s^2 + y^2 - \gamma^2}}{s^2 - \gamma^2}$$

Согласно (3.3)–(3.5) на круговом фронте продольной волны и на составном фронте поперечной волны *ABC* (фиг. 1) частная производная $d\epsilon_{xy}(x, y)/dx$ терпит разрыв второго рода (имеет корневую особенность при подходе к фронту справа). В частности, на переднем фронте *BC* головной волны особенность производной обусловлена тождественным равенством $q \equiv 1$, на что указывает формула (3.5). На фронте *BD* эта производная также разрывная, причем по разные стороны от *BD* корневая особенность производной имеет разные знаки.

Из формулы (3.5) также следует, что на прямой $y = \gamma$ имеет место тождество $q \equiv \gamma$, так что один из интегралов обращается в нуль. Поэтому при $y = \gamma$ в волне 4 деформацию $\epsilon_{xy}(x, y)$ можно вычислять по простой формуле (3.3). Прямую $y = \gamma$ можно условно назвать очень слабым фронтом, разделяющим головную волну 4 на две части (на фиг. 1 эта прямая не нанесена).

Таким же образом можно аналитически определять свойства производных других величин, хотя с помощью (2.5)–(2.13) о них можно судить лишь качественно, по числовым расчетам.

Тем не менее, в волнах 3, 4, 5 формулы (2.5)–(2.13) являются достаточно эффективными, а вблизи свободной боковой грани клина, особенно в окрестности точки Релея, и более наглядными. Действительно, в этой точке деформации, напряжения и скорость $V(0, y)$ терпят разрыв первого рода (конечный скачок), а интенсивность вихря и скорость $U(0, y)$ – разрыв второго рода (логарифмическая особенность). Аналитический характер этих разрывов детально и в явном виде описывается конечными слагаемыми в формулах (2.7)–(2.13). Но по формуле (3.2) о разрывном характере объемной деформации можно узнать только при помощи расчетов.

4. Качественные особенности волнового движения. Отметим некоторые другие качественные особенности движения в клине, на которые указывают расчеты по формулам (2.5)–(2.13). Прежде всего, рассматриваемое движение является волновым. Наиболее простым оно будет в областях 1 и 2 (фиг. 1), разделенных прямолинейным фронтом $y = 1$. Как и следовало ожидать, в области 1 имеем невозмущенное движение, а в области 2 имеем волну одномерного сжатия с хорошо известными параметрами. В численных расчетах формулы (2.5)–(2.13) четко дают соответствующие скачки деформаций и скоростей при переходе через фронт $y = 1$. В областях 2, 3, 4 и 5, разделенных круговыми и (частично) прямолинейными фронтами, согласно (2.5)–(2.13) перемещения, деформации и скорости непрерывны. Это значительно упрощает отладку программы численных расчетов на компьютере по указанным формулам.

Более сложным по сравнению с областями 1 и 2 будет движение в области 3. Оно представляет собой чисто продольную безвихревую волну с передним круговым фронтом и задним составным фронтом ABC . В этой области скорость $V(x, y)$ отрицательная (частицы движутся к преграде), происходит интенсивный рост деформации сдвига $\varepsilon_{xy}(x, y)$.

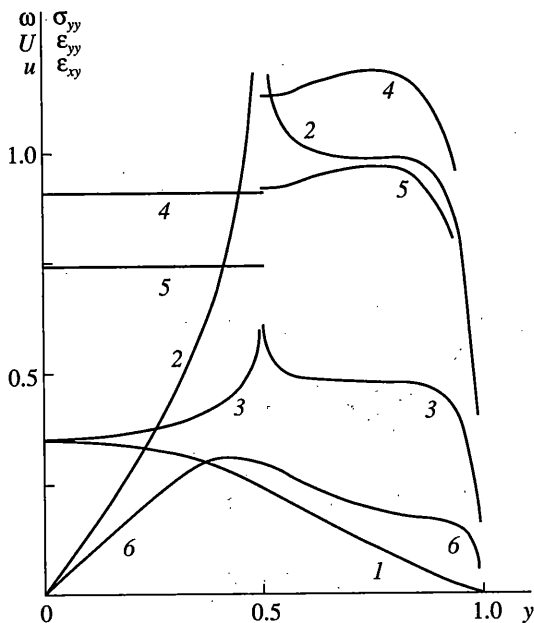
В отличие от фронта $y = 1$, другие названные фронты являются слабыми. Скорости частиц, деформации и напряжения на них непрерывны. Причем дугу AB совместно с полукасательной BC следует рассматривать как единую линию – передний фронт вихревой поперечной волны, состоящей из двух структурных частей – основной волны 5 и головной волны 4. Фронт ABC перемещается по клину со скоростью γ . За этим фронтом в волне 5 и в большей части волны 4 частицы имеют положительную скорость $V(x, y)$, т. е. движутся от преграды. На самой преграде и на части свободной грани ($y < s_R$) эта скорость равна нулю. Интересно отметить, что точка касания B перемещается влево вдоль оси Ox со скоростью, которая ровно в два раза меньше “стержневой” скорости.

Как показали вычисления по формуле (2.11) при $\gamma \neq 0$, на фронте ABC , а также впереди него (на фиг. 1 – в областях 1, 2 и 3) интенсивность вихря ω всюду равна нулю. Позади фронта ABC , в головной и основной поперечных волнах 4 и 5 имеет место вихревое движение среды. Интенсивность вихря ω там отлична от нуля. Исключением являются лишь точки, лежащие на преграде $y = 0$, поскольку на всей преграде $\omega = 0$. Другими словами, преграда не возбуждает вихревого движения. При подходе к фронту ABC справа, частная производная $d\omega(x, y)/dx$ терпит разрыв второго рода (имеет корневую особенность). Поэтому вблизи ABC в волнах 4, 5 величина ω изменяется весьма быстро, оставаясь непрерывной. В головной волне 4 интенсивность ω сохраняет постоянное значение на полукасательных к круговому фронту BD , разделяющему области 4, 5 и выходящих подобно BC на свободную поверхность клина. Наибольших значений ω достигает на свободной от напряжений боковой грани клина. В частности, в точке Релея ($x = 0, y = s_R$) имеем $\omega = \infty$. Таким образом в момент прохождения волны Релея упругие волокна на свободной поверхности клина поворачиваются теоретически на прямой угол по отношению к своему первоначальному направлению и становятся параллельными преграде. После прохождения волны Релея направление волокон непрерывно восстанавливается до первоначального. У вершины клина волокна на свободной поверхности остаются перпендикулярными преграде во все время движения.

Необходимо только добавить, что вместо привычного термина “волна Релея” точнее было бы говорить об особой точке Релея упругой волны. В приведенном решении волны Релея как области, ограниченной фронтами, просто не существует.

В вершине упругого клина (при $\gamma \neq 0$) аналитических особенностей у решения нет. Сама вершина скользит вдоль преграды с постоянной скоростью $U(0, 0)$, которую можно вычислить по формуле (2.12) при различных значениях γ . Благодаря автомодельности решения напряженно-деформированное состояние, возникшее в вершине в момент удара, постепенно (при $t \rightarrow \infty$) охватывает весь клин. Скорость всех частиц в этом предельном состоянии мало отличается от $U(0, 0)$, т.е. клин скользит вдоль преграды как твердое тело, будучи при этом равномерно сжатым единственным отличным от нуля напряжением $\sigma_{yy}(0, 0)$. Размерное перемещение $u(x, y, t)$ в предельном состоянии стремится к бесконечности и т.д.

В акустическом клине ($\gamma = 0$) вихревой фронт ABC сливается с боковой гранью $x = 0$. При этом области 4, 5 вихревого движения вырождаются (исчезают), и движение будет безвихревым, потенциальным ($\omega \equiv 0$). Так как волна Релея не отходит от преграды, то в вершине акустического клина ($x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$) скорость $U(x, y)$ приобретает логарифмическую особенность. Более полно волновое движение при $\gamma = 0$ рассмотрено в [5].



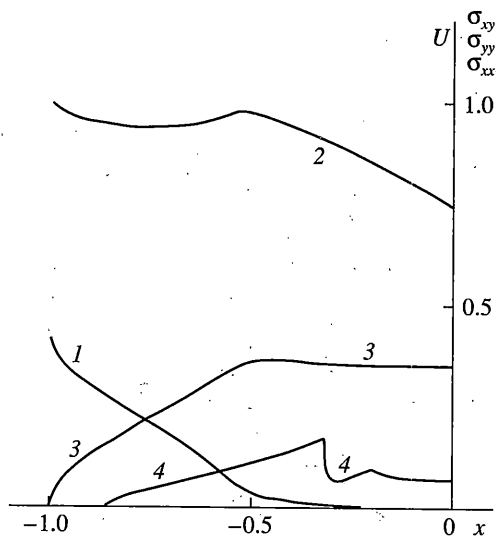
Фиг. 2

4. Результаты численных расчетов. Отметим некоторые результаты расчетов по приведенным формулам, ограничившись исходными числовыми данными $\nu = 0.3$, $\gamma = 0.534$, $s_R = 0.496$.

На фиг. 2 приведено безразмерное перемещение $u(0, y)$ (кривая 1) и компонента вихря $\omega(0, y)$ (кривая 2). Чтобы можно было легче судить о сложной форме свободной боковой грани $x = 0$ при распространении по клину упругих волн, оба эти графика целесообразно рассматривать совместно, так как при $\gamma \neq 0$ ординаты графика $\omega(0, y)$ с точностью до знака равны производной от перемещения $u(0, y)$ по координате y . Сначала упругие волокна на свободной грани испытывают влияние головных волн. По мере их прохождения волокна поворачиваются на все больший и больший угол. Поэтому свободная поверхность при $y > s_R$ является вогнутой. После прихода основных поперечных волн ($y < s_R$) угол поворота волокон уменьшается, кривая 1 становится выпуклой. Наибольшим поворот любого волокна (теоретически – на прямой угол) будет при прохождении через него волны Релея. В точке Релея кривая 1 имеет перегиб и должна касаться вертикальной прямой $y = s_R$. Однако в принятом на фиг. 2 масштабе отразить эти детали не представляется возможным. Отметим также, что на кривой 1 нет прямолинейных участков и угловых точек, как это получилось в ([2], фиг. 4).

Распределение скорости $U(0, y)$ на свободной боковой грани дается кривой 3. На значительной части поверхности, вовлеченной в движение, скорость $U(0, y)$ изменяется довольно мало. Быстрый рост скорости $U(0, y)$ имеет место лишь в начале движения, после прихода в точку наблюдения головных волн ($y \rightarrow 1$). Наиболее существенно скорость $U(0, y)$ изменяется вблизи точки Релея, стремясь к бесконечности по логарифмическому закону при $y \rightarrow s_R$.

На фиг. 2 даны также распределения деформации $\epsilon_{yy}(0, y)$ (кривая 4) и напряжения $\sigma_{yy}(0, y)$ (кривая 5). Для удобства изображения, обе эти кривые показаны над осью Oy , хотя деформация $\epsilon_{yy}(0, y)$ и напряжение $\sigma_{yy}(0, y)$ отрицательные. На интервале $0 < y < \gamma$ каждый график состоит из двух прямолинейных горизонтальных от-



Фиг. 3

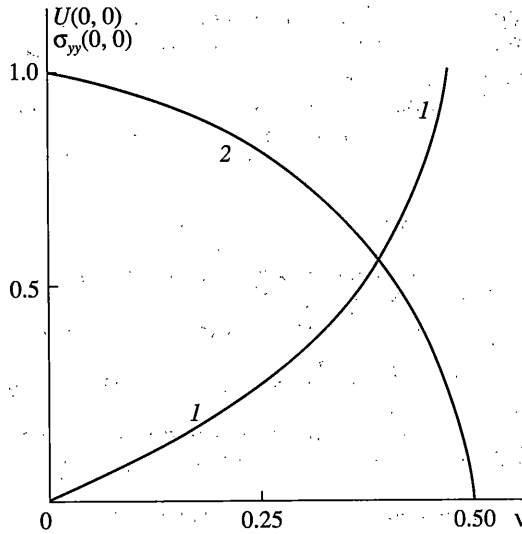
резков, разделенных точкой разрыва первого рода при $y = s_R$. Заметим, что при $x = 0$ деформация $\epsilon_{xx}(0, y)$ также разрывна и пропорциональна $\epsilon_{yy}(0, y)$. Но напряжение $\sigma_{xx}(x, y)$ будет всюду непрерывным, в том числе и в точке Релея. При $x \rightarrow 0$ это напряжение плавно примыкает к нулевому значению $\sigma_{xx}(0, y) = 0$, предписанному граничным условием (1.5).

Из сравнения графиков 1–5 вблизи $y = s_R$ следует, что о прохождении волны Релея через ту или иную точку на свободной грани клина выгоднее всего судить по разрывному (быстропеременному) распределению деформации $\epsilon_{yy}(0, y)$. В этом смысле столь же характерным оказывается и распределение скорости $V(0, y)$, которое не приводится, чтобы не загромождать фиг. 2. Представляется, что указанные особенности распределения характеристик волнового движения более доступны для экспериментального наблюдения по сравнению с другими волновыми эффектами.

Кривая б на фиг. 2 дает распределение деформации сдвига $\epsilon_{xy}(x, y)$ вдоль составного фронта ABC . Эта деформация отрицательная, но для удобства изображения график б расположен над осью Oy . Как уже отмечалось выше, в области 3 деформация $\epsilon_{xy}(x, y)$ интенсивно возрастает и достигает наибольших значений в той или иной точке наблюдения в момент прихода фронта ABC . В поперечных волнах 4, 5 происходит быстрое убывание деформации сдвига к нулю. Таким образом, кривая б дает распределение максимальных деформаций сдвига $\epsilon_{xy}(x, y)$ во всей области, охваченной движением. Видно, что деформация $\epsilon_{xy}(x, y)$ всюду конечная, что не противоречит условию упругого удара клина о преграду при достаточно малой скорости v_0 .

Аналогичные распределения деформации $\epsilon_{xy}(x, y)$ справедливы для других значений параметра γ . В акустическом клине максимальных (но конечных) значений величина $\epsilon_{xy}(x, y)$ достигает на свободной грани $x = 0$.

На фиг. 3 показаны распределения напряжения $\sigma_{xx}(x, 0)$ (кривая 1), напряжения $\sigma_{yy}(x, 0)$ (кривая 2) и скорости $U(x, 0)$ (кривая 3) на преграде $y = 0$. Особенностью этих распределений является непрерывность. При прохождении продольной волны 3 напряжение $\sigma_{xx}(x, 0)$ быстро убывает, причем в основной поперечной волне (при $x > -\gamma$) оно становится практически нулевым. Напряжение $\sigma_{yy}(x, 0)$ изменяется немонотонно и не столь сильно, так что давление клина на преграду в волнах 3 и 5 ослабевает мало.



Фиг. 4

Скорость $U(x, 0)$ быстро возрастает в продольной волне 3 (при $x < -\gamma$) и становится почти постоянной в основной поперечной волне 5.

Кривая 4 показывает распределение напряжения сдвига $\sigma_{xy}(x, s_R)$ при постоянном значении $y = s_R$. На графике видны резкие изгибы, положение которых в точности согласуется с моментами прихода соответствующих фронтов волн. Один из максимумов напряжения $\sigma_{xy}(x, s_R)$, соответствующий точке фронта BD при $y = s_R$, имеет вид заострения, но в принятом на фиг. 3 масштабе заостренный характер максимума изобразить не удастся. При приближении к свободной грани ($x \rightarrow 0$) напряжение $\sigma_{xy}(x, s_R)$ стремится к конечному ненулевому значению. Причем оно оказывается максимальным по сравнению с частными пределами напряжения $\sigma_{xy}(x, y)$ в точке Релея, получающимися при подходе к этой точке по другим направлениям. В то же время непосредственно на свободной грани $x = 0$ напряжение сдвига удовлетворяет граничному условию $\sigma_{xy}(0, y) = 0$. Получается, что удовлетворить этому граничному условию для упругого клина ($\gamma \neq 0$) можно только за счет разрывного характера распределения напряжения $\sigma_{xy}(x, y)$ и деформаций в точке Релея, поскольку напряжение $\sigma_{xx}(x, y)$ непрерывно примыкает к нулевому значению $\sigma_{xx}(0, y) = 0$, предписанному граничным условием (1.5).

На фиг. 4 даны зависимости скорости $U(0, 0)$ (кривая 1) и напряжения $\sigma_{yy}(0, 0)$ (кривая 2) в вершине клина от коэффициента Пуассона ν . Как и в предыдущих случаях, напряжение $\sigma_{yy}(0, 0)$ при всех ν отрицательное, но для удобства изображения кривая 2 показан над осью абсцисс. Одновременно кривые 1, 2 являются предельными распределениями скорости $U(x, y, t)/v_0$ и напряжения $\sigma_{yy}(x, y, t)/\sigma_0$ в произвольной точке клина (x, y) при $t \rightarrow \infty$. Расчеты показывают, что при $\gamma \rightarrow 0$ скорость $U(0, 0)$ стремится к бесконечности. При $\gamma < 0.1$ эту скорость можно вычислять по приближенной (занижающей) формуле $U(0, 0) \approx 0.128 - 0.566 \ln \nu$ с ошибкой, не превосходящей 10%.

5. Заключение. Получено и проанализировано аналитическое решение линейной задачи о распространении упругих волн в клине при ударе гранью о преграду. Решение позволяет проводить динамические расчеты, связанные с учетом распространения упругих волн в твердых телах.

Рассмотренная задача может быть применена в качестве тестового примера для разработки правильных и достоверных численных методов решения двумерных динамических задач теории упругости.

Решение может быть положено в основу теоретической оценки условий, при которых применима приближенная одномерная теория Сен-Венана соударения упругих стержней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Soboleff S.* Sur les vibrations d'un demiplan et d'une couche a conditions initiales arbitraires // Математич. сборник. 1933. Т. 40. № 2. С. 236–266.
2. *Малков М.А.* Двумерная задача об упругом соударении стержней // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 4. С. 782–785.
3. *Spillers W.R., Callegari A.* Impact of two elastic cylinders: short-time solution // Int. J. mech. sci. 1969. V. 11. P. 845–851.
4. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
5. *Веклич Н.А.* Удар полосы сжимаемой жидкости о преграду // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 138–145.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука. 1970. 568 с.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.04.2002