

УДК 539.3

© 2005 г. Е.П. КЛИГМАН, В.П. МАТВЕЕНКО, Н.А. ЮРЛОВА

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СИСТЕМ

Встраивание в оболочечные конструкции материалов, обладающих пьезоэлектрическими свойствами, позволяет оптимизировать динамические характеристики полученных систем. Наличие внешних электрических RLC -цепей, соединяющих электродревнированные поверхности пьезоэлементов, увеличивает число параметров, влияющих на резонансные частоты, формы собственных колебаний и показатели демпфирования конструкции. Динамические характеристики таких систем определяются из решения спектральной задачи электроупругости, которая формулируется в комплексной форме. В этой постановке найденные комплексные собственные функции будут определять формы и фазы колебаний, а комплексные собственные значения — резонансные частоты и показатели демпфирования. Целенаправленное изменение параметров внешних RLC -цепей позволяет оптимизировать динамические характеристики конструкций.

1. Введение. Новые технологии в производстве композитов породили такое понятие, как SMART-материалы. Основной особенностью таких материалов является их способность целенаправленно изменять свои свойства в зависимости от внешних условий. Как правило, в состав SMART-композитов входят датчики, фиксирующие изменение параметров окружающей среды или термомеханическое состояние конструкции, и активные элементы, так называемые актуаторы, которые в нужном направлении изменяют механические свойства конструкции. Такой тип SMART-материалов является активным и подразумевает наличие обратной связи и систем управления актуаторами. В настоящее время для изготовления актуаторов применяют сплавы с памятью формы, пьезоэлектрические материалы, магнито- и электрострикционные материалы, магнитные и электроореологические жидкости. Т.е., для этих целей могут быть использованы любые материалы, обладающие способностью изменять свое термомеханическое состояние при немеханическом (электрическом, магнитном или температурном) воздействии.

Наиболее часто для изготовления SMART-композитов используются пьезоэлектрические материалы. В частности, это объясняется наличием у них прямого и обратного пьезоэффекта, что позволяет использовать пьезоэлементы как в качестве датчиков, так и в качестве актуаторов. В настоящее время бурное развитие получают технологии производства пьезоэлементов на основе полимерных и волокнистых пьезоматериалов с сильно выраженными пьезоэлектрическими свойствами [1].

Для решения проблем, связанных с вибрациями конструкций, предлагается использовать полупассивные SMART-материалы на базе пьезоэлектриков, в которых функции датчиков и актуаторов совмещены. Для этого электродревнированные поверхности пьезоэлементов, расположенных в определенных местах конструкции, соединяются пассивными RLC -цепями с точкой нулевого потенциала. Принцип гашения вибраций основан на преобразовании механической энергии в электрическую с ее последующим рассеива-

нием во внешних RLC -цепях в виде тепла и электромагнитного излучения. При этом рассеиваемая мощность существенно зависит от параметров внешней цепи.

Наибольший эффект от использования полуактивных SMART-материалов достигается при оптимизации динамических свойств оболочечных элементов конструкций.

Диссипативные свойства конструкции могут быть определены из решения спектральной задачи теории электровязкоупругости. Для большинства конструкционных материалов спектральная задача теории электровязкоупругости может быть сформулирована с комплексными динамическими модулями, являющимися аналогами дифференциальных и интегральных операторов в физических соотношениях [2–5], и с комплексными сопротивлениями внешних электрических RLC -цепей.

В этой постановке найденные комплексные собственные значения будут определять частоты собственных колебаний и показатели демпфирования. Комплексные частоты и формы собственных колебаний зависят не только от конструктивных и технологических особенностей оболочечных систем, но и от типа и способа электрического соединения (RLC -параметры) пьезоэлементов конструкции. Целенаправленное изменение этих параметров позволит оптимизировать резонансные частоты, формы собственных колебаний и показатели демпфирования системы.

2. Варьированное уравнение движения тела, обладающего пьезоэлектрическими свойствами. Вариационное уравнение движения тела, состоящего из упругого V_1 и пьезоэлектрического V_2 элементов, может быть получено на основе соотношений линейной теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла [6–10]. В случае изотермического процесса вариационное уравнение может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{V_1} (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \dot{u}^i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D^i \delta E_i + \rho \dot{u}^i \delta u_i) dV - \\ & - \int_{\Omega_i} \delta u_i t^i d\Omega - \int_{\Omega_p} q_e \delta \phi d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где σ , ε – тензоры напряжений и деформаций; $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ – векторы электрической индукции и напряженности электрического поля; $\mathbf{t}$ – вектор нагрузок; ρ – плотность материала; Ω_p – поверхность, ограничивающая пьезоэлектрический элемент; q_e и ϕ – поверхностная плотность зарядов и электрический потенциал.

Компоненты тензора деформаций удовлетворяют соотношениям Коши $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$. Электрическое поле считается потенциальным, т.е. выполняется условие $\partial \phi / \partial x^i = -E_i$. Для изотермических процессов в линейных электроупругих средах справедливы следующие физические соотношения:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{для } V_1 \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{ij} &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k \\ D^k &= \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + e^{ki} E_i \end{aligned} \right\} \quad \text{для } V_2 \quad (2.3)$$

где C^{ijkl} – тензор упругих констант, β^{ijk} и e^{ki} – тензоры пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

Если элемент тела V_1 обладает вязкоупругими свойствами, то, согласно принципу Вольтерра, тензор упругих констант C^{ijkl} в зависимости (2.2) должен быть заменен соответствующим вязкоупругим оператором.

3. Уравнения электроупругости оболочек с внешними RLC цепями. Применение пьезоматериалов для создания оболочечных конструкций требует использования моделей оболочек, учитывающих все компоненты тензоров напряжений и деформаций. Это объясняется тем, что такие материалы, как правило, поляризованные в направлении толщины, проявляют свои пьезоэлектрические свойства при трансверсальном деформировании. Учет всех компонент тензоров напряжений и деформаций может быть осуществлен в рамках шестимодальной теории оболочек Тимошенко.

Обобщая кинематические гипотезы шестимодальной теории Тимошенко, приходим к следующим соотношениям для компонент вектора перемещений и электрического потенциала точки оболочки с гауссовыми координатами поверхности приведения x^α ($\alpha = 1, 2$) и нормальной координатой в направлении толщины оболочки $x^3 = z$:

$$\begin{aligned} u_\alpha(x^1, x^2, z) &= U_\alpha(x^1, x^2) + z \cdot \Psi_\alpha(x^1, x^2) \\ u_3(x^1, x^2, z) &= w(x^1, x^2) + z \cdot \eta(x^1, x^2) \\ \phi(x^1, x^2, z) &= f(x^1, x^2) + z \cdot \Phi(x^1, x^2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь u_α – перемещения в направлении базисных векторов гауссовых координат; u_3 – перемещения в направлении нормали; ϕ – электрический потенциал в точке; U_α , w , f – перемещения и потенциал точек поверхности приведения; Ψ_α – углы поворота нормали; η – обжатие по толщине оболочки; Φ – изменение потенциала по толщине оболочки.

Физические соотношения (2.2) и (2.3) могут быть записаны в матричной форме

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}, \quad \{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, D_1, D_2, D_3\}^T, \quad \{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{11}, \dots, -E_1, -E_2, -E_3\}$$

где $\{\sigma\}$ и $\{\epsilon\}$ – обобщенные векторы напряжений и деформаций. Аналогичным образом представим векторы обобщенных перемещений и нагрузок: $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3, \phi\}^T$, $\{t\} = \{t^1, t^2, t^3, q_e\}^T$.

Выполнив интегрирование уравнения (2.1) по толщине оболочки с учетом разложения (3.1), получим вариационное уравнение движения пьезоэлектрической оболочки в матричной форме:

$$\int_{\Omega} (\delta\{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} + \delta\{u\}^T [\rho] \{\ddot{u}\}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta\{u\}^T \{t\} d\Omega \quad (3.2)$$

$$[\rho] = \text{diag}(\rho, \rho, \rho, 0)$$

где $\{\epsilon\} = L'\{u\}$ – вектор обобщенных деформаций, L' – дифференциальный оператор.

Для расчета слоистых оболочек используется модифицированный вариант гипотезы ломаной нормали [11] позволяющий адекватно описывать слои с существенно различными электромеханическими характеристиками.

4. Квазигармонические колебания оболочки. Рассмотрим процессы, которые описываются временной функцией $F(t) = F_0 e^{-i\omega t}$, где ω – комплексная частота, F_0 – комплексная форма колебаний.

Тогда вариационное уравнение (3.2) примет вид:

$$\int_{\Omega} (\delta\{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} - \omega^2 \delta\{u\}^T [\rho] \{u\}) e^{-i\omega t} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\{u\}^T \{t\} e^{-i\omega t} d\Omega \quad (4.1)$$

При отсутствии внешней силовой нагрузки интеграл в правой части уравнения (3.2) может определять электрические граничные условия для пьезоэлектрических участков оболочки.

Рассмотрим случай, когда один из пьезоэлементов с электродированной поверхностью Ω_0 соединен с точкой нулевого потенциала проводником сопротивлением R , емкостью C и индуктивностью L . Для математического описания этого типа граничных условий воспользуемся законом Ома для переменного тока

$$\varphi = \frac{Q}{C} + RI + LI = \frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q}, \quad Q = \int_{\Omega_0} q d\Omega \quad (4.2)$$

Здесь φ – потенциал, Q – заряд на электроде, $I = \dot{Q}$ – ток в проводнике.

Так как рассматривается квазигармонический процесс, т.е. $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-i\omega t}$, то дифференциальное уравнение (4.2) можно разрешить относительно Q :

$$Q(t) = \frac{\varphi_0 e^{-i\omega t}}{C^{-1} - \omega^2 L - i\omega R}$$

С учетом эквипотенциальности поверхности Ω_p и того, что RLC является внешней цепью, будет выполняться условие

$$\delta\varphi \int_{\Omega} q_e d\Omega = \frac{\delta\varphi_0 \varphi_0 e^{-i\omega t}}{C^{-1} - \omega^2 L - i\omega R}$$

При отсутствии иных поверхностных сил, окончательно уравнение движения (4.1) примет вид

$$\int_{\Omega} (\delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \omega^2 \delta\{\mathbf{u}\}^T [\boldsymbol{\rho}] \{\mathbf{u}\}) e^{-i\omega t} d\Omega + \frac{\delta\varphi_0 \varphi_0 e^{-i\omega t}}{C^{-1} - \omega^2 L - i\omega R} = 0 \quad (4.3)$$

где φ_0 – потенциал на электродированной части пьезоэлемента Ω_0 . Уравнение (4.3) является однородным и может рассматриваться как вариационная задача на собственные значения.

Таким образом, для пьезоэлектрического тела получено вариационное уравнение квазигармонических колебаний, которое содержит диссипативные слагаемые, обусловленные потерей энергии во внешних электрических цепях с сопротивлением R . Индуктивность внешнего контура L выступает в качестве аналога механической массы, а емкость C – в качестве аналога механической жесткости, с помощью которых можно управлять собственными частотами колебаний. Вид уравнения (4.3) отличается от привычного вида наличием в знаменателе параметра частоты ω , что может привести к некоторым вычислительным трудностям при решении задач на собственные значения.

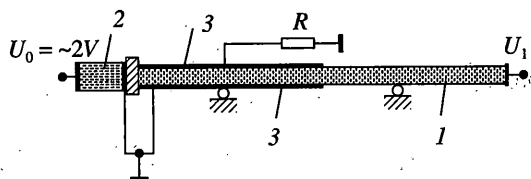
5. Конечно-элементная реализация задачи. Вариационная задача (4.3) с помощью метода конечных элементов (МКЭ) сводится к алгебраической проблеме собственных значений:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{G}(\omega)]) \{\mathbf{X}\} = 0 \quad (5.1)$$

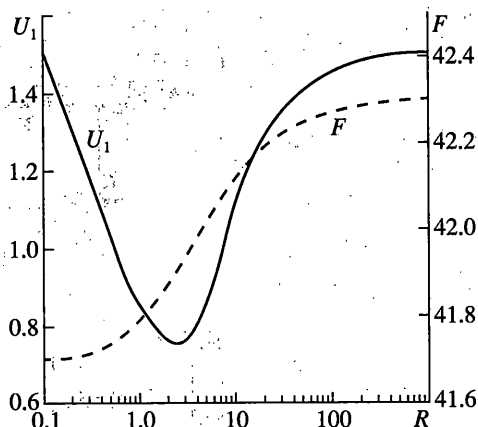
где $[\mathbf{K}]$ – матрица жесткости, $[\mathbf{M}]$ – матрица масс, $[\mathbf{G}]$ – матрица жесткости внешних RLC -цепей.

Условие существования нетривиального решения уравнения (5.1) имеет вид

$$D(\omega) = \det([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{G}(\omega)]) = 0 \quad (5.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнение (5.2) существенно отличается от обобщенной проблемы на собственные значения наличием матрицы $[G(\omega)]$, которая содержит нули и элементы вида $1/(C^{-1} - \omega^2 L - i\omega R)$.

6. Экспериментальные исследования. Для подтверждения теоретически установленной возможности гашения механических колебаний с помощью внешних электрических цепей были выполнены два модельных эксперимента.

В первом случае в шарнирно опертом пьезокерамическом (ЦТС ст3) стержне 1 прямоугольного сечения с поперечной поляризацией с помощью пьезоэлемента 2 (фиг. 1) возбуждаются продольные колебания во второй моде. При этом на электродах 3, расположенных на боковой поверхности, возникает разность электрических потенциалов. Для дополнительного гашения механических колебаний электроды 3 соединены резистором R , на котором происходит диссипация электрической энергии в виде джоулева тепла.

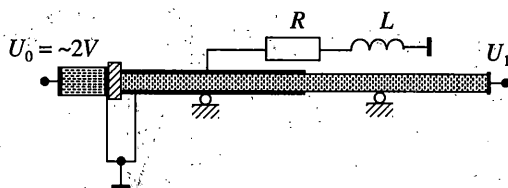
Изменяя сопротивление резистора R , можно добиться наибольшего гашения колебаний. Уровень амплитуды механических колебаний определяется опосредованно через электрический потенциал U_1 , возникающий на свободном конце стержня. График зависимости резонансной амплитуды U_1 [В] и частоты колебаний F [кГц] от сопротивления резистора R [кОм] показан на фиг. 2.

Как видно из графика, при значениях сопротивления резистора $R = 0$ и $R = \infty$ дополнительного гашения колебаний не происходит. Максимальное гашение колебаний осуществляется при $T \approx 2$ кОм и соответствует двукратному снижению резонансной амплитуды. При этом же значении сопротивления имеет место наибольшая скорость изменения резонансной частоты.

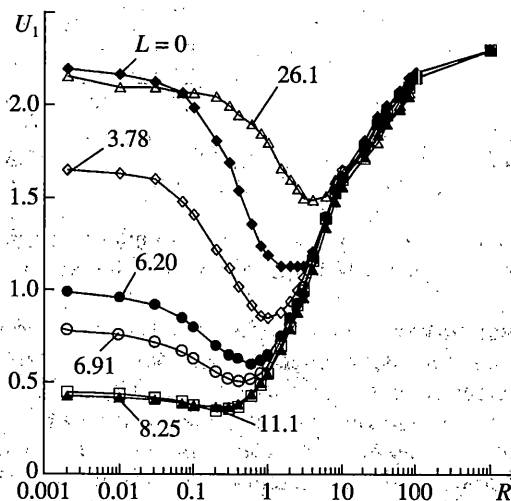
Примечательно, что максимальное демпфирование достигается при равенстве активного сопротивления R и емкостного сопротивления электродированной части стержня на резонансной частоте $R = 1/(2\pi FC)$, где $C \equiv 2nF$ — емкость электродированной части стержня.

Другой эксперимент показывает эффективность гашения колебаний с помощью внешней активно-индуктивной RL цепи (фиг. 3).

Условия эксперимента те же, что и в первом случае. При величине индуктивности $L = 8$ мГн и $R = 0$ кОм на амплитудно-частотной характеристике системы почти полностью исчез пик, соответствующий второй резонансной частоте. Это объясняется тем, что подводимая механическая энергия практически полностью преобразуется в



Фиг. 3



Фиг. 4

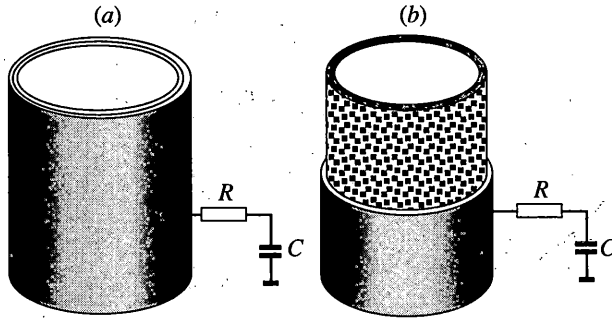
электрическую энергию колебаний параллельного LC -контура и рассеивается в виде электромагнитного излучения и джоулева тепла. При этом собственная частота LC -контура совпадает с соответствующей частотой механического резонанса стержневой системы $F = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.

На фиг. 4 представлено семейство зависимостей резонансных амплитуд от величины активного сопротивления внешней цепи при различных дискретных значениях параметра индуктивности в диапазоне от 0 до 26 мГн.

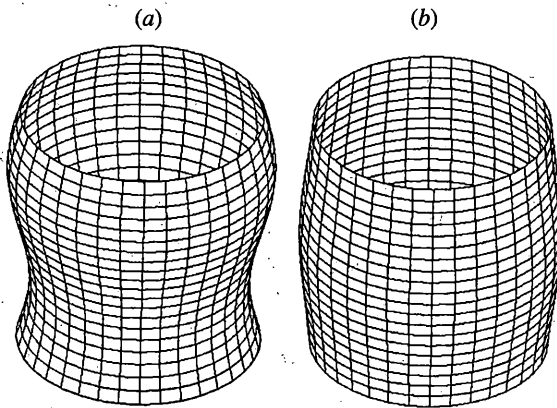
Как видно из графика, оптимальное значение индуктивности L для данной моды колебаний лежит в диапазоне 8–11 мГн. При этом наибольшее демпфирование достигается при значении сопротивления $R \approx 400$ Ом и соответствует почти пятикратному снижению резонансной амплитуды.

Подобные эксперименты описаны в [11], где исследовались изгибные колебания заземленного металлического стержня, а демпфирование осуществлялось с помощью пьезоэлектрических накладок, закрепленных у основания.

7. Численные исследования. Для оценки эффективности предложенного подхода в случае оболочечных систем было проведено численное исследование собственных колебаний шарнирно опертых двухслойных цилиндрических оболочек, внутренний слой которых выполнен из углепластика, а наружный из пьезокерамики $PZT-4$. Рассматривались варианты со сплошным и половинным пьезослоями (фиг. 5, а, в, соответственно).



Фиг. 5



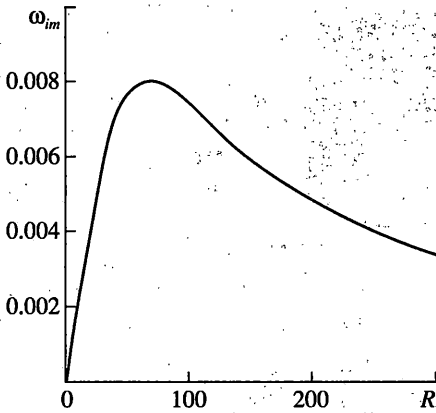
Фиг. 6

Геометрические размеры цилиндра: радиус – 643 мм, длина – 1286 мм, толщина – 6.43 мм. Толщина пьезослоя составляет 20% несущего слоя. Характеристики материалов, входящих в конструкцию, имели следующие значения: углепластик – $E^1 = 4.3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $E^2 = 7.1 \cdot 10^{10}$ Н/м², $E^3 = 6 \cdot 10^8$ Н/м², $\nu_{21} = 0.4$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0.24$, $G^{12} = 2 \cdot 10^{10}$ Н/м², $G^{13} = 1.4 \cdot 10^9$ Н/м², $G^{23} = 2.1 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 1.47 \cdot 10^3$ Кг/м³; пьезокерамика PZT-4 [10] – $C_{11} = 13.9 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{12} = 7.78 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{13} = 7.43 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{33} = 11.5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{44} = 2.56 \cdot 10^{10}$ Н/м, $\beta_{13} = -5.2$ Кл/м², $\beta_{33} = 15.2$ Кл/м², $\beta_{15} = 12.7$ Кл/м², $\epsilon_{11} = 6.45 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\epsilon_{33} = 5.62 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\rho = 7500$ Кг/м³. В качестве демпфирующего элемента рассматривалась внешняя RC цепь с емкостью $C = 2$ нФ.

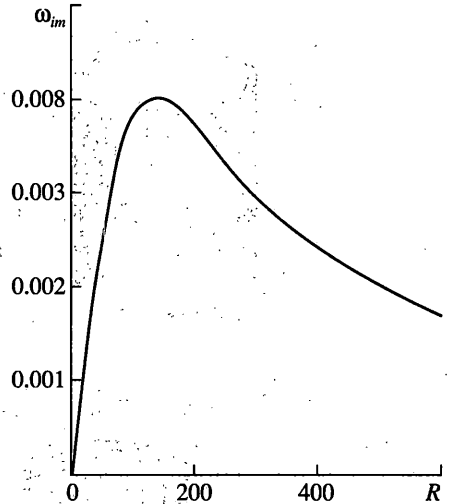
Исследовалась возможность демпфирования первых двух мод осесимметричных форм колебаний (фиг. 6).

Здесь следует отметить, что при неосесимметричных модах в случае сплошного электродирования пьезослоя в окружном направлении электрический потенциал на электроде будет тождественно равен нулю, что делает невозможным демпфирование с помощью внешней цепи. Для гашения неосесимметричных мод электрод пьезослоя должен состоять из определенного числа секторов.

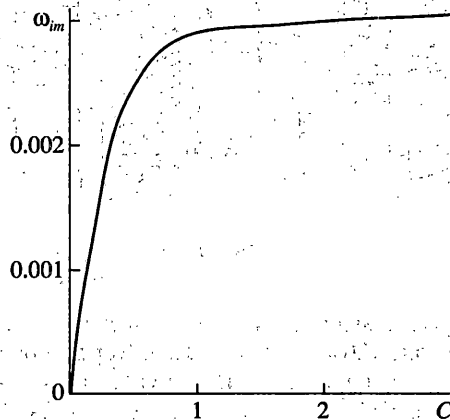
На фиг. 7 представлена зависимость показателя демпфирования второй моды собственных колебаний ($\omega_R = 7520$ рад/сек) цилиндра со сплошным пьезослоем. Демпфирование первой моды ($\omega_R = 7050$ рад/сек), имеющей обратную симметрию в направлении образующей, невозможно, так как в этом случае суммарный электрический потенциал на электроде тождественно равен нулю.



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Для варианта пьезослоя, расположенного на половине длины оболочки, становится возможным демпфирование как по второй, так и по первой формам колебаний.

На фиг. 8 представлена зависимость показателя демпфирования колебаний цилиндра по первой моде ($\omega = 8550$ рад/сек) от величины активного сопротивления во внешней цепи.

Аналогичный вид имеет график, характеризующий демпфирование второй моды собственных колебаний.

Анализ результатов расчета показал, что во всех случаях имеет место четко выраженный максимум демпфирования при определенных значениях активного сопротивления внешней цепи.

Исследовалось влияние величины емкости цепи C на общий показатель демпфирования системы. На фиг. 9 приведена зависимость показателя демпфирования от емкости внешней цепи для второй моды собственных колебаний цилиндра со сплошным пьезослоем.

При увеличении емкости внешней RC-цепи до 30 нФ и более общий показатель демпфирования системы увеличивается примерно в три раза, что и отражает зависимость показателя демпфирования от емкости внешней цепи для цилиндра, внешний слой которого выполнен из пьезоэлектрика.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта № 03.01.00557) и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант № PE-009-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yoshikawa S., Selvaraj U., Brooks K.G., Kurtz S.K.* Piezoelectric PZT tubes and fibers for passive vibrational damping // ISAF'92: Proc. 9th IEEE Intern. Symp. Appl. Ferroelectrics. 1992. P. 269–272.
2. *Matveyenko V.P., Kligman E.P.* Natural vibration problem of viscoelastic solids applied to optimization of dissipative properties of constructions. // J. Vibration and Control. 1997. V. 3. № 1. P. 87–102.
3. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
4. *Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 303 с.
5. *Матвеев В.П., Клигман Е.П., Юрлова Н.А.* Оптимизация диссипативных свойств конструкций из вязкоупругих материалов // Механика и прочность авиационных конструкций: Сб. докл. конф. Уфа: Уфим. авиац. техн. ун-т, 2001. С. 175–184.
6. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
7. *Борисенко А.И., Тарапов И.Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: "Вища шк.", 1978. 214 с.
8. *Васидазу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
9. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
10. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. Киев: Наук. думка, 1988. 319 с.
11. *Inman D.J.* Smart structures solutions to vibration problems. / Proc. ISMA 23. Leuven, Belgium, 1998. V. 1. P. 1–12.
12. *Матвеев В.П., Клигман Е.П., Юрлова Н.А., Грачев Д.В.* Управление динамическими свойствами механических систем, выполненных из SMART – материалов на основе пьезоэлектриков // Мат. Моделирование систем и процессов. 2001. № 9. С. 85–92.

Пермь

Поступила в редакцию
21.04.2003