

УДК 531.38

© 2005 г. В.А. СВЕТЛИЦКИЙ

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ДВУМЯ КОМПОНЕНТАМИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрен частный случай общей задачи об оптимальном по быстродействию управлении линейной механической системы с конечным числом степеней свободы, когда за минимальное время надо обратить в нуль две (любые) компоненты n -мерного вектора состояния системы. Изложен алгоритм численного решения задачи об оптимальном по быстродействию управлении двумя компонентами вектора состояния линейной механической системы для общего случая, когда коэффициенты системы управления движением объекта зависят от времени, а управляющие функции заданы областями с границами, изменяющимися во времени.

1. Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы с переменными параметрами, возмущенное состояние которой описывается линейным векторным уравнением

$$\dot{Y} + A(t)Y = D(t)U \quad (1.1)$$

где $Y = (Z_1, Z_2)^T$ – вектор состояния системы, компонентами которого являются первые производные обобщенных координат (вектор Z_1) и обобщенные координаты (вектор Z_2); U – m -мерный вектор ($m < n$), компонентами которого являются управляющие функции (силы, моменты); $A(t)$, $D(t)$ – матрицы размерности $(2n \times 2n)$ и $(2n \times m)$.

Компоненты u_j вектора U независимы и удовлетворяют условиям

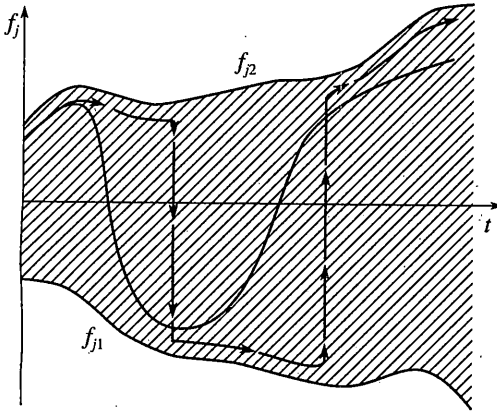
$$u_{j1}(t) \leq u_j(t) \leq u_{j2}(t) \quad (1.2)$$

т.е. являются функциями, ограниченными по модулю.

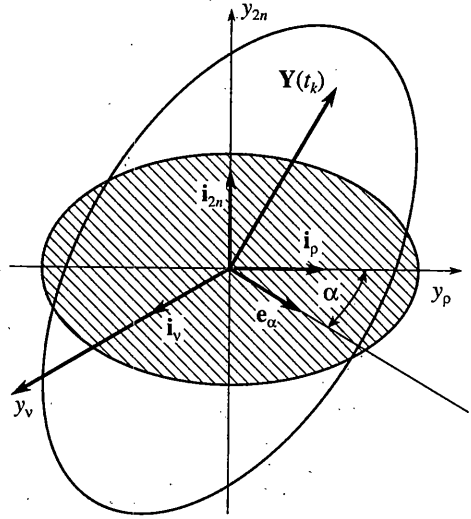
В начальный момент времени ($t = 0$) состояние системы считается известным ($Y(0) = Y_0$). Под начальным моментом понимается момент включения системы управления. Требуется определить законы изменения функций $u_j(t)$, при которых за минимальное время две компоненты (y_v, y_p) вектора Y обратятся в нуль. Имеется в виду мгновенное обращение двух компонент вектора состояния в нуль, что необходимо, например, при включении системы автономного управления. Это частный случай общей задачи оптимального по быстродействию управления [1].

2. Предварительно рассмотрим задачу, которая не имеет прямого отношения (по формулировке) к задаче оптимального по быстродействию управления. Эта задача связана с определением областей возможных значений вектора состояния линейной системы (в фиксированный момент времени), находящейся под действием случайных возмущений, ограниченных по модулю [2]. Для случайных функций, ограниченных по модулю, введем обозначения $f_j(t)$: Они удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (1.2):

$$f_{j1}(t) \leq f_j(t) \leq f_{j2}(t) \quad (2.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Их изменение во времени внутри областей возможных значений может быть любым, в том числе и разрывным.

На фиг. 1 возможное изменение функции $f_j(t)$ во времени показано штриховой линией. Рассмотрим уравнение (1.1), правая часть которого зависит от вектора

$$\begin{aligned} \dot{Y} + A(t)Y &= D(t)f(t) \\ f(t) &= (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \end{aligned} \tag{2.2}$$

Каждой реализации функций $f_j(t)$ на интервале времени $0 \leq t \leq t_k$ соответствует вектор $Y(t_k)$. Время t_k ограничено, значения функций $f_j(t)$ ограничены, поэтому и компоненты вектора $Y(t_k)$ ограничены. Бесконечному множеству реализаций $f_j(t)$ соответствует бесконечное множество векторов $Y(t_k)$, которые находятся в ограниченной области $2n$ -мерного фазового пространства (фиг. 2). Точки границы этой области можно установить, определяя максимальное значение проекции вектора $Y(t_k)$ на направление единичного вектора e_α (фиг. 3):

$$J = \max Y_{n\alpha} = \max(Y(t_k) \cdot e_\alpha) \tag{2.3}$$

Для каждого e_α из (2.3) определяются законы изменения $f_j^{(\alpha)}(t)$, которые сообщают функционалу J максимальное значение [2].

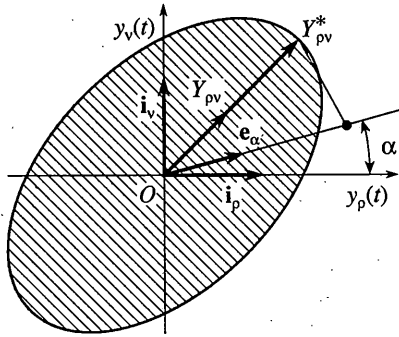
Рассмотрим более подробно частный случай этой задачи, когда требуется определить проекции $2n$ -мерной области на двумерные фазовые плоскости, например, на фазовую плоскость (y_p, y_v) фиг. 3.

Заштрихованная область есть область возможных значений компонент $y_p(t_k), y_v(t_k)$ вектора $Y(t_k)$.

Решение уравнения (2.2) при нулевых начальных данных имеет вид

$$Y = \int_0^{t_k} G(t_k, \tau) D(\tau) f(\tau) d\tau \tag{2.4}$$

где $G(t_k, \tau)$ – матрица Грина.



Фиг. 3

Компоненты вектора Y равны

$$y_j(t_k) = \int_0^{t_k} \sum_{i=1}^m b_{ji}(t_k, \tau) f_i(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

где b_{ji} – элементы матрицы $B = GD(2n \times m)$. Поэтому проекция вектора $Y(t_k)$ на направление единичного вектора e_α , лежащего в плоскости y_p, y_v равна

$$J = (Y \cdot e_\alpha) = y_p \cos \alpha + y_v \sin \alpha \quad (2.6)$$

$$(e_\alpha = \cos \alpha i_p + \sin \alpha i_v)$$

или

$$J = \int_0^{t_k} \sum_{i=1}^m b_{pi} f_i \cos \alpha d\tau + \int_0^{t_k} \sum_{i=1}^m b_{vi} f_i \sin \alpha d\tau = \quad (2.7)$$

$$= \int_0^{t_k} \sum_{i=1}^m (b_{pi} \cos \alpha + b_{vi} \sin \alpha) f_i d\tau$$

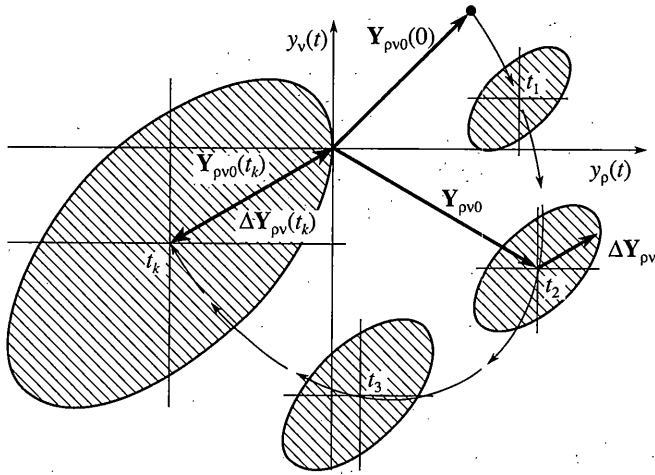
Максимальному значению функционала J (2.7) соответствует точка границы двумерной области для данного α . Максимальное значение функционала J достигается при следующем изменении функций $f_i(\tau) = f_{i\alpha}^*(\tau)$:

$$f_{i\alpha}^*(\tau) = \begin{cases} f_i = f_{i2} & \text{при } (b_{pi} \cos \alpha + b_{vi} \sin \alpha) > 0 \\ f_i = f_{i1} & \text{при } (b_{pi} \cos \alpha + b_{vi} \sin \alpha) < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Условия (2.8) позволяют определить моменты разрыва $\tau_i^{(\gamma)}$ функций $f_{i\alpha}$, т.е. определить экстремальные законы изменения $f_{i\alpha}^*(\tau)$ для каждого дискретного значения угла α . Поэтому $f_{i\alpha}^*$ сообщают вектору $Y_{\rho v}$ максимальное значение (фиг. 3) за минимальное время.

Определив $f_{i\alpha}^*$ (2.8), находим Y_α :

$$Y_\alpha = \int_0^{t_k} C D f^* a \tau; \quad f^* = (f_{1\alpha}^*, f_{2\alpha}^*, \dots, f_{m\alpha}^*)^T \quad (2.9)$$



Фиг. 4

и компоненты $y_{p\alpha}^*(t_k)$, $y_{v\alpha}^*(t_k)$ вектора $Y_{\rho v}^*$ соответствующие точке границы двумерной области. Изменяя α от 0° до 360° , получаем границу двумерной области (фиг. 3). Для каждого фиксированного момента времени получаем максимально возможную область значений $y_p(t_k)$, $y_v(t_k)$, т.е. максимальные значения модуля вектора $Y_{\rho v}(t_k)$ для любого α ограничены при всех возможных законах изменения $f_j(t)$, удовлетворяющих условиям (2.1). Если законы изменения $f_j(t)$ для данного α будут отличаться от f_j^* , то модуль вектора $Y_{\rho v}$ будет меньше модуля вектора $Y_{\rho v}^*$ и чтобы модуль вектора $Y_{\rho v}$ достиг значения модуля вектора $Y_{\rho v}^*$ потребуется больше времени.

Каждой точке границы области соответствует максимально возможный вектор $Y_{\rho v}^*$ (фиг. 3) и функции $f_{i\alpha}^*$ (2.8) с известными моментами разрыва $\tau_i^{(\gamma)}$.

3. Вернемся к основной задаче оптимального по быстродействию управления (уравнение 1.1), в первой части которого вместо вектора f вектор управляющих функций U . При $t = 0$ вектор $Y(0)$ равен Y_0 , поэтому решение уравнения (1.1) имеет вид

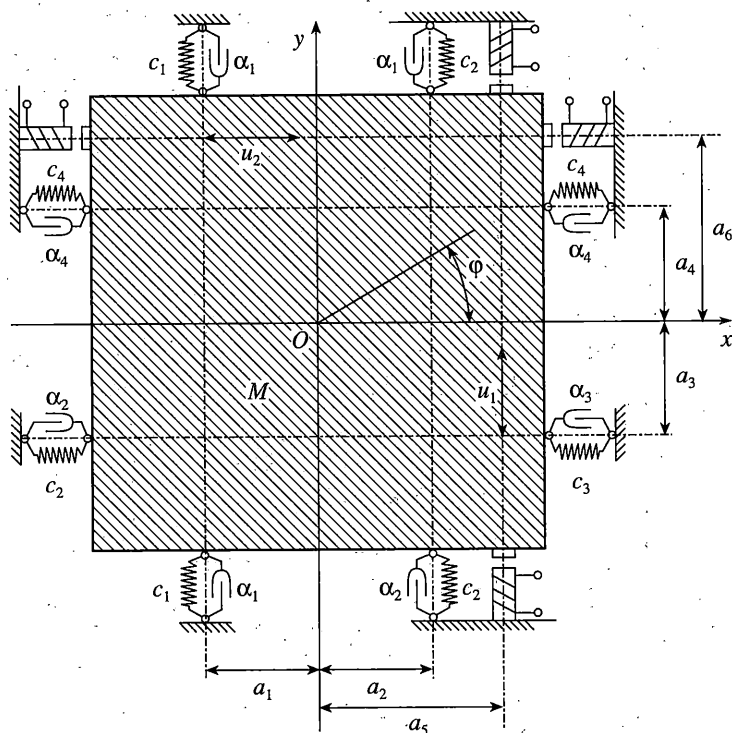
$$Y = K(t)Y_0 + \int_0^t G(t, \tau)D(\tau)U(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

Решение (3.1) справедливо только для случая, когда при $t = 0$ ранее действующие силы перестанут действовать и система продолжает движение с начальными данными Y_0 под действием только управляющих сил u_j .

Компоненты $y_p(t)$ и $y_v(t)$ равны

$$y_p = y_{p0} + \int_0^t \sum_{i=1}^m b_{\rho i}(t, \tau)u_i d\tau = y_{p0}(t) + \Delta y_p(t)$$

$$y_v = y_{v0} + \int_0^t \sum_{i=1}^m b_{v i}(t, \tau)u_i d\tau = y_{v0}(t) + \Delta y_v(t) \quad (3.2)$$



Фиг. 5

Для каждого фиксированного значения t_j можно получить область возможных значений Δy_p и Δy_v для разрывных функций $u_j(t)$ аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте.

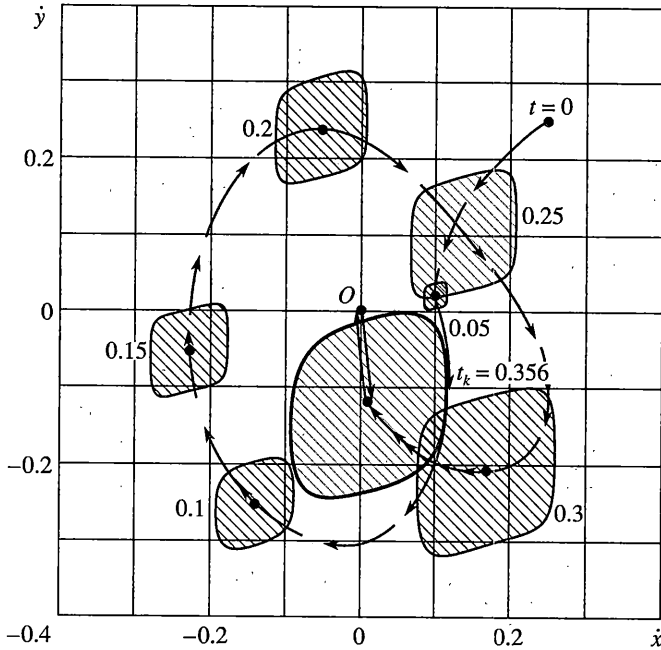
На фиг. 4 показано изменение во времени $y_{p0}(t)$ и $y_{v0}(t)$ и области для ряда фиксированных моментов времени t_j . Векторы на фиг. 4 равны

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{pv0} &= y_{p0}(t)\mathbf{i}_p + y_{v0}(t)\mathbf{i}_v \\ \Delta \mathbf{Y}_{pv} &= \Delta y_p(t)\mathbf{i}_p + \Delta y_v(t)\mathbf{i}_v \end{aligned} \quad (3.3)$$

Находим момент времени t_k , при котором граница области коснется начала координат. Этой точке соответствует вектор $\Delta y_{pv}^*(t_k)$, равный по модулю вектору $\mathbf{Y}_{pv0}(t_k)$, но противоположный по знаку. Поэтому в момент $t = t_k$ компоненты $y_p(t_k)$ и $y_v(t_k)$ обращаются в нуль, время t_k является минимальным ($t_k = t_{\min}$), а функции u_i , при которых компоненты $y_p(t_k)$ и $y_v(t_k)$ обращаются в нуль, являются оптимальными по быстродействию законами управления u_i^* и определяются из условий, аналогичных (2.8):

$$u_i^*(\tau) = \begin{cases} u_i = u_{i2} & \text{при } (b_{pi}(t_k, \tau) \cos \alpha + b_{vi}(t_k, \tau) \sin \alpha) > 0 \\ u_i = u_{i1} & \text{при } (b_{pi}(t_k, \tau) \cos \alpha + b_{vi}(t_k, \tau) \sin \alpha) < 0 \end{cases}$$

4. Рассмотрим пример. На фиг. 5 показан прибор массы M , система виброзащиты и управляющие функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые реализуются с помощью электромагнитов. Если ограничиться колебаниями массы M в плоскости чертежа, то система



Фиг. 6

имеет три степени свободы (обобщенные координаты $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \varphi$). При малых колебаниях можно получить уравнение

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = D^{(1)}U \quad (4.1)$$

Полагая $\dot{q} = Z_1, q = Z_2$, получаем уравнение

$$\dot{Y} + AY = DU \quad (4.2)$$

$$Y = (Z_1, Z_2)^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}, x, y, \varphi)^T$$

Вектор Y при $t = 0$ известен (Y_0). Управляющие функции удовлетворяют условиям

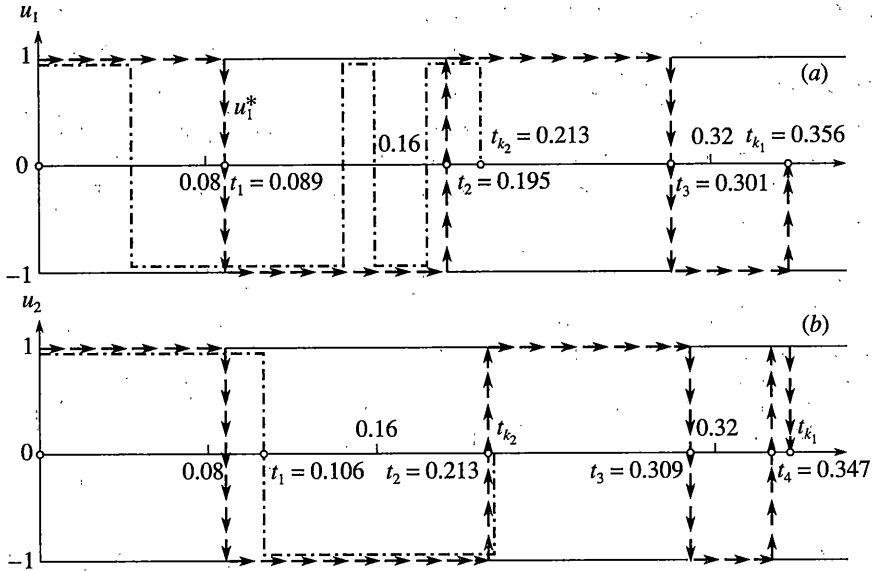
$$-u_0 \leq u_i(t) \leq u_0 \quad (4.3)$$

Определим оптимальные законы управления u_j^* , при которых за минимальное время ($t_k = t_{\min}$) две компоненты вектора Y (4.2) обращаются в нуль, например:

На массу M никаких других сил кроме u_j при $t > 0$ не действует, поэтому компоненты вектора Y (4.2) определяются из выражений, аналогичных (3.2). Для рассматриваемого примера надо определить оптимальные законы изменения $u_j(t)$, при которых за минимальное время $y_1 = \dot{x}$ и $y_2 = \dot{y}$ обращаются в нуль

$$y_1 = \dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta\dot{x},$$

$$y_2 = \dot{y} = \dot{y}_0 + \Delta\dot{y}$$



Фиг. 7

или

$$Y_{1,2} = Y_{1,2,0} + \Delta Y_{1,2}$$

$$Y_{1,2,0} = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)^T, \quad \Delta Y_{1,2} = (\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y})^T$$

На фиг. 6 показано, как изменяются во времени \dot{x}_0 и \dot{y}_0 и для ряда моментов t_j показаны области возможных значений $\Delta \dot{x}$ и $\Delta \dot{y}$, зависящие от $u_j(t)$ (4.3). При решении взяты следующие размерные числовые значения параметров: $M = 1.9$ кг, $J_0 = 0.0022$ кг · м², $c_1 = 35$ Н/м, $c_2 = 490$ Н/м, $c_3 = 100$ Н/м, $c_4 = 390$ Н/м, $a_1 = a_2 = 0.1$ м, $a_3 = a_4 = 0.07$ м, $a_5 = a_6 = 0.08$ м, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.5$, $u_0 = 1$ Н.

При $t = t_k$ граница области касается начала координат. Этой точке соответствует вектор $\Delta Y_{1,2}$, который по модулю равен вектору $Y_{1,2,0}$ и противоположен по знаку, поэтому $\dot{x}(t_k) = \dot{y}(t_k) = 0$.

В п. 2 было показано, что каждой точке границы области соответствуют определенные законы изменения функций f_i^* (2.8), или, что то же u_i^* (4.3), при которых $\dot{x}(t_k) = \dot{y}(t_k) = 0$, есть оптимальные по быстродействию законы изменения управляющих функций $u_i^*(t)$.

На фиг. 7a,b показаны (штриховыми и штрихпунктирными линиями) оптимальные законы изменения u_1^* (фиг. 7,a) и u_2^* (фиг. 7,b). Штриховыми линиями показаны оптимальные законы управления при начальных значениях $\dot{x}(0) = 0.25$ м/с, $\dot{y}(0) = 0.25$ м/с. Остальные компоненты вектора Y_0 (3.1) при $t = 0$ брались равными: $x(0) = 0.01$ м, $y(0) = 0.01$ м, $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$. Минимальное время t_{k_1} , за которое $x(t)$ и $y(t)$ обращаются в нуль, равно 0.356 с. Штрихпунктирной линией показаны оптимальные

законы изменения управляющих функций, когда требуется обратить в нуль $\dot{x}(t)$ и $y(t)$, если при $t = 0$ $\dot{x}(0) = 0.25$ м/с, $y(0) = 0.01$ м, $x(0) = \dot{y}(0) = 0$, $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$. Минимальное время t_{k_2} для этого случая равно 0.213 с.

Изложенный алгоритм позволяет определить оптимальные законы управления двумя компонентами вектора состояния системы, когда требуется, чтобы за минимальное время они достигли заданных значений. (Численное решение примера получено А.Б. Корнеевым).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. Светлицкий В.А. Динамика старта летательных аппаратов. М.: Наука, 1986. 279 с.
3. Светлицкий В.А. Определение оптимального закона изменения управляющей функции // Изв. ВУЗ. Машиностроение. № 3. 1966. С. 135–138.

Москва

Поступила в редакцию
25.06.2004