МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2005

УДК 539.3

© 2005 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ, В.В. КЛИНДУХОВ

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Рассматривается осесимметричная контактная задача для полупространства, модули упругости которого экспоненциальным образом растут с глубиной. Предварительно решена осесимметричная задача о равновесии такого полупространства под действием распределенной нормальной нагрузки. На основании этого решения контактная задача сведена к интегральному уравнению относительно контактного давления. Для приближенного решения этого уравнения использовался модифицированный метод ортогональных многочленов [1]. Приведены численные результаты.

1. Задача о равновесии неоднородного полупространства и постановка контактной задачи. Пусть механические характеристики в упругом полупространстве ($0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $z > 0$) изменяются с глубиной по следующему закону:

$$\lambda = \lambda_0 e^{\kappa z}, \quad \mu = \mu_0 e^{\kappa z} \tag{1.1}$$

Поверхность полупространства нагружена в области $r \le a$ осесимметричным распределенным давлением $q(r)$ так, что граничные условия на поверхности $z = 0$ полупространства имеют вид

$$\begin{gathered}\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0, \quad \sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\vartheta = -\tilde{q}(r) \\ \vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tilde{q}(r) = q(r) \ \ (r \le a), \quad \tilde{q}(r) = 0 \ \ (r > a)\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь τ_{rz} и σ_z – касательное и нормальное напряжение, а u и w – перемещения соответственно по осям r и z. На бесконечности ($r \to \infty$, $z \to \infty$) перемещения в полупространстве отсутствуют.

Нетрудно показать, что задача сводится к решению следующей системы уравнений Ламе:

$$\begin{gathered}\tilde{\nabla}^2 u + k_0\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \kappa\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0 \\ \nabla^2 w + k_0\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \kappa\left[2\frac{\partial w}{\partial z} + (k_0 - 1)\vartheta\right] = 0 \\ \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \tilde{\nabla}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{r^2}, \quad k_0 = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0}\end{gathered} \tag{1.3}$$

Общее решение уравнений (1.3) представимо в виде [2]:

$$u = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\kappa}{k_0}\right)\chi, \quad w = \left[\left(1 + \frac{1}{k_0}\right)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right]\chi \tag{1.4}$$

где функция χ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{(k_0+1)}{k_0}\nabla^4\chi+\frac{\kappa}{k_0}\left[\kappa(1-k_0)+2(1+k_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]\nabla^2\chi+2\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi = 0 \tag{1.5}$$

Итак необходимо решить в полупространстве $z > 0$ задачу (1.2), (1.4), (1.5). Будем искать функцию χ в виде интеграла Ханкеля

$$\chi(r,z) = \int_0^\infty X(\alpha,z)\alpha J_0(\alpha r)d\alpha \tag{1.6}$$

Здесь и далее $J_n(x)$ – функции Бесселя. Подставляя (1.6) в уравнение (1.5) и решая получаемое для трансформанты $X(\alpha, z)$ обыкновенное дифференциальное уравнение, с учетом обращения в нуль перемещений при $z \to \infty$ найдем

$$X(\alpha,z) = e^{-\kappa z/2}[C_1(\alpha)e^{-a_\alpha z}\sin b_\alpha z + C_2(\alpha)e^{-a_\alpha z}\cos b_\alpha z]$$

$$a_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}+c}, \quad b_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2+d^2}-c} \tag{1.7}$$

$$c = \kappa^2+4\alpha^2, \quad d = 4l\kappa\alpha, \quad l = (k_0-1)^{1/2}(k_0+1)^{-1/2}$$

Далее представим разрывную функцию $\tilde{q}(r)$ вида (1.2) в форме интеграла Ханкеля

$$\tilde{q}(r) = \int_0^\infty Q(\alpha)\alpha J_0(\alpha, r)d\alpha \tag{1.8}$$

и из записанных в трансформантах Ханкеля граничных условий (1.2) найдем $C_1(\alpha)$ и $C_2(\alpha)$. В итоге для нормального перемещения границы полупространства получим выражение

$$w(r,0) = \frac{1}{\theta_0}\int_0^\infty Q(\alpha)L\left(\frac{\alpha}{\kappa},k_0\right)J_0(\alpha r)d\alpha, \quad \theta_0 = \frac{2k_0\mu_0}{k_0+1} \tag{1.9}$$

$$L(u,k_0) = P(u,k_0)/Q(u,k_0) \tag{1.10}$$

$$P(u,k_0) = 2uk_0[\sqrt{2}A(k_0-1)+4Bk_0u^2(k_0+1)+2B(k_0-1)+$$
$$+4\sqrt{2}u^2(k_0^2-1)+\sqrt{2}(k_0-1)]$$

$$Q(u,k_0) = (k_0+1)[4\sqrt{2}Ak_0^2u^2+\sqrt{2}A(k_0^2-1)+$$
$$+AB(k_0^2-1)+4Bu^2(3k_0^2-2k_0+1)+B(k_0^2-1)+$$
$$+16\sqrt{2}u^2k_0(k_0-1)+4\sqrt{2}u^2+\sqrt{2}(k_0^2-1)]$$

$$A = \sqrt{16u^4+8u^2(3k_0-1)(k_0+1)^{-1}+1}, \quad B = \sqrt{A+1+4u^2}$$

Для контактной задачи одно из граничных условий (1.2), а именно условие

$$\sigma_z(r,0) = q(r) \quad (r \le a) \tag{1.11}$$

заменяется условием контакта штампа с поверхностью полупространства, которое имеет вид

$$w(r,0) = \delta - f(r) \quad (r \le a) \tag{1.12}$$

Здесь δ – поступательное по оси z перемещение штампа под действием приложенной к нему вдавливающей силы P; $f(r)$ – функция, описывающая форму основания штампа.

Приравнивая выражение (1.9) выражению (1.12) при $r \le a$ и подставляя в (1.9) трансформанту

$$Q(\alpha) = \int_0^a q(\rho)\rho J_0(\alpha\rho)d\rho \tag{1.13}$$

придем к следующему интегральному уравнению первого рода с симметричным ядром:

$$\begin{gathered}\int_0^a q(\rho)K(\kappa\rho,\kappa r)\rho d\rho = \frac{\theta_0}{\kappa}[\delta - f(r)] \quad (r \le a)\\ K(\sigma,\tau) = \int_0^\infty L(u,k_0)J_0(\sigma u)J_0(\tau u)du\end{gathered} \tag{1.14}$$

для определения неизвестного контактного давления $q(r)$.

К уравнению (1.14) нужно добавить очевидное условие равновесия штампа

$$P = 2\pi\int_0^a q(\rho)\rho d\rho \tag{1.15}$$

служащее для определения связи между P и δ, а в тех случаях, когда размер области контакта не фиксируется углами штампа, необходимо для определения радиуса a области контакта еще использовать условие

$$q(a) = 0 \tag{1.16}$$

2. Метод решения и численные результаты. Заметим, что для функции $L(u, k_0)$, определяемой формулами (1.10), имеют место следующие асимптотические равенства:

$$\begin{gathered}L(u,k_0) = 1 + O(u^{-1}) \quad (u \to \infty)\\ L(u,k_0) = 2k_0(k_0+1)^{-2}u + O(u^3) \quad (u \to 0)\end{gathered} \tag{2.1}$$

На основании первого равенства (2.1) можно установить, что ядро $K(\sigma, \tau)$ интегрального уравнения (1.14) имеет логарифмическую особенность при $\sigma \to \tau$. Используя это обстоятельство, уравнение первого рода (1.14) можно свести [3, 4] к следующему интегральному уравнению второго рода с разностным ядром:

$$\begin{gathered}p(x) - \frac{\kappa}{\pi}\int_{-a}^a p(\xi)M[\kappa(\xi - x)]d\xi = \theta_0 g(x) \quad (|x| \le a)\\ M(y) = \int_{-a}^a [1 - L(u,k_0)]\cos uy du\end{gathered} \tag{2.2}$$

причем функции $p(x)$ и $g(x)$ – четные и связаны с функциями $q(r)$ и $\delta(r) = \delta - f(r)$ соотношениями

$$q(r) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{p(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{p'(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\right], \quad g(x) = \delta(0) + |x|\int_0^{|x|} \frac{\delta'(\rho)d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \tag{2.3}$$

Вновь на основании первого равенства (2.1) можно убедиться, что ядро $M(y)$ интегрального уравнения (2.2) имеет логарифмическую особенность при $y = 0$. Тем не менее уравнение (2.2) является уравнением Фредгольма и, если $g(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $|x| \le a$, то функция $p(x)$ непрерывна, а ее производная может иметь логарифмические особенности в точках $x = \pm a$.

Будем искать решение интегрального уравнения (2.2) в виде ряда по четным полиномам Лежандра, а именно

$$p(x) = \theta_0 a \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_{2i}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), умножая почленно на $P_{2k}(x/a)dx$ и интегрируя затем от $-a$ до a, с учетом ортогональности полиномов Лежандра получим [1] бесконечную алгебраическую систему для определения неизвестных коэффициентов a_i в разложении (2.4):

$$\frac{2}{4k+1}a_k - \frac{1}{\pi\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} a_i I_{ik}(\lambda) = b_k \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

$$I_{ik}(\lambda) = 2\pi\lambda(-1)^{i+k}\int_0^{\infty}[1 - L(u, k_0)]J_{2i+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)J_{2k+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\frac{du}{u} \tag{2.5}$$

$$b_k = \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a} g(x)P_{2k}\left(\frac{x}{a}\right)dx, \quad \lambda = \frac{1}{\kappa a}$$

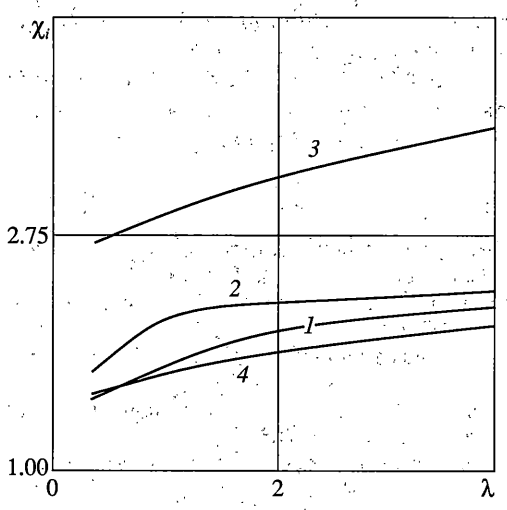
Можно показать, что система (2.5) квазирегулярна при всех значениях безразмерного параметра $\lambda \in (0, \infty)$ и поэтому может решаться методом редукции [5]. Чем больше параметр λ, тем более нужно редуцировать алгебраическую систему (2.5).

Подставляя (2.4) в первую формулу (2.3), найдем для функции $q(r)$ следующее выражение [1]:

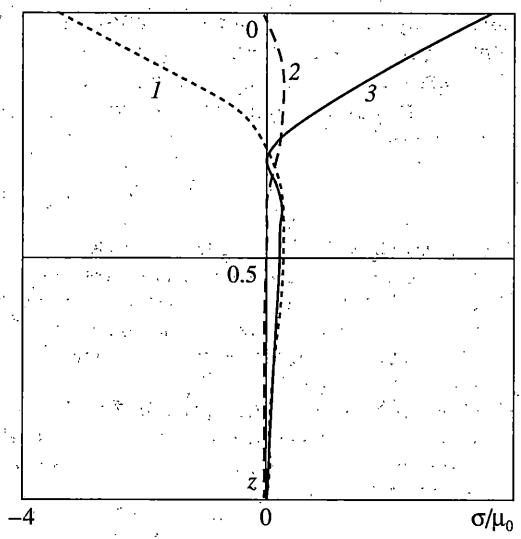
$$q(r) = \frac{2\theta_0 a}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty} a_i\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{i-1}(-1)^{i-m-1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(4i-4m-1)(2i-2m-2)!!}{(2i-2m-1)!!}P_{2i-2m-1}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)\right\} \tag{2.6}$$

позволяющее получить приближенное выражение для контактного давления, лишь только найдено приближенное решение системы (2.5). Условие (1.15) в силу (2.6) и ортогональности полиномов Лежандра примет вид

$$P = 4\theta_0 a^2 a_0 \tag{2.7}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

а условие (1.16), как видно из (2.6), представимо в форме

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0 \tag{2.8}$$

Вычисления по изложенной схеме проведены для случая параболического штампа ($\delta(r) = \delta - r^2/(2R)$, R – радиус кривизна параболы в вершине, радиус a области контакта заранее неизвестен) при $\lambda \in (1/4, 4)$ и $k_0 = 2$. На фиг. 1 представлены графики изменения в зависимости от λ следующих величин (кривые *1–4*):

$$\chi_1 = \frac{2Rq(0)}{\theta_0 a}, \quad \chi_2 = \frac{2R}{\theta_0}\lim_{r\to a}\frac{q(r)}{\sqrt{a^2-r^2}}$$
$$\chi_3 = \frac{P}{\theta_0 \delta a}, \quad \chi_4 = \frac{2RP}{\theta_0 a^3} \tag{2.9}$$

Кроме того при найденном контактном давлении $q(r)$ проведен расчет нормальных напряжений в полупространстве на оси z.

Очевидно $\tau_{rz} = 0$ на оси z, поэтому нормальные напряжения σ_r, σ_φ и σ_z на оси z являются главными, к тому же показано, что $\sigma_r = \sigma_\varphi$ на оси z. Тогда эффективное напряжение

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2} \tag{2.10}$$

будет иметь вид

$$\sigma_e = |\sigma_r - \sigma_z| \tag{2.11}$$

На фиг. 2 приведены графики изменения по оси z напряжений σ_z/μ_0 (кривая *1*), σ_r/μ_0 (кривая *2*), σ_e/μ_0 (кривая *3*) для параметров $\lambda = 1/4$, $k_0 = 2$. Заметим, что эффективное напряжение достигает своего максимума на поверхности полупространства в отли-

чие от случая однородного полупространства, где в аналогичной контактной задаче эффективное напряжение достигает максимума на некоторой глубине.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00346), РФФИ и администрации Краснодарского края (грант 03-01-96551), Минобразования (грант УР.04.03.060).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Клиндухов В.В.* Контактные задачи для двухслойного упругого основания с неидеальной механической связью между слоями // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 84–92.
2. *Попов Г.Я.* К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1959. № 11–12. С. 11–19.
3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
5. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 696 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.10.2003