МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2005

УДК 539.3

© 2005 г. И.Ю. ЦВЕЛОДУБ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Рассматривается пространственная упругая область, содержащая неупругое включение. Формулируются и исследуются обратные задачи о нахождении внешних воздействий, обеспечивающих заданную текущую или остаточную (после упругой разгрузки) форму включения. Эти задачи обобщают рассмотренные автором ранее для неупругих однородных тел [1] и для плоских упругих областей с физически нелинейными включениями [2]. Исследуются вопросы корректности и построения приближенных решений. Рассмотрен случай включения с перемещениями его границы, являющимися линейными функциями координат ее точек, для которого получено замкнутое решение. Приведены некоторые примеры.

1. Постановка обратных задач. Рассмотрим упругую область v с неупругим включением v^*, внешними границами которых являются кусочно-гладкие поверхности S и S^* (S^* отделяет v от v^*). В области v имеем

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn}, \quad \sigma_{kl} = b_{klmn}\varepsilon_{mn} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где ε_{kl}, σ_{kl}, a_{klmn} и b_{klmn} – компоненты тензоров деформаций, напряжений, упругих податливостей и упругих модулей; последние обладают известными свойствами симметрии и связаны равенствами

$$a_{klmn}b_{klij} = (\delta_{mi}\delta_{nj} + \delta_{mj}\delta_{ni})/2 \quad (m, n, i, j = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

где δ_{kl} – компоненты единичного тензора. В (1.1), (1.2) и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. В выбранной системе координат $Ox_1x_2x_3$ точка $(0, 0, 0) \in v^*$.

Полные деформации области v^* складываются из упругих и необратимых ε_{kl}^{*N} [1]:

$$\varepsilon_{kl}^* = a_{klmn}^*\sigma_{mn}^* + \varepsilon_{kl}^{*N} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Деформации ε_{kl}^{*N}, являющиеся суммой пластических ε_{kl}^{*p} и деформаций ползучести ε_{kl}^{*c}, в любой момент времени $t > 0$ удовлетворяют условиям [1]:

$$\begin{gathered}
\int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}_{kl}^{*N}\Delta\sigma_{kl}^* dt \ge \lambda\int_0^t a_{klmn}^*\Delta\sigma_{kl}^*\Delta\sigma_{mn}^* dt \quad (\lambda = \lambda(t) > 0) \\
\int_0^t \Delta\dot{\varepsilon}_{kl}^{*N}\Delta\sigma_{kl}^* dt \ge \lambda_1\int_0^t b_{klmn}^*\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}^{*N}\Delta\dot{\varepsilon}_{mn}^{*N} dt \quad (\lambda_1 = \lambda_1(t) > 0) \\
\Delta\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^{*(1)}(t) - \sigma_{kl}^{*(2)}(t), \quad \Delta\varepsilon_{kl}^{*N} = \varepsilon_{kl}^{*N(1)}(t) - \varepsilon_{kl}^{*N(2)}(t)
\end{gathered} \tag{1.4}$$

$t = 0$: $\Delta\sigma^*_{kl} = 0, \quad \Delta\varepsilon^{*N}_{kl} = 0$

Для взаимно обратных тензоров с компонентами a^*_{klmn} и b^*_{klmn} выполняются равенства вида (1.2).

Рассматриваемые ниже обратные задачи обобщают исследованные в [1, 2] и связаны с нахождением воздействий, прикладываемых к внешней границе S области υ, которые деформируют включение υ^* в требуемую текущую или остаточную (после упругой разгрузки в момент снятия действующих на S внешних сил) форму, т.е. приводят к заданным текущим или остаточным перемещениям точек границы S^*.

Задача 1. Какие перемещения u_k необходимо сообщить поверхности S (или какие нагрузки p_k приложить к S), чтобы перемещения точек границы S^* включения υ^* принимали требуемые значения $u^*_k = u^*_k(x^*_l, t)$, $x^*_k \in S^*$ $(k, l = 1, 2, 3)$, $0 \le t \le t_*$? При $t < 0$ область $\upsilon^* \cup \upsilon$ находилась в недеформированном состоянии. На границе S^* поля нагрузок $p_k = \sigma_{kl} n^*_l$ (n^*_l – компоненты единичного вектора нормали к S^*) и перемещений u_k $(k = 1, 2, 3)$ непрерывны. Задача рассматривается в геометрически линейной постановке.

Заметим, что если функции $u^*_k = u^*_k(x^*_l, t)$, $x^*_k \in S^*$ являются линейными относительно x^*_k, то напряженно-деформированное состояние (НДС) в υ^* будет однородным, т.е. ε^*_{kl} и σ^*_{kl} из (1.3) не зависят от x_k $(k, l = 1, 2, 3)$. В этом случае задача 1 аналогична рассмотренной в [2] в плоской постановке.

Задача 2. Требуется определить внешние нагрузки $p_k = p_k(x_l, t)$, $x_k \in S$ (или перемещения $u_k = u_k(x_l, t)$, $x_k \in S$) такие, чтобы в любой момент t $(0 < t \le t_*)$ выполнялось условие: остаточные перемещения $\tilde{u}^*_k = f(t)\tilde{u}^*_{k*}(x^*_l)$, $x^*_k \in S^*$, где $\tilde{u}^*_{k*}$ $(k, l = 1, 2, 3)$ и $f(t)$ – заданные функции $(f(0) = 0, f(t_*) = 1)$. Под $\tilde{u}^*_k$ $(k = 1, 2, 3)$ понимаются те перемещения, которые остались бы на S^* после мгновенного снятия в момент t текущих внешних нагрузок $p_k(x_l, t)$, $x_k \in S$ и упругой разгрузки. Как и в задаче 1, считается, что при $t < 0$ вся область $\upsilon^* \cup \upsilon$ находилась в естественном состоянии и в любой момент t $(0 \le t \le t_*)$ нагрузки и перемещения на S^* непрерывны.

Задачу 2 можно свести к следующей: определить указанные выше воздействия на S, если на границе S^* области υ^* известны остаточные перемещения при нулевых нагрузках на S^*, т.е. перемещения после освобождения поверхности S^* от нагрузок, которые оставались там после снятия внешних нагрузок p_k на S. Действительно, для упругой области υ после разгрузки имеем: $p_k = 0$ на S и $u_k = \tilde{u}^*_k \equiv f(t)\tilde{u}^*_{k*}$ на S^*. Отсюда найдем σ_{kl} в υ и нагрузки $p^*_k = f(t)\,p^*_{k*}$ на S^*. Из решения упругой задачи для области υ^* определим НДС в υ^* и перемещения $u^{*e}_k = f(t)u^{*e}_{k*}$ на S^*. Следовательно, после снятия нагрузок p^*_k найдем $\tilde{u}^*_{k0} = f(t)(\tilde{u}^*_{k*} - \tilde{u}^{*e}_{k*})$ на S^*.

Перемещениям $\tilde{u}^*_k$ в υ^* соответствуют остаточные деформации $\tilde{\varepsilon}^*_{kl}$, причем

$$\tilde{\varepsilon}^*_{kl} = a^*_{klmn}\rho^*_{mn} + \varepsilon^{*N}_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.5}$$

где ρ^*_{kl} – остаточные напряжения, возникающие в υ^* после разгрузки. Напряжения σ^*_{kl} в любой момент $t \ge 0$ можно представить в виде [1]:

$$\sigma^*_{kl} = \sigma^{*e}_{kl} + \rho^*_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1.6}$$

где σ^{*e}_{kl} – компоненты напряжений, соответствующих решению чисто упругой задачи (т.е. при $\varepsilon^{*N}_{kl} = 0$ $(k, l = 1, 2, 3)$) с теми же нагрузками на S в тот же момент t.

2. Корректность обратных задач. Исследование проведем в два этапа: сначала докажем корректность задач определения НДС в v^* по известным перемещениям u_k^* или $\tilde{u}_k^*$ ($k = 1, 2, 3$) на S^*, а затем аналогичное утверждение для области v. Для этого воспользуемся некоторыми соображениями и оценками из [1]. Введем следующие обозначения:

$$I_1(x_{kl}) = \left(\int\limits_{v^*} \frac{1}{2} a^*_{klmn} x_{kl} x_{mn} dv\right)^{1/2}, \quad I_2(x_{kl}) = \left(\int\limits_{v^*} \frac{1}{2} b^*_{klmn} x_{kl} x_{mn} dv\right)^{1/2}$$

$$I_3(t) = \int\limits_{v^*}\int\limits_0^t \Delta\dot{\varepsilon}_{kl}^{*N} \Delta\sigma^*_{kl} dt dv, \quad I_4(t) = \left(\int\limits_0^t I_1^2(\Delta\sigma_{kl}^{*e}) dt\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^t \left\|\Delta \mathbf{u}^{*e}\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$

Пусть $\bar{\sigma}_{kl}^{*e}$ – поле напряжений, а $\bar{\varepsilon}_{kl}^{*e} = a^*_{klmn}\bar{\sigma}_{mn}^{*e}$ – поле деформаций, соответствующие решению упругой задачи при заданных на S^* перемещениях u_k^*. В качестве нормы для поля перемещений возьмем величину [1]: $\|\mathbf{u}^*\| = I_1(\bar{\sigma}_{kl}^{*e}) = I_2(\bar{\varepsilon}_{kl}^{*e})$, исключив при этом смещение области v^* как жесткого целого. Эта норма порождается скалярным произведением

$$(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*) = \int\limits_{v^*} \frac{1}{2} a^*_{klmn} \bar{\sigma}_{kl}^{*e(1)} \bar{\sigma}_{mn}^{*e(2)} dv = \int\limits_{v^*} \frac{1}{2} b^*_{klmn} \bar{\varepsilon}_{kl}^{*e(1)} \bar{\varepsilon}_{mn}^{*e(2)} dv$$

Если на S^* заданы перемещения $u_k^* \in H^{1/2}(S^*)$, то в области v^* решение упругой задачи $u_k^* \in H^1(v^*)$, а получаемое распределение внешних нагрузок $p_k^* \in H^{-1/2}(S^*)$. Указанным векторам перемещений $\mathbf{u}^*$ и нагрузок $\mathbf{p}^*$ на S^* можно поставить в соответствие нормы $\|\mathbf{u}^*\|$ (при отсутствии жестких смещений норма $\|\mathbf{u}^*\|$ эквивалентна $\|\mathbf{u}^*\|_{H^1(v^*)}$) и $\|\mathbf{p}^*\| = \|\mathbf{u}^{*e}\| \equiv I_1(\sigma_{kl}^{*e})$, где компоненты σ_{kl}^{*e} определены в (1.6). Поэтому величины $u_k^* \in H^{1/2}(S^*)$ и $p_k^* \in H^{-1/2}(S^*)$ можно рассматривать как элементы соответствующих гильбертовых пространств **U** и **P** [1].

Рассмотрим два набора внешних воздействий (силовых или кинематических) на S^*; разности соответствующих величин будем обозначать через Δ. Как показано в [1]:

$$I_1(\Delta\sigma^*_{kl}) \ge \left\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\right\| \tag{2.1}$$

Из (1.4) и (2.1) вытекает неравенство

$$I_3(t) \ge 2\lambda(t) I_4^2(t) \tag{2.2}$$

Кроме того, для нормы приращений остаточных перемещений $\Delta\tilde{u}_k^*$ в [1] получена следующая оценка сверху

$$\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^*(t)\| \le \lambda_1^{-1}(t)\sqrt{t} I_4(t) \tag{2.3}$$

В дальнейшем функции $\lambda > 0$ и $\lambda_1 > 0$ из (1.3) будем считать постоянными на рассматриваемом интервале времени $[0, t_*]$, для чего достаточно положить $\lambda = \min\limits_{0 \le t \le t_*} \lambda(t)$ и $\lambda_1 = \min\limits_{0 \le t \le t_*} \lambda_1(t)$.

Остановимся на задаче 1 и оценим $\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\|$ через $\|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|$. По аналогии с [1] из (1.3) будем иметь

$$[I_1^2(\Delta\sigma_{kl}^{*})]^{\cdot} + I_3 = 2(\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}, \Delta\mathbf{u}^{*e}) \le 2\|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|\,\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\|$$

откуда, интегрируя по времени от нуля до текущего момента t и учитывая неравенства (1.4) и (2.1), получим

$$\begin{aligned}&\|\Delta\mathbf{u}^{*e}(t)\|^2 \le 2F(t) \equiv 2\int_0^t \|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|\,\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\|dt + \|\Delta\mathbf{u}_0^{*e}\|^2\\ &\|\Delta\mathbf{u}_0^{*e}\| = \|\Delta\mathbf{u}^{*e}(0)\|\end{aligned} \tag{2.4}$$

Отсюда следует $\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\| = \dot{F}\|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|^{-1} \le \sqrt{2}F^{1/2}$, т.е. $F^{-1/2}\dot{F} \le \sqrt{2}\|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|$. Интегрируя последнее неравенство от нуля до t, найдем

$$\sqrt{2}F^{1/2}(t) \le \sqrt{2}F^{1/2}(0) + \int_0^t \|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|dt$$

и с учетом (2.4) будем иметь

$$\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\| \le \|\Delta\mathbf{u}_0^{*e}\| + \int_0^t \|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|dt \tag{2.5}$$

Если соответствующий упругому (или упругопластическому, если $\varepsilon_{kl0}^{*p} \ne 0$) решению при $t = 0$ вектор $\mathbf{u}_0^{*e} \in \mathbf{U}$ и $\dot{\mathbf{u}}(t) \in \mathbf{U}$, то из (2.5) следует, что $\|\dot{\mathbf{u}}^{*e}\| < \infty$, т.е. и вектор $\mathbf{u}^{*e}(t) \in \mathbf{U}$ $(0 \le t \le t_*)$. Если $\varepsilon_{kl0}^{*p} = 0$ $(k, l = 1, 2, 3)$, то $\mathbf{u}_0^{*e} = \mathbf{u}_0^{*}$, т.е. вектор $\mathbf{u}_0^{*e}$ на границе S^* задан. Если же $\varepsilon_{kl0}^{*p} \ne 0$, то используя для пластических деформаций неравенство вида (1.4), где $\Delta\varepsilon_{kl}^{*N} \equiv \Delta\varepsilon_{kl}^{*p}$, $t \equiv \tau$ (τ – параметр нагружения $(0 \le \tau \le 1)$) и $\lambda = 0$ [1], и проводя аналогичные вышеприведенным рассуждения, получим (2.4) и (2.5), где t следует заменить на τ и считать, что $\Delta\mathbf{u}^{*e} = \Delta\mathbf{u}^{*e}(\tau)$, причем $\Delta\mathbf{u}_0^{*e} = \Delta\mathbf{u}^{*e}(0) = 0$, откуда для нормы разности векторов начальных (т.е. в момент $t = 0$) упругих перемещений $\Delta\mathbf{u}_0^{*e}$, соответствующих значению параметра $\tau = 1$, получим

$$\|\Delta\mathbf{u}_0^{*e}\| \le \int_0^1 \|\Delta\dot{\mathbf{u}}^{*}\|d\tau \tag{2.6}$$

Поэтому, если заданный на S^* вектор $\dot{\mathbf{u}}^{*} = \dot{\mathbf{u}}^{*}(\tau) \in \mathbf{U}$ $(0 \le \tau \le 1)$, то и $\mathbf{u}_0^{*e} \in \mathbf{U}$. (Заметим, что если включение v^* подчиняется деформационной теории пластичности и $\Delta\varepsilon_{kl}^{*p}\,\Delta\sigma_{kl}^{*} \ge 0$, то, как показано в [3], $\|\Delta\mathbf{u}_0^{*e}\| \le \|\Delta\mathbf{u}_0^{*}\|$, поэтому $\mathbf{u}_0^{*e} \in \mathbf{U}$, если $\mathbf{u}_0^{*} \in \mathbf{U}$.)

Из (2.5) и (2.6) следует, что при указанных в задаче 1 условиях на S^* при $0 \le t \le t_*$ существует единственное решение для вектора $\mathbf{p}^* \in \mathbb{P}$, причем оператор $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*(\mathbf{u}^*)$

является непрерывным. Как видно из приведенного доказательства, это утверждение остается справедливым и при $\lambda = 0$.

Рассмотрим задачу 2 и выясним условия, при которых будет корректной обратная задача определения НДС в v^* по известным остаточным перемещениям $\tilde{u}_k^*$ на S^* ($k = 1, 2, 3$). С использованием соотношений (1.5) и (1.6) будем иметь равенство [1] $[I_1^2(\Delta\rho_{kl}^*)]^{\cdot} + I_3 = 2\,(\Delta\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^*, \Delta\mathbf{u}^{*e})$, интегрируя которое по времени от нуля до t, используя (2.2) и учитывая, что $\Delta\rho_{kl}^*\big|_{t=0} = 0$ (поскольку $\Delta\tilde{u}_k^*\big|_{t=0} = f(0)\Delta\tilde{u}_{k*}^* = 0$), получим

$$\lambda\left\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\right\|_1^2 \le (\Delta\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^*, \Delta\mathbf{u}^{*e})_1 \le \left\|\Delta\dot{\tilde{\mathbf{u}}}^*\right\|_1\left\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\right\|_1 \tag{2.7}$$

где введена норма $\|\mathbf{u}\|_1 = (\int_0^{t_*}\|\mathbf{u}\|^2\,dt)^{1/2}$, порожденная скалярным произведением $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_1 = \int_0^{t_*}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)dt$ $(0 \le t \le t_*)$. Векторы перемещений $\mathbf{u}^*(t) \in \mathbf{U}$ и нагрузок $\mathbf{p}^*(t) \in \mathbf{P}$ $(0 < t < t_*)$ на S^* можно рассматривать как элементы гильбертовых пространств $\mathbf{U} \times [0, t_*]$ и $\mathbf{P} \times [0, t_*]$ с нормами $\|\mathbf{u}^*\|_1$ и $\|\mathbf{u}^{*e}\|_1$ соответственно.

Поскольку $\Delta\tilde{\mathbf{u}}^* = f(t)\Delta\tilde{\mathbf{u}}_*^*$ на S^*, то из (2.3) и (2.7) найдем нижнюю и верхнюю оценки для $\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\|_1$ через $\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^*\|_1$:

$$\begin{gathered}\alpha_1\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^*\|_1 \le \left\|\Delta\mathbf{u}^{*e}\right\|_1 \le \alpha_2\|\Delta\tilde{\mathbf{u}}^*\|_1\\ \alpha_1 = \lambda_1\left(t_*\int_0^{t_*}f^2dt\right)^{-1/2}, \quad \alpha_2 = \lambda^{-1}\left(\int_0^{t_*}\dot{f}^2dt\Big/\int_0^{t_*}f^2dt\right)^{1/2}\end{gathered} \tag{2.8}$$

Второе неравенство (2.8) обеспечивает корректность рассматриваемой обратной задачи, т.е. если $\tilde{\mathbf{u}}^* \in \mathbf{U}_1 \equiv \mathbf{U} \times [0, t_*]$, то и $\mathbf{u}^{*e} \in \mathbf{U}_1$ (или $\mathbf{p}^* \in \mathbf{P} \times [0, t_*]$), причем решение единственно и оператор $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*(\tilde{\mathbf{u}}^*)$ непрерывен. В отличие от задачи 1 здесь существенно условие $\lambda > 0$.

Нахождение вектора $\mathbf{u}^{*e}$ на S^* по заданному вектору $\tilde{\mathbf{u}}^*$ на S^* можно свести к последовательности прямых задач. Для этого рассмотрим итерационный процесс, аналогичный применявшемуся в [1]:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{*e} = \mathbf{u}_n^{*e} - \varepsilon(\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n^* - \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^*) \quad \text{на} \quad S^* \tag{2.9}$$

где $\mathbf{u}_0^{*e}$ – произвольный элемент из $\mathbf{U}_1$. Из (2.8) следует, что $\|\tilde{\mathbf{u}}_0^*\|_1 \le \alpha_1^{-1}\|\mathbf{u}_0^{*e}\|_1$, т.е. $\tilde{\mathbf{u}}_0^* \in \mathbf{U}_1$. Отсюда видно, что при любом n элементы последовательности (2.9) будут принадлежать тому же пространству $\mathbf{U}_1$.

Из (2.7)–(2.9) будем иметь

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{u}_{m+1}^{*e} - \mathbf{u}_{n+1}^{*e}\right\|_1^2 = \left\|\mathbf{u}_m^{*e} - \mathbf{u}_n^{*e}\right\|_1^2 - 2\varepsilon(\mathbf{u}_m^{*e} - \mathbf{u}_n^{*e}, \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_m^* - \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n^*)_1 + \varepsilon^2\left\|\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_m^* - \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n^*\right\|_1^2 \le\\ \le \delta^2\left\|\mathbf{u}_m^{*e} - \mathbf{u}_n^{*e}\right\|_1^2, \quad \delta^2 = 1 - 2\varepsilon\lambda + \varepsilon^2\lambda^2\alpha_2^2\alpha_1^{-2}\end{gathered}$$

Отсюда вытекает, что последовательность (2.9) является фундаментальной, если $\delta < 1$, т.е. при $0 < \varepsilon\lambda < 2\alpha_1^2\alpha_2^{-2}$; максимальная скорость сходимости соответствует значению $\varepsilon\lambda = \alpha_1^2\alpha_2^{-2}$, при котором $\delta^2 = 1 - \alpha_1^2\alpha_2^{-2}$. Из полноты пространства $\mathbf{U}_1$ следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{u}_n^{*e} = \mathbf{u}^{*e} \in \mathbf{U}_1$ и ввиду (2.9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n^{*} = \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{*} \in \mathbf{U}_1$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n^{*}\, dt = \tilde{\mathbf{u}}_*(t)$, поскольку $\tilde{\mathbf{u}}_*(0) = 0$. Поэтому соотношения (2.9) могут быть использованы для построения приближенных решений указанной обратной задачи.

Проведенные рассуждения показывают, что для обоих рассмотренных выше случаев при соответствующих ограничениях задача определения НДС в υ^* поставлена корректно. Следовательно, на S^* будут однозначно определяться векторы перемещений $\mathbf{u}^*$ и нагрузок $\mathbf{p}^*$, которые при переходе через границу S^* в упругую область υ должны быть непрерывны. Поэтому для нахождения НДС в υ приходим к так называемой задаче $(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ [4], когда на части S^* границы области υ известны перемещения и нагрузки, а на другой ее части S условия не определены (они являются искомыми). Как показано в [4], она относится к классу условно корректных задач теории упругости и в случае изотропной упругой области υ сводится к задачам Коши для уравнения Лапласа, решения которых определяются единственным образом, но не являются устойчивыми относительно возмущений граничных условий на S^*. Однако если, например, заранее известны верхние границы модулей искомых величин, то можно строить устойчивые решения этих задач.

3. Некоторые примеры. Рассмотрим упоминавшийся выше случай задачи 1, когда перемещения точек границы включения являются линейными функциями координат $x_k^* \in S^*$. Тогда и перемещения в υ^* также будут линейны относительно $x_k^* \in \upsilon^*$, т.е. если считать, что $u_k^* = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ в точке $(0, 0, 0) \in \upsilon^*$, то

$$u_k^* = \alpha_{kl}^* x_l^*, \quad x_k^* \in \upsilon^*, \quad \alpha_{kl}^* = \alpha_{kl}^*(t) \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

Поэтому НДС в υ^* будет однородным, поскольку $2\varepsilon_{kl}^* = \alpha_{kl}^* + \alpha_{lk}^*$, т.е. компоненты ε_{kl}^*, а ввиду (1.3) и σ_{kl}^*, не зависят от x_k^*. Будем считать среду υ изотропной, т.е. величины a_{klmn} и b_{klmn} в (1.1) выражаются через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν.

Покажем, что эта задача, как и в плоской постановке [2], допускает замкнутое решение. Для этого воспользуемся результатами работы [5], где рассматривалось упругое пространство с физически нелинейным включением, подвергнутое на бесконечности действию внешних сил, которым в отсутствие включения соответствуют напряжения $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl}^\infty(\mathbf{r}, t)$ и перемещения $u_k^\infty = u_k^\infty(\mathbf{r}, t)$, и были получены следующие зависимости:

$$\begin{gathered}
u_k(\mathbf{r}, t) = u_k^\infty(\mathbf{r}, t) + F_k(\mathbf{r}, t) \\
F_k(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{\upsilon^*} \Phi_{pq}(\boldsymbol{\xi}, t) U_{kp,q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})\, d\upsilon(\boldsymbol{\xi}) \quad (k = 1, 2, 3) \\
\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 \le |\mathbf{r}| < \infty, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \upsilon^* \\
\Phi_{pq} = \sigma_{pq}^* - b_{pqmn}\varepsilon_{mn}^*, \quad 2\varepsilon_{mn}^* = u_{m,n}^* + u_{n,m}^*
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где U_{kp} – компоненты известного тензора Келвина–Сомильяны [6], индекс q после запятой означает производную по x_q, остальные величины определены выше (необходимо отметить, что в [5] знак перед интегралом в (3.2) ошибочно заменен на противоположный).

Как показано в [5], при заданных функциях $u_k^\infty = u_k^\infty(\mathbf{r}, t)$ (3.2) представляют собой нелинейные интегральные уравнения относительно $u_k = u_k(\mathbf{r}, t)$, $0 \le |\mathbf{r}| < \infty$, решение которых и соответствующие ему компоненты напряжений удовлетворяют указанным условиям непрерывности на S^* и уравнениям равновесия во всей области $v^* \cup v$.

Для рассматриваемой здесь задачи 1, когда согласно (3.1) заданы $u_k^* = u_k^*(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in v^*$, а Φ_{pq} из (3.2) не зависят от $\boldsymbol{\xi}$, из (3.2) можно найти искомые функции $u_k = u_k(\mathbf{r}_s, t)$, $\mathbf{r}_s \in S$. Действительно, из (3.2) следует

$$u_k^\infty(\mathbf{r}, t) = u_k^*(\mathbf{r}, t) - F_k(\mathbf{r}, t) \quad (k = 1, 2, 3), \quad \mathbf{r} \in v^* \tag{3.3}$$

Как известно [6], функции $u_k^\infty(\mathbf{r}, t)$ из (3.3) – аналитические в v^*, поэтому их можно продолжить в область v и за ее границу (в том случае, если v – конечна). Если v бесконечна и u_k^∞ из (3.3) – полиномы степени $n < \infty$ относительно x_l $(k, l = 1, 2, 3)$, то поле тензора напряжений на бесконечности будет полиномом степени $n - 1$. В частности, для эллипсоидального включения $n = 1$, т.е. при $|\mathbf{r}| \to \infty$ напряжения σ_{kl}^∞ конечны [5].

При известных функциях $u_k^\infty = u_k^\infty(\mathbf{r}, t)$, $0 \le |\mathbf{r}| < \infty$ из (3.2) найдем $u_k = u_k(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in v$, а следовательно и $u_k = u_k(\mathbf{r}_s, t)$, $p_k = p_k(\mathbf{r}_s, t)$ $(k = 1, 2, 3)$, $\mathbf{r}_s \in S$.

Из этих рассуждений следует, что НДС в v определяется только геометрией включения v^*, его НДС и упругими постоянными E и ν области v. Нагрузки p_k и перемещения u_k на границе S определяются ее формой и уже найденным НДС в v.

Рассмотрим случай эллипсоидального физически нелинейного включения (ЭФНВ) с полуосями a_k $(k = 1, 2, 3)$, для которого функции F_k из (3.2) являются линейными относительно $\mathbf{r}$ [5, 6]. Тогда вследствие (3.1) и (3.3) u_k^∞ – также линейны, а напряжения σ_{kl}^∞ конечны при $|\mathbf{r}| \to \infty$. Используя соотношения (1.1), (1.3), (3.1), (3.2) и сопоставляя классические результаты Дж. Эшелби [6] с полученными для ЭФНВ в работе [5], будем иметь следующие связи между НДС в v^* и на бесконечности и тензорами вращений с компонентами $\omega_{kl}^* = (u_{k,l}^* - u_{l,k}^*)/2$ и $\omega_{kl}^\infty = (u_{k,l}^\infty - u_{l,k}^*)/2$:

$$u_k^\infty = (\varepsilon_{kl}^\infty + \omega_{kl}^\infty)x_l, \quad \varepsilon_{kl}^\infty = \varepsilon_{kl}^* + S_{klmn}(\bar{\varepsilon}_{mn}^* - \varepsilon_{mn}^*), \quad \varepsilon_{kl}^\infty = a_{klmn}\sigma_{mn}^\infty$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl}^* = a_{klmn}\sigma_{mn}^*, \quad \omega_{kl}^\infty = \omega_{kl}^* + \Pi_{klmn}(\varepsilon_{mn}^* - \bar{\varepsilon}_{mn}^*), \quad 2\varepsilon_{kl}^* = \alpha_{kl}^* + \alpha_{lk}^*$$

$$2\omega_{kl}^* = \alpha_{kl}^* - \alpha_{lk}^*, \quad 2S_{klmn} = -b_{pqmn}\int_{v^*}[U_{kp,ql}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) + U_{lp,qk}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})]dv(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.4}$$

$$2\Pi_{klmn} = b_{pqmn}\int_{v^*}[U_{kp,ql}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) - U_{lp,qk}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})]dv(\boldsymbol{\xi})$$

$$(k, l, m, n = 1, 2, 3) \quad \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi} \in v^*$$

Компоненты тензоров $\mathbf{S}$ и $\mathbf{\Pi}$ из (3.4) не зависят от r и имеют вид [6]:

$$S_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = Qa_\alpha^2 I_{\alpha\alpha} + RI_\alpha, \quad S_{\alpha\alpha\beta\beta} = Qa_\alpha^2 I_{\alpha\beta} - RI_\alpha$$

$$2S_{\alpha\beta\alpha\beta} = 2S_{\alpha\beta\beta\alpha} = Q(a_\alpha^2 + a_\beta^2)I_{\alpha\beta} + R(I_\alpha + I_\beta)$$

$$\Pi_{\alpha\beta\alpha\beta} = -\Pi_{\alpha\beta\beta\alpha} = (I_\beta - I_\alpha)/(8\pi), \quad Q = 3/[8\pi(1-\nu)], \quad R = (1-2\nu)/[8\pi(1-\nu)] \tag{3.5}$$

$$I_\alpha = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_\alpha^2 + u)\Delta}, \quad I_{\alpha\alpha} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_\alpha^2 + u)^2 \Delta}$$

$$3I_{\alpha\beta} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_\alpha^2 + u)(a_\beta^2 + u)\Delta}, \quad \Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$; $\alpha \neq \beta$; суммирования по α и β нет, остальные компоненты указанных тензоров равны нулю.

Величины I_α, $I_{\alpha\alpha}$ и $I_{\alpha\beta}$ из (3.5) выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода, а в случаях сплющенного ($a_1 = a_2 > a_3$) и вытянутого ($a_1 > a_2 = a_3$) сфероидов являются элементарными функциями a_1, a_2 и a_3. Явные выражения последних приведены в [6].

Отметим также, что при $a_3 \to \infty$, когда ЭФНВ вырождается в эллиптический цилиндр, зависимости (3.4) совпадают с полученными ранее [2, 7] для плоской деформации.

В качестве примеров использования соотношений (3.4) и (3.5) можно указать задачи, подобные сформулированным в [8] для плоскости с эллиптическим включением, определяющие уравнения которого имеют вид (1.3), где ε_{kl}^{*N} совпадают с деформациями ползучести ε_{kl}^{*c}, скорости которых определяются известными уравнениями Ю.Н. Работнова [9]:

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon_{kl}^{*c} &= B_1 s^n (1-\omega)^{-m} \partial s/\partial \sigma_{kl}^* \quad (k, l = 1, 2, 3) \\ \dot\omega &= B_2 s^p (1-\omega)^{-m} \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $s = s(\sigma_{kl}^*) > 0$ – однородная первой степени выпуклая функция, ω ($0 \le \omega \le 1$) – параметр поврежденности, равный нулю в недеформированном состоянии и единице – в момент разрушения; B_1, B_2, m, n, p – положительные постоянные.

Эти задачи связаны с подбором внешних воздействий на S, обеспечивающих на S^* линейные относительно координат $x_k^* \in S^*$ ($k = 1, 2, 3$) перемещения, т.е. однородное НДС в v^*, приводящее к оптимальным путям деформирования и разрушения ЭФНВ в условиях ползучести. Их формулировки и соответствующие решения совершенно аналогичны указанным в [8], поэтому здесь не приводятся.

Примерами рассмотренных выше задач 1 и 2 может служить плоскость, содержащая нелинейное эллиптическое включение, перемещения u_k^* или остаточные перемещения $\tilde u_k^*$ на границе которого линейны по координатам, так что поля текущих или остаточных деформаций и напряжений в нем однородны. Требуется определить напряжения $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl}^\infty(t)$ на бесконечности, которые обеспечивают соответствующее состояние во включении. Для этого воспользуемся установленными в [2, 7] связями вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}^* &= \alpha_{klmn}\sigma_{mn}^* + \beta_{klmn}\sigma_{mn}^\infty \quad (k, l = 1, 2) \\ \varepsilon^* &= \varepsilon^\infty + A(\sigma_{12}^* - \sigma_{12}^\infty) \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\varepsilon^* = \omega_{21}^*$ и $\varepsilon^\infty = \omega_{21}^\infty$ – величины вращений; α_{klmn}, β_{klmn} и A выражаются через постоянные E и ν плоскости и отношение полуосей границы включения (суммирование по m и n в (3.7) от 1 до 2).

Соотношения (3.7) совместно с (1.3), где ε_{kl}^{*N} связаны с σ_{kl}^* соответствующими определяющими соотношениями (например, вида (3.6), если $\varepsilon_{kl}^{*p} = 0$), представляют собой замкнутую систему уравнений для нахождения по известным функциям $\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl}^*(t)$ и $\varepsilon^* = \varepsilon^*(t)$ (которые согласно (3.4) выражаются через величины α_{kl}^* из (3.1) при $k, l = 1, 2$) напряжений $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$, $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl}^\infty(t)$ и вращения $\varepsilon^\infty = \varepsilon^\infty(t)$ (и наоборот, по заданным функциям $\sigma_{kl}^\infty = \sigma_{kl}^\infty(t)$ и $\varepsilon^\infty = \varepsilon^\infty(t)$ находятся $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$, $\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl}^*(t)$ и $\varepsilon^* = \varepsilon^*(t)$).

Если известны остаточные деформации $\tilde\varepsilon_{kl}^* = \tilde\varepsilon_{kl}^*(t)$ и вращение $\tilde\varepsilon^* = \tilde\varepsilon^*(t)$, которые определяются через $\tilde u_k^*$ на границе, то вместо (3.7) будем иметь $\tilde\varepsilon_{kl}^* = \alpha_{klmn}\rho_{mn}^*$ $(k, l = 1, 2)$, $\tilde\varepsilon^* = \tilde\varepsilon^\infty + A(\rho_{12}^* - \rho_{12}^\infty)$, что совместно с (1.5) и (1.3) дает необходимые соотношения для определения остаточных $\rho_{kl}^* = \rho_{kl}^*(t)$ и текущих $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$ напряжений, а следовательно, и деформаций $\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl}^*(t)$ во включении, сводя задачу к предыдущей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00643, 05-01-000673) и Совета по грантам Президента РФ (НШ-319.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цвелодуб И.Ю.* Обратные задачи неупругого деформирования // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 81–92.
2. *Цвелодуб И.Ю.* Об одной обратной задаче для упругой среды, содержащей физически нелинейное включение // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 424–430.
3. *Цвелодуб И.Ю.*Обратная упругопластическая задача // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 35–43.
4. *Шваб А.А.* Некорректные статические задачи теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 98–106.
5. *Вакуленко А.А., Севостьянов И.Б.* Включение с нелинейными свойствами в упругой среде // Исследования по механике строительных конструкций. Л.: ЛИСИ, 1991. С. 8–16.
6. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
7. *Цвелодуб И.Ю.* Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде (плоская задача) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 5. С. 72–84.
8. *Цвелодуб И.Ю.* Некоторые обратные задачи для вязкоупругой среды с физически нелинейным включением // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 983–994.
9. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
21.02.2005