

УДК 539.3

© 2005 г. Ю.В. НЕМИРОВСКИЙ, А.П. ЯНКОВСКИЙ

### **УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ПРОФИЛИРОВАННЫХ ПЛАСТИН, АРМИРОВАННЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ**

Сформулирована задача рационального армирования кирхгофовских пластин по направлениям главных деформаций и напряжений при чисто упругом и упругопластическом поперечном изгибе. Дополнительно сформулирована задача рационального профилирования таких конструкций при условии, что волокна одного из семейств равнонапряжены на лицевых поверхностях пластины. Проведен качественный анализ соответствующих систем разрешающих уравнений. Показана возможность существования нескольких альтернативных решений поставленной задачи, которыми можно управлять. Проведены конкретные расчеты, показывающие, что за счет рационального профилирования изгибаемых пластин расход фазовых материалов в них можно существенно (в разы) уменьшить по сравнению с эталонными конструкциями.

Волокнистые композиционные материалы, обладающие высокой прочностью и жесткостью при нагружении в направлении армирования, плохо воспринимают усилия, вызывающие взаимный сдвиг волокон. Поэтому одним из критериев рационального проектирования композитных конструкций является условие армирования их по направлениям главных напряжений и деформаций. Однако до настоящего времени проблема армирования тонкостенных конструкций по направлениям главных напряжений исследовалась только в безмоментной постановке: либо для пластин, работающих в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [1–3], либо для осесимметрично нагруженных безмоментных оболочек [4–6]. Поэтому актуальной является задача исследования поперечного изгиба тонких пластин, армированных по направлениям главных напряжений и деформаций. Такую задачу далее будем называть задачей рационального армирования (РА). Известно [7], что для многих современных волокнистых композиций (угле-, бороалюминий, боромагний, магний-сталь и др.) предельная упругая деформация армирующих волокон в несколько раз (иногда на порядок) больше той же величины связующей матрицы. Следовательно, для таких композиций несущая способность силовых элементов (волокон) при упругом изгибе используется незначительно (иногда всего на несколько процентов), что влечет за собой низкую несущую способность армированной пластины и неэффективное использование высокопрочной арматуры. Повысить несущую способность РА-пластин можно за счет допущения неупругого деформирования фазовых материалов и рационального профилирования (РП) изгибаемой конструкции. Изучению упругопластического изгиба профилированных РА-пластин посвящено данное исследование.

**1. Исходные уравнения и граничные условия.** Будем рассматривать упругопластический поперечный изгиб кирхгофской пластины переменной толщины  $H$ , состоящей из изотропной матрицы и внедренной в нее тонковолокнистой однородной ар-

матуры постоянного поперечного сечения. Предполагается, что пластина по толщине имеет регулярную и квазиоднородную структуру, тепловое воздействие не учитывается, прогибы считаются малыми. Путь нагружения пластины предполагается квазистатическим и несложным, поэтому для описания нелинейно-упругого или неупругого поведения фазовых материалов используются соотношения теории упругопластических деформаций [8, 9].

Пластина рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат  $x_1x_2z$ ; плоскость  $x_1x_2$  совмещена со срединной плоскостью пластины до изгиба, а ось  $z$  перпендикулярна этой плоскости. Пластина армирована  $N$  семействами волокон (возможно, различной физической природы), которые уложены в плоскостях, параллельных плоскости  $x_1x_2$  (плоское армирование), или на поверхностях, расстояния между которыми по оси  $z$  изменяются пропорционально изменению  $H(x_1, x_2)$  (пространственное армирование).

Для формулировки задачи упругопластического поперечного изгиба кирхгофовских пластин необходимо использовать:

уравнения равновесия в перерезывающих силах  $F_i$  и моментах  $M_{ij}$  [9]

$$F_{1,1} + F_{2,2} + p = 0, \quad M_{i1,1} + M_{i2,2} = F_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

связь между средними напряжениями в композиции  $\sigma_{ij}$  и моментами  $M_{ij}$ :

$$M_{ij} = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{ij} z dz \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.2)$$

соотношения между изгибными деформациями  $\epsilon_{ij}$  и прогибом  $w$ :

$$\epsilon_{ij} = -zw_{,ij} \quad (i, j = 1, 2) \quad (|z| \leq H/2) \quad (1.3)$$

а также выражения для осредненных напряжений  $\sigma_{ij}$  через напряжения в фазовых материалах (используется модель армированного слоя с "одномерными" волокнами [10])

$$\sigma_{ij} = a\sigma_{mij} + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj} \quad (i, j = 1, 2), \quad l_{k1} = \cos \psi_k, \quad l_{k2} = \sin \psi_k, \quad a = 1 - \sum_k \omega_k \quad (1.4)$$

где  $p$  – распределенная поперечная нагрузка;  $\sigma_{mij}$ ,  $\sigma_k$  – напряжения в связующей матрице и арматуре  $k$ -го семейства соответственно;  $\omega_k$ ,  $\psi_k$  – интенсивность и угол (отсчитываемый от направления  $x_1$ ) армирования волокном  $k$ -го семейства; суммирование производится от 1 до  $N$ ; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по переменной  $x_i$  соответственно.

Будем предполагать, что диаграммы растяжения и сжатия фазовых материалов совпадают и имеют линейное упрочнение. Тогда связь между напряжением  $\sigma_k$  и продольной деформацией  $\epsilon_k$  арматуры  $k$ -го семейства имеет вид [10]:

$$\sigma_k = \begin{cases} E_k \epsilon_k, & |\epsilon_k| \leq \epsilon_{sk} = \sigma_{sk} / E_k \\ \text{sign}(\epsilon_k) \sigma_{sk} + E_{sk} (\epsilon_k - \text{sign}(\epsilon_k) \epsilon_{sk}), & \epsilon_{sk} < |\epsilon_k| \leq \epsilon_{*k} \equiv \epsilon_{pk} \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $\sigma_{sk}$  – предел текучести материала волокон  $k$ -го семейства;  $E_k$ ,  $E_{sk}$  – модули упругости и упрочнения материала волокон  $k$ -го семейства;  $\epsilon_{sk}$ ,  $\epsilon_{*k}$  – деформации, соответствующие пределу текучести  $\sigma_{sk}$  и временному сопротивлению  $\sigma_{pk}$  материала волокон  $k$ -го семейства соответственно.

Связь между деформациями пластины  $\epsilon_{ij}$  и деформацией  $\epsilon_k$  волокон  $k$ -го семейства в рамках модели с "одномерными" волокнами определяется соотношением [10]:

$$\epsilon_k = \epsilon_{11} \cos^2 \psi_k + \epsilon_{22} \sin^2 \psi_k + \epsilon_{12} \sin 2\psi_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.6)$$

Из (1.3), (1.5), (1.6) следует выражение для напряжений в волокнах  $k$ -го семейства

$$\sigma_k(x_1, x_2, z) = \begin{cases} E_k e_k z, & |z| \leq h_k/2 \\ \text{sign}(e_k z) \sigma_{sk} + E_{sk} [e_k z - \text{sign}(e_k z) \varepsilon_{sk}], & h_k/2 < |z| < H/2, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$h_k = \begin{cases} H, & h_k^* \geq H, \\ h_k^*, & h_k^* < H, \end{cases} \quad h_k^* = \frac{2\varepsilon_{sk}}{|e_k|} = \frac{2\sigma_{sk}}{E_k |e_k|} \quad (1.8)$$

$$e_k = -w_{,11} \cos^2 \Psi_k - w_{,22} \sin^2 \Psi_k - w_{,12} \sin 2\Psi_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.9)$$

где  $h_k/2$  – абсолютные величины аппликат границ между упругим и неупругим слоями в арматуре  $k$ -го семейства (т.е. при  $|z| \leq h_k/2$  волокна  $k$ -го семейства ведут себя упруго, а при  $h_k/2 < |z| \leq H/2$  неупруго);  $e_k$  – параметр искривления срединной плоскости пластины в направлении армирования волокном  $k$ -го семейства.

Линейно-упругое поведение материала связующего определяется законом Гука

$$\sigma_{mij} = E a_1 (\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{jj}), \quad \sigma_{mij} = E a_2 \varepsilon_{ij} \quad (j = 3 - i; i = 1, 2) \quad (|z| \leq h/2) \quad (1.10)$$

а интенсивность деформаций  $\varepsilon_0$  при этом равна [8, 9]:

$$\varepsilon_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \nu + \nu^2}{3(1 - \nu)^2} \left( \varepsilon_{11}^2 - \frac{1 - 4\nu + \nu^2}{1 - \nu + \nu^2} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 \right) + \varepsilon_{12}^2} \quad (1.11)$$

где

$$a_1 = 1/(1 - \nu^2), \quad a_2 = 1/(1 + \nu) \quad (1.12)$$

$E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона связующего.

Нелинейно-упругое и неупругое поведение материала связующего определяется основными соотношениями теории упругопластических деформаций [8, 9], упрощенными допущением о несжимаемости материала (не меняя существа дела, учет сжимаемости при неупругом поведении связующего изгибаемой пластины связан со значительными трудностями даже в простом случае деформирования материала без упрочнения [8, 9]). В случае использования диаграммы деформирования с линейным упрочнением связь между напряжениями  $\sigma_{mij}$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}$  за пределами линейной упругости при отсутствии дилатации имеет вид:

$$\sigma_{mii} = \frac{2[\sigma_s + E_*(\varepsilon - \varepsilon_*)]}{3\varepsilon} (2\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj}), \quad \sigma_{mij} = \frac{2[\sigma_s + E_*(\varepsilon - \varepsilon_*)]}{3\varepsilon} \varepsilon_{ij} \quad (1.13)$$

где  $j = 3 - i, i = 1, 2$ ;  $\sigma_s, E_*$  – предел текучести и модуль упрочнения материала связующего, известные из диаграммы деформирования [8];  $\varepsilon_*$  – значение интенсивности деформаций, соответствующее  $\sigma_s$  на диаграмме деформирования; интенсивность деформаций  $\varepsilon$  в предположении о несжимаемости материала связующего имеет выражение [9]:

$$\varepsilon^2 = 4(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{12}^2)/3 \quad (1.14)$$

Введем в рассмотрение положительные величины  $e_0, e$ , составленные из параметров искривления  $w_{,ij}$  срединной плоскости пластины таким же образом, как и интенсивности  $\varepsilon_0, \varepsilon$  (1.11), (1.14) соответственно:

$$e_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \nu + \nu^2}{3(1 - \nu)^2} \left( w_{,11}^2 - \frac{1 - 4\nu + \nu^2}{1 - \nu + \nu^2} w_{,11} w_{,22} + w_{,22}^2 \right) + w_{,12}^2} \quad (1.15)$$

$$e^2 = 4(w_{,11}^2 - w_{,11}w_{,22} + w_{,22}^2 + w_{,12}^2)/3 \quad (1.16)$$

тогда из соотношений (1.3), (1.11), (1.14)–(1.16) следует

$$\varepsilon_0 = |z|e_0(x_1, x_2), \quad \varepsilon = |z|e(x_1, x_2) \quad (1.17)$$

При упругопластическом напряженном состоянии в связующем в крайних слоях пластины, примыкающих к лицевым поверхностям, материал связующего ведет себя неупруго, а средний слой остается еще упругим. Следовательно, если  $h/2$  есть абсолютная величина аппликат границ между упругим и неупругим слоями в связующем, то интенсивность напряжений

$$\sigma \leq \sigma_s \quad (0 \leq |z| \leq h/2), \quad \sigma > \sigma_s \quad (h/2 < |z| \leq H/2) \quad (1.18)$$

В упругом слое связующего интенсивность напряжений равна [8, 9]:

$$\sigma = 3G_m \varepsilon_0 = 3G_m |z| e_0, \quad G_m = 0.5E/(1 + \nu) \quad (1.19)$$

где  $G_m$  – модуль сдвига связующей матрицы. На границах  $|z| = h/2$  между упругим и неупругим слоями в связующем  $\sigma = \sigma_s$ , поэтому из (1.19) следует

$$h_*/2 = \sigma_s / (3G_m e_0) \quad (1.20)$$

В результате будем иметь

$$h = \begin{cases} H, & h_* \geq H \\ h_*, & h_* < H \end{cases} \quad (1.21)$$

Соотношения (1.15), (1.20), (1.21) определяют толщину  $h$  упругого слоя в связующем через вторые производные от прогиба, причем в общем случае  $h \neq \text{const}$ .

Окончательно напряжения в связующем  $\sigma_{mij}$  с учетом выражений (1.3), (1.10), (1.13), (1.17) задаются соотношениями

$$\sigma_{mii} = -zEa_1(w_{,ii} + \nu w_{,jj}), \quad \sigma_{mij} = -zEa_2 w_{,ij} \quad (|z| \leq h/2) \quad (1.22)$$

$$\sigma_{mii} = -2[zE_* + \text{sign}(z)(\sigma_s - E_* \varepsilon_*)/e](2w_{,ii} + w_{,jj})/3, \quad \sigma_{mij} = -2[zE_* + \text{sign}(z)(\sigma_s - E_* \varepsilon_*)/e]w_{,ij}/3 \quad (j = 3 - i, i = 1, 2) \quad (h/2 < |z| \leq H/2) \quad (1.23)$$

где величины  $a_1, a_2$  определены в (1.12).

Подставляя в выражения (1.2) соотношения (1.4) и учитывая представления (1.8), (1.9), (1.21)–(1.23), получим выражения для моментов через прогиб пластины:

$$M_{ij} = aM_{mij} + \sum_k \omega_k l_{ki} l_{kj} [e_k E_k h_k^3 + E_{sk} e_k (H^3 - h_k^3) + \quad (1.24)$$

$$+ 3 \text{sign}(e_k)(\sigma_{sk} - E_{sk} \varepsilon_{sk})(H^2 - h_k^2)]/12 \quad (i, j = 1, 2)$$

$$M_{mij} = \int_{-H/2}^{H/2} \sigma_{mij} z dz \quad (i, j = 1, 2)$$

$$M_{mii} = -\{a_1 E(w_{,ii} + \nu w_{,jj})h^3 + 2[(H^3 - h^3)E_*/3 + (\sigma_s - E_* \varepsilon_*) \times \times (H^2 - h^2)/e](2w_{,ii} + w_{,jj})\}/12, \quad M_{mij} = -\{a_2 E h^3 + 2(H^3 - h^3) \times \times E_*/2 + 2(\sigma_s - E_* \varepsilon_*)(H^2 - h^2)/e\}w_{,ij}/12 \quad (j = 3 - i, i = 1, 2) \quad (1.25)$$

В случае упругого изгиба в соотношениях (1.24), (1.25) следует принять  $h_k = h = H$ .

Если пластина армирована по направлениям главных деформаций, то для первого семейства волокон должно выполняться равенство [8]:  $(\epsilon_{22} - \epsilon_{11})\cos\psi_1\sin\psi_1 + \epsilon_{12}\cos 2\psi_1 = 0$ , которое с учетом выражений (1.3) принимает вид

$$(w_{,22} - w_{,11})\cos\psi_1\sin\psi_1 + w_{,12}\cos 2\psi_1 = 0 \quad (1.26)$$

Так как при поперечном изгибе кирхгофовой пластины в плоскостях  $z = \text{const}$  существуют только два ортогональных направления главных деформаций, то углы армирования волокнами второго семейства задаются равенством

$$\psi_2 = \psi_1 + \pi/2 \quad (1.27)$$

В силу предположения об изотропности материала связующего из (1.22), (1.23), (1.26), (1.27) следует, что направления главных деформаций совпадают с направлениями главных напряжений в связующем; кроме того, при выполнении равенств (1.26), (1.27) получаем локально ортотропный композитный материал, а значит, в этом случае направления главных деформаций совпадают с направлениями главных осредненных напряжений  $\sigma_{ij}$ . Далее будем предполагать, что  $N = 1$  или  $N = 2$  и имеют место равенства (1.26), (1.27).

Если в качестве дополнительного условия рационального проектирования изгибаемой пластины используется требование равнонапряженности волокон  $k$ -го семейства на лицевых поверхностях пластины ( $z = \pm H/2$ ), то

$$\sigma_k(x_1, x_2, H/2) = \sigma_{0k} = \text{const} \quad (k = 1 \text{ или } k = 2) \quad (1.28)$$

где  $\sigma_{0k}$  — значение напряжения в волокнах  $k$ -го семейства на верхней стороне пластины. (На нижней лицевой поверхности  $\sigma_k(x_1, x_2, -H/2) = -\sigma_{0k} = \text{const}$ .)

Если  $|\sigma_{0k}| \leq \sigma_{sk}$ , то из соотношений (1.3), (1.5), (1.6), (1.28) вытекает

$$\sigma_k(x_1, x_2, z) = 2z\sigma_{0k}/H \quad (|z| \leq H/2) \quad (1.29)$$

если же  $|\sigma_{0k}| > \sigma_{sk}$ , то из тех же соотношений и (1.7) следует

$$\sigma_k(x_1, x_2, z) = \begin{cases} E_k z e_k = 2z \text{sign}(\sigma_{0k}) \sigma_{sk} / h_k, & |z| \leq h_k/2 \\ \text{sign}(z\sigma_{0k}) \sigma_{sk} + E_{sk} [z e_k - \text{sign}(z\sigma_{0k}) \epsilon_{sk}], & h_k/2 < |z| \leq H/2 \end{cases} \quad (1.30)$$

Здесь  $h_k$  определена в (1.8), где необходимо учесть выражение

$$e_k = \begin{cases} 2\sigma_{0k}/(HE_k); & |\sigma_{0k}| \leq \sigma_{sk} \\ 2[\sigma_{0k} - \text{sign}(\sigma_{0k})(\sigma_{sk} - E_{sk}\epsilon_{sk})]/(HE_{sk}), & |\sigma_{0k}| > \sigma_{sk} \end{cases} \quad (1.31)$$

вытекающее из (1.3), (1.5), (1.6), (1.28). Следовательно, для равнонапряженных волокон  $k$ -го семейства величина  $e_k$  в (1.9) должна иметь выражение (1.31).

Так как поперечные сечения непрерывных волокон всех семейств предполагаются постоянными вдоль траекторий армирования, то при пространственном армировании необходимо использовать равенства [11]:

$$(\omega_k H \cos \psi_k)_{,1} + (\omega_k H \sin \psi_k)_{,2} = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (1.32)$$

связывающие параметры РА  $\omega_k$ ,  $\psi_k$  и толщину пластины  $H$ . При плоском армировании вместо (1.32) нужно использовать [11]:

$$(\omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (\omega_k \sin \psi_k)_{,2} = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (1.33)$$

В последнем случае при  $H \neq \text{const}$  волокна будут обрываться на лицевых поверхностях пластины ( $z = \pm H/2$ ).

Пусть область  $G$ , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром  $\Gamma$ , тогда на одной части этого контура (обозначим ее  $\Gamma_p$ ) могут быть заданы статические граничные условия по изгибающему моменту [9]

$$M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 = M_n, \quad n_1 = \cos\beta, \quad n_2 = \sin\beta, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \quad (1.34)$$

и приведенной поперечной силе Кирхгофа

$$F_1n_1 + F_2n_2 + \partial_\tau(M_{n\tau}) = F_{nz}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \quad (1.35)$$

$$M_{n\tau} = (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2), \quad \partial_\tau(M_{n\tau}) = -n_2M_{n\tau,1} + n_1M_{n\tau,2}$$

а на другой части (обозначим ее  $\Gamma_u$ ) – кинематические условия

$$w(\Gamma_u) = w_0, \quad w_{,1}n_1 + w_{,2}n_2 = \theta_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_u \quad (1.36)$$

где  $M_n, F_{nz}$  – изгибающий момент и приведенная поперечная сила Кирхгофа, заданные на  $\Gamma_p$ ;  $w_0, \theta_0$  – прогиб на  $\Gamma_u$  и производная от прогиба по направлению внешней нормали к контуру, задаваемой углом  $\beta$ ;  $\partial_\tau$  – производная вдоль контура. (На контуре  $\Gamma$  могут быть заданы и смешанные из (1.34)–(1.35) граничные условия, например условия свободного опирания.)

На той части контура  $\Gamma$  (обозначим ее  $\Gamma_k$ ), на которой волокна  $k$ -го семейства входят в область  $G$ , необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [11]:

$$\omega_k(\Gamma_k) = \omega_{0k} \quad (k = 1, 2) \quad (1.37)$$

где  $\omega_{0k}$  – заданные на  $\Gamma_k$  функции.

Решение задачи РА пластины при упругопластическом поперечном изгибе должно удовлетворять физическим [11]:

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2), \quad \sum_k \omega_k \leq \omega_* \leq 1, \quad 0 < H \leq H_* = \text{const} \quad (1.38)$$

и прочностным [8–10] ограничениям

$$\sigma(x_1, x_2, \pm H/2) \leq \sigma_m, \quad |\sigma_k(x_1, x_2, \pm H/2)| \leq \sigma_k^* = \min(\sigma_k^-, \sigma_k^+) \quad (1.39)$$

$$\sigma_m > 0, \quad \sigma_k^\pm > 0 \quad (k = 1, 2)$$

где  $\omega_* = \text{const}$  – предельно допустимая суммарная интенсивность армирования;  $H_*$  – максимальная толщина, при которой пластина может еще рассматриваться как тонкая;  $\sigma_m$  – предел прочности связующей матрицы, равный пределу текучести  $\sigma_s$  при упругом изгибе или временному сопротивлению  $\sigma_* = \sigma_p$  при упругопластическом изгибе;  $\sigma_k^-, \sigma_k^+$  – пределы прочности волокон  $k$ -го семейства при сжатии и растяжении соответственно (при воздействии сжимающих нагрузок может возникнуть некоторая форма неустойчивости волокон, поэтому в общем случае  $\sigma_k^- \neq \sigma_k^+$ ).

На границах  $\Gamma_e^p$  между упругой  $G_e$  и упругопластической  $G_p$  зонами в связующем, т.е. при  $h_* = H$  (см. (1.20)), имеют место статические и кинематические условия сопряжения решения [8, 9]. Из первого прочностного ограничения (1.39) при  $\sigma_m = \sigma_s$  в силу линейного распределения напряжений  $\sigma_{mij}$  по толщине пластины в упругой зоне в связующем следует, что указанная граница определяется уравнением [9]

$$\Gamma_e^p: M_{m11}^2 - M_{m11}M_{m22} + M_{m22}^2 + 3M_{m12}^2 = H^4 \sigma_s^2 / 36 \quad (1.40)$$

Граница же  $\Gamma_k^{ep}$  между упругой  $G_k^e$  и упругопластической  $G_k^p$  зонами в арматуре  $k$ -го семейства определяется из (1.8), (1.9) при  $h_k^* = H$ .

Таким образом, для решения задачи об упругопластическом поперечном изгибе кирхгофовой пластины, армированной волокнами постоянного поперечного сечения по направлениям главных деформаций и напряжений, необходимо использовать уравнения и соотношения (1.1), (1.8), (1.9), (1.20), (1.21), (1.24)–(1.27), (1.32), (1.33); в качестве дополнительного требования рационального проектирования может выступать равенство (1.28) и следующие из него соотношения (1.29)–(1.31). На контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $G$ , могут быть заданы статические (1.34), (1.35), кинематические (1.36) или смешанные из (1.34)–(1.36) граничные и краевые (1.37) условия; граница между упругой и упругопластической зонами в связующем при непрерывном изменении на ней структуры армирования определяется уравнением (1.40). Решение задачи должно удовлетворять физическим (1.38) и прочностным (1.39) ограничениям, причем в силу гипотез Кирхгофа и предположения о совпадении диаграмм растяжения и сжатия фазовых материалов неравенства (1.39) достаточно удовлетворить на лицевых поверхностях пластины ( $z = \pm H/2$ ).

**2. Системы разрешающих уравнений.** Для получения системы разрешающих уравнений задачи РА поперечно изгибаемых пластин и соответствующих ей статических граничных условий в прогибах необходимо соотношения (1.24), (1.25) подставить в уравнения (1.1) и граничные условия (1.34), (1.35) и исключить из рассмотрения поперечные силы  $F_i$ . Тогда уравнение равновесия упругопластического изгиба армированной пластины примет вид

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijml} w_{,ml}^3 - D_{ij} \right) = 12p(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} C_{iiii} &= \sum_k \omega_k l_{ki}^4 [E_k h_k^3 + E_{sk} (H^3 - h_k^3)] + a \{ a_1 E h^3 + 4[(H^3 - h^3) E_* / 3 + \\ &+ (\sigma_s - E_* \epsilon_*) (H^2 - h^2) / e] \}, \quad C_{iiij} = \sum_k \omega_k l_{ki}^2 l_{kj}^2 [E_k h_k^3 + E_{sk} (H^3 - h_k^3)] + \\ &+ a \{ a_1 E v h^3 + 2[(H^3 - h^3) E_* / 3 + (\sigma_s - E_* \epsilon_*) (H^2 - h^2) / e] \}, \quad C_{iiij} = \\ &= \sum_k \omega_k l_{ki}^3 l_{kj} [E_k h_k^3 + E_{sk} (H^3 - h_k^3)], \quad C_{ijij} = \sum_k \omega_k l_{ki}^2 l_{kj}^2 [E_k h_k^3 + \\ &+ E_{sk} (H^3 - h_k^3)] + a [a_2 E h^3 / 2 + (H^3 - h^3) E_* / 3 + (\sigma_s - E_* \epsilon_*) \times \\ &\times (H^2 - h^2) / e] \quad (j = 3 - i, i = 1, 2), \quad a = 1 - \sum_k \omega_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$D_{ij} = 3 \sum_k \omega_k l_{ki} l_{kj} \text{sign}(e_k) (\sigma_{sk} - E_{sk} \epsilon_{sk}) (H^2 - h_k^2) \quad (i, j = 1, 2)$$

где  $e_k, e, h_k, h, a_1, a_2$  определены в (1.8), (1.9), (1.12), (1.16), (1.20), (1.21). Статические граничные условия преобразуются к виду:

по изгибающему моменту

$$\begin{aligned}
 & - (C_{1111} \cos^2 \beta + C_{1122} \sin^2 \beta + C_{1112} \sin 2\beta) w_{,11} - (C_{2211} \cos^2 \beta + C_{2222} \times \\
 & \times \sin^2 \beta + C_{2212} \sin 2\beta) w_{,22} - 2(C_{1211} \cos^2 \beta + C_{1222} \sin^2 \beta + C_{1212} \sin 2\beta) \times \\
 & \times w_{,12} + D_{11} \cos^2 \beta + D_{22} \sin^2 \beta + D_{12} \sin 2\beta = 12M_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

по приведенной силе Кирхгофа

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijml} w_{,ml} - D_{ij} \right) n_i - 0.5 \partial_{\tau} \{ [(C_{1122} - C_{1111}) \sin 2\beta + 2C_{1112} \times \\
 & \times \cos 2\beta] w_{,11} + [(C_{2222} - C_{2211}) \sin 2\beta + 2C_{2212} \cos 2\beta] w_{,22} + 2[(C_{1222} - C_{1211}) \times \\
 & \times \sin 2\beta + 2C_{1212} \cos 2\beta] w_{,12} - (D_{22} - D_{11}) \sin 2\beta - 2D_{12} \cos 2\beta \} = 12F_{n\tau}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Кинематические граничные условия (1.36) остаются без изменения.

Из (2.2) с учетом (1.8), (1.9), (1.16), (1.20), (1.21) следует, что коэффициенты  $C_{ijml}$ ,  $D_{ij}$  в уравнении (2.1) и граничных условиях (2.3), (2.4) нелинейно зависят от  $w$ ,  $H$  и параметров армирования  $\psi_k$ ,  $\omega_k$ . При чисто-упругом поперечном изгибе в (2.2) следует принять  $h_k = h = H$ , тогда из (2.1), (2.3), (2.4) с учетом условия РА (1.26) и требования (1.32) (или (1.33)) получим уравнение равновесия (2.1) в развернутой форме

$$\begin{aligned}
 & H^3 \{ A_{1111} w_{,1111} + 2(A_{1122} + 2A_{1212}) w_{,1122} + 4A_{1112} w_{,1112} + 4A_{1222} w_{,1222} + \\
 & + A_{2222} w_{,2222} - \sum_{i=1,2} w_{,iii} \left[ 2Ea_1 \sum_k \omega_{k,i} - \sum_k E_k \omega_k (3(-1)^i l_{ki}^2 l_{kj} \partial_{sk}(\psi_k) - l_{ki}^3 \times \right. \\
 & \times \partial_{sk}(H)/H) \left. \right] - \sum_{i=1,2} w_{,12i} \left[ 2Ea_1 \sum_k \omega_{k,j} - 3 \sum_k E_k \omega_k ((-1)^i l_{ki} (3l_{kj}^2 - 1) \partial_{sk}(\psi_k) - \right. \\
 & \left. - l_{ki}^2 l_{kj} \partial_{sk}(H)/H) \right] - \sum_k (\omega_{k,11} \sigma_{m11}^f + 2\sigma_{m12}^f \omega_{k,12} + \sigma_{m22}^f \omega_{k,22}) - H \sum_k E_k \omega_k \times \\
 & \times [\partial_{sk}(e_k) \partial_{sk}(1/H) + e_k \partial_{sk}^2(1/H)] - \sum_k E_k [\partial_{nk}(e_k \omega_k \partial_{sk}(\psi_k)) - (\partial_{sk}(\psi_k))^2 \times \\
 & \times e_k \omega_k] \} + 6H^2 \sum_{i=1,2} H_{,i} [A_{iiii} w_{,iii} + (A_{1122} + 2A_{1212}) w_{,ijj} + 3A_{iijj} w_{,ijj} + A_{ijjj} w_{,jjj} + \\
 & + \sum_k (\omega_{k,1} \sigma_{m1i}^f + \sigma_{m2i}^f \omega_{k,2}) - (-1)^i \sum_k E_k \omega_k e_k l_{kj} \partial_{sk}(\psi_k) + \sum_k E_k \omega_k l_{ki} \partial_{sk}(H) \times \\
 & \times e_k / H] - 3H^2 (H_{,11} \sigma_{11}^f + 2\sigma_{12}^f H_{,12} + \sigma_{22}^f H_{,22}) - 6H (\sigma_{11}^f H_{,1}^2 + \\
 & + 2\sigma_{12}^f H_{,1} H_{,2} + \sigma_{22}^f H_{,2}^2) = 12p(x_1, x_2)
 \end{aligned} \quad (2.5)$$



которому соответствуют статические граничные условия:  
по изгибающему моменту

$$H^3 [(A_{1111} \cos^2 \beta + A_{1122} \sin^2 \beta + A_{1112} \sin 2\beta) w_{,11} + (A_{2211} \cos^2 \beta + A_{2222} \times \\ \times \sin^2 \beta + A_{2212} \sin 2\beta) w_{,22} + 2(A_{1211} \cos^2 \beta + A_{1222} \sin^2 \beta + A_{1212} \sin 2\beta) \times \\ \times w_{,12}] = -12M_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \quad (2.6)$$

и приведенной силе Кирхгофа

$$H^2 \sum_{i=1,2} \left\{ H \left[ A_{iiii} w_{,iii} + (A_{1122} + 2A_{1212}) w_{,ijj} + 3A_{iiij} w_{,ijj} + A_{ijjj} w_{,jjj} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_k (\omega_{k,1} \sigma_{m1i}^f + \sigma_{m2i}^f \omega_{k,2}) - (-1)^i \sum_k E_k \omega_k e_{klkj} \partial_{sk}(\Psi_k) \right] - \left[ 3\sigma_{1i}^f H_{,1} + 3\sigma_{2i}^f H_{,2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_k E_k \omega_k e_{klki} \partial_{sk}(H) \right] \right\} n_i + 0.5 \partial_{\tau} \{ H^3 [(A_{1122} - A_{1111}) \sin 2\beta + 2A_{1112} \times \\ \times \cos 2\beta) w_{,11} + ((A_{2222} - A_{2211}) \sin 2\beta + 2A_{2212} \cos 2\beta) w_{,22} + 2((A_{1222} - A_{1211}) \times \\ \times \sin 2\beta + 2A_{1212} \cos 2\beta) w_{,12} \} = -12F_{nz} \quad (j = 3 - i), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \quad (2.7)$$

$$A_{ijml} = C_{ijml} / H^3 \quad (i, j, m, l = 1, 2) \quad \text{при} \quad h = h_k = H$$

$$\sigma_{ij}^f = -A_{ij11} w_{,11} - A_{ij22} w_{,22} - 2A_{ij12} w_{,12} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.8)$$

$$\sigma_{mii}^f = -Ea_1 (w_{,ii} + \nu w_{,jj}), \quad \sigma_{mij}^f = -Ea_2 w_{,ij} \quad (j = 3 - i, i = 1, 2)$$

$$\partial_{sk}(\cdot) = \cos \Psi_k \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} + \sin \Psi_k \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2}, \quad \partial_{nk}(\cdot) = -\sin \Psi_k \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} + \cos \Psi_k \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \quad (2.9)$$

При упругопластическом изгибе уравнение (2.1) и граничные условия (2.3), (2.4) в развернутом виде, аналогичном (2.5)–(2.7), выписывать не будем в силу их чрезвычайной громоздкости (см. выражения (2.2)).

Граница  $\Gamma_e^p$  между чисто упругой и упругопластической зонами в связующем определяется уравнением в прогибах

$$H^2 E^2 \left\{ a_1^2 \sum_{i=1,2} (w_{,ii} + \nu w_{,jj})^2 - a_1^2 \prod_{i=1,2} (w_{,ii} + \nu w_{,jj}) + 3a_2^2 w_{,12}^2 \right\} = 4\sigma_s^2 \quad (j = 3 - i)$$

которое получается из (1.40) с учетом выражений (1.25) при  $H = h = h_*$ . Граница  $\Gamma_k^{ep}$  между упругой  $G_k^e$  и упругопластической  $G_k^p$  зонами в арматуре  $k$ -го семейства определяется уравнением

$$H |w_{,11} \cos^2 \Psi_k + w_{,22} \sin^2 \Psi_k + w_{,12} \sin 2\Psi_k| = 2\varepsilon_{sk} = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

вытекающим из (1.8), (1.9) при  $h_k^* = H$ .

Если толщина пластины  $H$  задана (в частности,  $H = \text{const}$ ), то система разрешающих уравнений задачи РА состоит из  $2N + 1$  уравнений (1.26), (1.27), (1.32) (или (1.33)), (2.1) (или (2.5)) и с учетом выражений (1.8), (1.9), (1.12), (1.16), (1.20), (1.21), (2.2), (2.8), (2.9) замкнута относительно следующих неизвестных функций: прогиба  $w$  и параметров армирования  $\psi_k, \omega_k$  ( $k = 1$  или  $k = 2$ ). Для однозначного интегрирования указанной системы на кромке пластины должны быть заданы граничные (1.36), (2.3), (2.4) (или (2.6), (2.7)) и краевые (1.37) условия. Полученная система разрешающих уравнений, соответствующие ей граничные и краевые условия указывают на то, что подзадачи определения прогиба и параметров РА связаны и решать их необходимо совместно, причем в целом система уравнений и статические граничные условия совместно нелинейны. Нелинейность имеет двойное происхождение: во-первых, "структурная" нелинейность (так как параметры РА  $\psi_k, \omega_k$ , определяющие структуру материала, суть неизвестные функции) и физическая нелинейность в зонах упругопластического деформирования фазовых материалов. Все это значительно усложняет качественный анализ краевой задачи РА изгибаемых пластин и разработку методов ее решения.

Отметим, что возможны две формулировки задачи РА. В рамках первой формулировки траектории РА разыскиваются при упругом деформировании фазовых материалов из системы (1.26), (1.27), (1.32) (или (1.33)), (2.5) при граничных (1.36), (2.6), (2.7) и краевых (1.37) условиях. После этого РА структура фиксируется, и если амплитуда нагрузки увеличивается, и в фазовых материалах возникают пластические деформации, то для упругопластического изгиба решается прямая задача (2.1), (2.3), (2.4), (1.36) с учетом (2.2) при уже известной структуре армирования. В рамках второй формулировки задачи траектории РА при упругопластическом изгибе разыскиваются из системы (1.26), (1.27), (1.32) (или (1.33)), (2.1) при граничных (2.3), (2.4), (1.36) и краевых (1.37) условиях для максимального по модулю значения амплитуды нагрузки.

Для определения типа системы разрешающих уравнений (1.26), (1.27), (1.32) (или (1.33)), (2.1) (или (2.5)) используем детерминантный метод [12]. Как при плоском (1.33), так и при пространственном (1.32) армировании характеристическое уравнение разрешающей системы имеет вид

$$P(x_2') \prod_{k=1}^N (\sin \psi_k - x_2' \cos \psi_k) = 0 \quad (2.10)$$

где производная  $x_2' = dx_2/dx_1$  задает направление характеристики;  $P(x_2')$  – полином 4-го порядка относительно  $x_2'$ , коэффициенты которого зависят от значений неизвестных функций  $w_{ij}, \omega_k, \psi_k$ . В случае чисто-упругого изгиба полином 4-го порядка  $P(x_2')$  имеет выражение

$$P(x_2') = W(x_2') + \sum_k \omega_k \eta_k^2 (E_k e_k \zeta_k^2 + \sigma_{m11}^f x_2'^2 - 2\sigma_{m12}^f x_2' + \sigma_{m22}^f) / (e_k^0 + e_k)$$

$$W(x_2') = A_{1111} x_2'^4 - 4A_{1112} x_2'^3 + 2(A_{1122} + 2A_{1212}) x_2'^2 - 4A_{1222} x_2' + A_{2222} \quad (2.11)$$

$$\zeta_k = \sin \psi_k - x_2' \cos \psi_k, \quad \eta_k = \cos \psi_k + x_2' \sin \psi_k$$

$$e_k^0 = w_{,11} \sin^2 \psi_k + w_{,22} \cos^2 \psi_k - w_{,12} \sin 2\psi_k \quad (k = 1 \text{ или } k = 2)$$

где  $e_k$  определен в (1.9). (В случае упругопластического деформирования фазовых материалов полином  $P(x_2')$  имеет чрезвычайно громоздкое выражение и здесь не приведен.)

Сомножители, стоящие в (2.10) под знаком произведения, указывают на то, что система разрешающих уравнений имеет  $N$  ( $N = 1$  или  $N = 2$ ) действительных характеристик, совпадающих с траекториями РА (при  $N = 2$  эти характеристики ортогональны).

Полином  $P(x_2')$  в зависимости от значений неизвестных функций  $w_{ij}$ ,  $\omega_k$ ,  $\psi_k$  (т.е. в зависимости от коэффициентов) может иметь разное количество действительных корней в разных подобластях пластины. Следовательно, система разрешающих уравнений задачи РА изгибаемых пластин является квазилинейной системой смешанно-составного типа [13].

Если предположить, что толщина пластины  $H$  неизвестна, то система  $2N + 1$  уравнений (1.26), (1.27), (1.32) (или (1.33)), (2.1) (или (2.5)) будет недоопределена относительно  $2N + 2$  неизвестных функций  $H$ ,  $w$ ,  $\omega_k$ ,  $\psi_k$  ( $k = 1$  или  $k = 1, 2$ ). Поэтому сформулировать задачу о РП пластины можно, если, например, дополнительно потребовать, чтобы волокна одного из семейств были не только уложены по направлениям главных деформаций, но были бы равнонапряжены на лицевых поверхностях пластины ( $z = \pm H/2$ ). Действительно, в этом случае при укладке только одного семейства волокон ( $N = 1$ ) получаем, что система (1.9), (1.26), (1.32) (или (1.33)), (2.1) (или (2.5)) с учетом (1.31) замкнута относительно 4-х функций:  $H$ ,  $w$ ,  $\omega_1$ ,  $\psi_1$ . Характеристическое уравнение этой системы совпадает с (2.10), где полином 4-го порядка  $P(x_2')$  при упругом деформировании связующего имеет вид

$$P(x_2') = [aHEa_1(1 + x_2'^2) + \omega_1 \eta_1^2 (\sigma_{*1}^2 \zeta_1^2 + 0.5H(\sigma_{m11}^f x_2'^2 - 2\sigma_{m12}^f x_2' + \sigma_{m22}^f)) \times \\ \times (e_1^0 + e_{*1}/H)^{-1}] e_{*1} - \zeta_1^2 H [\sigma_{*1} \omega_1 \zeta_1^2 + 1.5Ha(\sigma_{m11}^f x_2'^2 - 2\sigma_{m12}^f x_2' + \sigma_{m22}^f)]$$

где

$$\sigma_{*k} = E_k e_{*k} h_{*k}^3 + E_{sk} e_{*k} (1 - h_{*k}^3) + 3 \text{sign}(\sigma_{0k})(E_k - E_{sk}) \varepsilon_{sk} (1 - h_{*k}^2) = \text{const} \\ e_{*k} = He_k = \text{const}, \quad h_{*k} = h_k/H = \text{const} \quad (k = 1), \quad a = 1 - \omega_1$$

При укладке двух ( $N = 2$ ) семейств волокон по ортогональным направлениям система (1.9), (1.26), (1.27), (1.32) (или (1.33)), (2.1) (или (2.5)) с учетом (1.31) замкнута относительно шести неизвестных функций  $\psi_k$ ,  $\omega_k$ ,  $w$ ,  $H$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Характеристическое уравнение этой системы имеет вид (2.10), где полином 4-го порядка  $P(x_2')$  в случае равнонапряженного армирования волокон  $N$ -го семейства при упругом изгибе определяется равенством

$$P = \frac{H}{2} \zeta_N^2 \left[ (\sigma_{11}^f x_2'^2 - 2\sigma_{12}^f x_2' + \sigma_{22}^f)/4 + \sum_k \omega_k (\sigma_{m11}^f x_2'^2 - 2\sigma_{m12}^f x_2' + \sigma_{m22}^f) \right] - \left[ W(x_2') + \right. \\ \left. + \sum_k \omega_k \eta_k^2 (E_k e_k \zeta_k^2 + 0.5(\sigma_{m11}^f x_2'^2 - 2\sigma_{m12}^f x_2' + \sigma_{m22}^f)) / (e_k^0 + e_k) \right] (e_N^0 + e_N) / \omega_N \quad (N = 2)$$

Следовательно, система разрешающих уравнений задачи РП изгибаемых РА-пластин является квазилинейной системой смешанно-составного типа, имеющей  $N$  ( $N = 1$  или  $N = 2$ ) действительных характеристик, совпадающих с траекториями армирования.

Повторяя рассуждения, приведенные в [14] для изгибаемых равнонапряженно-армированных пластин постоянной толщины, с учетом требования  $H > 0$  можно доказать, что гладкие решения задачи РП поперечно-изгибаемых РА-пластин не могут

существовать при следующих типах закрепления: по всей кромке  $\Gamma$  пластина жестко закреплена; пластина оперта по всей кромке  $\Gamma$  и хотя бы в одной точке закреплена; на одной части кромки пластина оперта, на другой – жестко закреплена, а на третьей – задана податливая опора с закреплением.

Очевидно, что при указанных типах закрепления нужно использовать сопряженные (разрывные) решения задачи РП. При этом найдутся такие линии контакта  $\Gamma_u^v$  подобластей  $G_u, G_v (\subset G)$ , на которых напряжения в равнонапряженных волокнах на верхней (нижней) стороне пластины будут иметь разные знаки по разные стороны от  $\Gamma_u^v$ .

Кроме того, для задач РП изгибаемых РА-пластин можно повторить доказательства и других утверждений, приведенных в [14].

В заключение остановимся на вопросе о неединственности решения задачи РА изгибаемых пластин и возможности управления решением. С одной стороны, задача РА обладает произволами, связанными с краевыми условиями для интенсивностей армирования (1.37), и чем больше количество внедряемых семейств волокон, тем больше количество этих произволов. Варьируя функции  $\omega_{0k}$  в краевых условиях (1.37), можно получать пучки решений задачи РА, из которых можно выбирать проекты с наиболее приемлемыми механическими, весовыми или технологическими свойствами. С другой стороны, известно [8, 9], что в плоскости изгибаемой пластины существуют два направления главных деформаций, поэтому, например при  $N = 1$ , задавая траектории армирования по этим двум возможным направлениям (например, при осесимметричном изгибе кольцевой пластины – по радиальному или окружному направлениям), при одних и тех же входных данных получим два альтернативных РА-проекта пластины, которыми можно управлять за счет варьирования функций  $\omega_{0k}$  в краевых условиях (1.37). Это дополнительно расширяет спектр решений задачи РА, из которого можно выбрать решения, наиболее эффективные по тем или иным показателям.

**3. Обсуждение результатов расчетов.** В качестве первого примера рассмотрим прямоугольную пластину ( $0 \leq x_1 \leq x_1^0, 0 \leq x_2 \leq x_2^0$ ) постоянной толщины ( $H = \text{const}$ ), нагруженную постоянными контурными моментами

$$\begin{aligned} M_{11}(0, x_2) = M_{11}(x_1^0, x_2) = M_{11}^0 = \text{const}, \quad M_{22}(x_1, 0) = M_{22}(x_1, x_2^0) = M_{22}^0 = \\ = \text{const}, \quad M_{12}(0, x_2) = M_{12}(x_1^0, x_2) = M_{12}(x_1, 0) = M_{12}(x_1, x_2^0) = M_{12}^0 = \text{const} \end{aligned} \quad (3.1)$$

при отсутствии поперечной распределенной нагрузки и контурных перерезывающих сил

$$p(x_1, x_2) = 0, \quad F_1(0, x_2) = F_1(x_1^0, x_2) = F_2(x_1, 0) = F_2(x_1, x_2^0) = 0 \quad (3.2)$$

Тогда из уравнений равновесия (1.1) с учетом равенств (3.1), (3.2) получим однородное моментное состояние в пластине

$$M_{ij}(x_1, x_2) = M_{ij}^0 = \text{const}, \quad F_i(x_1, x_2) = 0, \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.3)$$

При однородном моментном состоянии пластину целесообразно армировать также однородно

$$\omega_k(x_1, x_2) = \omega_{0k} = \text{const}, \quad \psi_k(x_1, x_2) = \psi_{0k} = \text{const} \quad (k = 1 \text{ или } k = 1, 2) \quad (3.4)$$

Однородному моментному состоянию (3.3) при однородной структуре армирования (3.4) должно соответствовать однородное деформированное состояние пластины, определяемое прогибом

$$w(x_1, x_2) = 0.5c_{11}x_1^2 + 0.5c_{22}x_2^2 + c_{12}x_1x_2 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 \quad (3.5)$$

где  $c_i, c_{ij}$  – постоянные, подлежащие определению.

Используя условие РА (1.26), с учетом (1.27), (3.5) получим

$$c(c_{11}, c_{22}, c_{12}) \equiv \operatorname{ctg} 2\psi_{01} = (c_{11} - c_{22}) / (2c_{12}) = \operatorname{const}, \quad \psi_2 = \psi_{02} = \psi_{01} + \pi/2 \quad (3.6)$$

Далее потребуются известные тригонометрические соотношения

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi &= (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{-1}, \quad \sin^2 \psi = \operatorname{tg}^2 \psi (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{-1}, \quad \sin^2 2\psi = 4\operatorname{tg}^2 \psi (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{-2} \\ \sin 2\psi &= \cos 2\psi \operatorname{tg} 2\psi = (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) [\operatorname{ctg} 2\psi (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)]^{-1}, \quad \operatorname{tg}^2 \psi = 1 - 2\operatorname{ctg} 2\psi \operatorname{tg} \psi \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из последнего равенства (3.7) следует

$$\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{ctg} 2\psi \pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\psi} \quad (3.8)$$

поэтому если укладывается одно семейство волокон ( $N = 1$ ) по направлениям главных деформаций (3.6), то из (3.8) получаем два возможных ортогональных направления

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\operatorname{ctg} 2\psi_1 + \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\psi_1} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \psi_1 = -\operatorname{ctg} 2\psi_1 - \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\psi_1} \quad (3.9)$$

В случае же укладки двух семейств волокон ( $N = 2$ ) также возможны два варианта укладки

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\operatorname{ctg} 2\psi_1 + \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\psi_1}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = -\operatorname{ctg} 2\psi_1 - \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\psi_1} \quad (3.10)$$

или

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\operatorname{ctg} 2\psi_1 - \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\psi_1}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = -\operatorname{ctg} 2\psi_1 + \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\psi_1} \quad (3.11)$$

Рассматривая упругий изгиб пластины, из (1.24), (1.25) с учетом  $h = h_k = H$  и (3.3)–(3.11) получим выражения для моментов

$$\begin{aligned} E a_1 a (c_{11} + \nu c_{22}) + E_1 \omega_{01} (1+t)^{-2} (c_{11} + t c_{22} + (1-t) c_{12}/c) + \\ + E_2 \omega_{02} t (1+t)^{-2} (t c_{11} + c_{22} - (1-t) c_{12}/c) = -12 M_{11}^0 / H^3 \\ E a_1 a (c_{22} + \nu c_{11}) + E_1 \omega_{01} t (1+t)^{-2} (c_{11} + t c_{22} + (1-t) c_{12}/c) + \\ + E_2 \omega_{02} (1+t)^{-2} (t c_{11} + c_{22} - (1-t) c_{12}/c) = -12 M_{22}^0 / H^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} 2 E a_2 a c_{12} + E_1 \omega_{01} (1-t)(1+t)^{-2} c^{-1} (c_{11} + t c_{22} + (1-t) c_{12}/c) - \\ - E_2 \omega_{02} (1-t)(1+t)^{-2} c^{-1} (t c_{11} + c_{22} - (1-t) c_{12}/c) = -24 M_{12}^0 / H^3 \end{aligned}$$

$$t(c_{11}, c_{22}, c_{12}) \equiv \operatorname{tg}^2 \psi_1 = 1 - 2\operatorname{tg} \psi_1 c, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = -c \pm \sqrt{1 + c^2}, \quad a = 1 - \omega_{01} - \omega_{02} \quad (3.13)$$

где  $c(c_{11}, c_{22}, c_{12})$  определена в (3.6). (Если укладывается одно семейство волокон, то в (3.12), (3.13) следует принять  $\omega_{02} = 0$ .)

Таким образом, система трех уравнений (3.12) с учетом (3.6), (3.13) замкнута относительно трех постоянных  $c_{11}, c_{22}, c_{12}$ , определяющих параметры искривления срединной плоскости пластины (см. (3.5)). Постоянные  $c_0, c_1, c_2$  в (3.5) позволяют исключить смещение и повороты пластины как жесткого целого. Так как в (3.13) можно задавать любой из знаков ( $\pm$ ), то система (3.12) может иметь два набора ре-

шений  $c_{11}, c_{22}, c_{12}$ . Отсюда следует возможность существования двух альтернативных решений задачи РА.

В частном случае  $M_{11}^0 = M_{22}^0 = 0, M_{12}^0 \neq 0$  имеем чистое кручение пластины, соответствующее приложению в ее угловых точках сосредоточенных перерезывающих сил. Тогда при  $E_1 = E_2, \omega_{01} = \omega_{02}$  из системы (3.12) с учетом (3.6), (3.13) получим

$$c = c_{11} = c_{22} = 0, \quad \text{tg}^2 \psi_1 = 1, \quad \text{tg} \psi_1 = \pm 1, \quad c_{12} = -12M_{12}^0 H^{-3} (Ea_2 a + E_1 \omega_{01})^{-1}$$

т.е. армирование осуществляется под углами  $\psi_k = \pm \pi/4$  ( $k = 1, 2$ ).

В случае же  $M_{11}^0 \neq 0, M_{22}^0 \neq 0, M_{12}^0 = 0$  (чистый изгиб), получим

$$c_{12} = 0, \quad |c| \rightarrow \infty, \quad \text{tg}^2 \psi_1 = 0 \quad \text{или} \quad \text{tg}^2 \psi_1 \rightarrow \infty$$

$$Ea_1 a(c_{11} + \nu c_{22}) + E_1 \omega_{01} c_{11} = -12M_{11}^0 / H^3 \quad (3.14)$$

$$Ea_1 a(c_{22} + \nu c_{11}) + E_2 \omega_{02} c_{22} = -12M_{22}^0 / H^3 \quad (\text{tg}^2 \psi_1 = 0)$$

$$Ea_1 a(c_{11} + \nu c_{22}) + E_2 \omega_{02} c_{11} = -12M_{11}^0 / H^3 \quad (3.15)$$

$$Ea_1 a(c_{22} + \nu c_{11}) + E_1 \omega_{01} c_{22} = -12M_{22}^0 / H^3 \quad (\text{tg}^2 \psi_1 \rightarrow \infty)$$

Две подсистемы (3.14), (3.15) являются замкнутыми невырожденными линейными системами алгебраических уравнений относительно  $c_{11}, c_{22}$  и определяют два решения задачи РА, соответствующие структурам  $\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi/2$  и  $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = \pi$ .

В некоторых частных случаях нагружения и закрепления пластин определенной формы задача РА решается элементарно. Такие задачи могут быть использованы как модельные для отработки методов решения задачи РА в общем случае.

Рассмотрим случай цилиндрического изгиба прямоугольной удлиненной (в идеале бесконечной длины) пластины, имеющей ширину  $D$  и толщину  $H$  и ориентированной вдоль оси  $Ox_2$ . Предполагая, что в продольном направлении нагрузка, закрепление и армирование пластины не изменяются, и пренебрегая локальными торцевыми эффектами, получим, что решение задачи РА будет зависеть только от переменной  $x_1$  ( $0 \leq x_1 \leq D$ ). Уравнения (2.1) и (1.32) (или (1.33)) при этом можно проинтегрировать, после чего система разрешающих уравнений примет вид

$$-12M_{11}(x_1) \equiv C_{1111} w'' - D_{11} = 12P(x_1) \quad (3.16)$$

$$H\omega_k \cos \psi_k = H(0)\omega_k \cos \psi_k(0) = \text{const} \quad (k = 1 \text{ или } k = 2) \quad (3.17)$$

$$w'' \sin 2\psi_k = 0 \quad (k = 1 \text{ или } k = 2) \quad (3.18)$$

$$e_k = -w'' \cos^2 \psi_k \quad (k = 1 \text{ или } k = 2) \quad (3.19)$$

$$P(x_1) = - \int_0^{x_1} \int_0^{x_1} p(x_1) dx_1 dx_1 + P_1 x_1 + P_0 \quad (3.20)$$

$$C_{1111} = \sum_k \omega_k \cos^4 \psi_k [E_k h_k^3 + E_{sk} (H^3 - h_k^3)] + a \{ a_1 E h^3 + 4[(H^3 - h^3) E_* / 3 +$$

$$+ \sqrt{3}(\sigma_s - E_* \epsilon_*) (H^2 - h^2) / |w''|^2 \}, \quad a = 1 - \sum_k \omega_k$$

$$h(x_1) = \begin{cases} H, & h_* \geq H, \\ h_*, & h_* < H, \end{cases} \quad h_* = \frac{2\sigma_s}{Ea_1\sqrt{1-\nu+\nu^2}|w''|} \quad (3.22)$$

$$h_k(x_1) = \begin{cases} H, & h_k^* \geq H, \\ h_k^*, & h_k^* < H, \end{cases} \quad h_k^* = \frac{2\sigma_{sk}}{E_k|w''|\cos^2\psi_k} \quad (3.23)$$

где  $D_{11}$  имеет вид (2.2) с учетом (3.19), (3.23);  $P_0, P_1$  – постоянные интегрирования, определяемые из статических граничных условий; штрих означает дифференцирование по  $x_1$ ; кромки пластины определяются значениями  $x_1 = 0, D$ ; волокна предполагаются входящими в пластину на кромке  $x_1 = 0$ .

Из (3.22), (3.23) при  $h_* = H$  и  $h_k^* = H$  следует, что границы между зонами упругого и упругопластического деформирования фазовых материалов суть прямые линии, параллельные оси  $Ox_2$ . Рассматривая равенство (3.16) на одной из кромок пластины, получим граничное условие по изгибающему моменту (2.3) или (2.6).

Если толщина пластины  $H(x_1)$  и углы армирования  $\psi_k(x_1)$  заданы, то с учетом (1.37) из (3.17) можно определить интенсивности армирования  $\omega_k(x_1)$ . Тогда равенство (3.16) с учетом выражений (3.20) – (3.23) и (2.2) в каждой точке  $0 \leq x_1 \leq D$  определяет функцию  $w''(x_1)$ . Уравнение (3.16) при упругопластическом изгибе является нелинейным и для его решения можно использовать итерационный метод Эйткина [15]. Таким образом решается прямая задача расчета армированной пластины при упругопластическом цилиндрическом поперечном изгибе.

Если же решается задача РА, то в силу неравенства  $w'' \neq 0$  из условия рациональности (3.18) вытекает, что при цилиндрическом изгибе армирование по направлениям главных напряжений и деформаций совпадает с продольным (по направлению  $x_2$ ) и поперечным (по направлению  $x_1$ ) армированиями. Следовательно, существуют три альтернативных проекта РА: армирование в продольном, поперечном и продольно-поперечном направлениях. Расчеты показали, что из этих трех РА-структур армирование в поперечном ( $\psi_k = 0$ ) направлении обеспечивает максимальную несущую способность пластины как при упругом, так и при упругопластическом цилиндрическом изгибе. Кроме того, решения прямых задач цилиндрического изгиба прямолинейно армированных пластин ( $\psi_k = \text{const}$ ) позволяют утверждать, что на множестве таких структур армирования укладка волокон в поперечном направлении обеспечивает максимальную несущую способность прямоугольной удлиненной пластины.

В случае чистого изгиба ( $P_0 = -M_n, P_1 = 0, p(x_1) = 0$ ) пластины постоянной толщины, изготовленной из алюминиевого сплава АДН и армированной в поперечном направлении ( $\psi_1 = 0$ ) борными волокнами (значения механических характеристик фазовых материалов приведены в табл. 1), напряжения в арматуре на лицевых поверхностях ( $z = \pm H/2$ ), как следует из (3.19), (3.22) при  $h_* = H$ , по модулю не превышают 19% от предела прочности борных волокон ( $\sigma_{p1}$ ) при упругом деформировании связующего. Следовательно, при упругом изгибе бороалюминиевой пластины несущая способность волокон используется незначительно (менее чем на 20%). Если же потребовать, чтобы несущая способность волокон бора использовалась максимально, т.е.  $|\sigma_{01}| = \sigma_{p1}$ , то при упругопластическом изгибе пластины ее несущую способность можно повысить в несколько раз (в частности, в 4.45 раза при  $\omega_1 = 0.4$  и в 4.99 раза при  $\omega_1 = 0.7$ ) по сравнению с упругим изгибом.

Если же решается задача РП цилиндрически изгибаемой РА-пластины, то левая часть в (3.19) для одного из  $k$  должна иметь значение (1.31). При этом из (3.19), (1.31) определяем зависимость  $w''$  от  $H$  (углы  $\psi_k$  известны из (3.18)). После подстановки  $w''(H)$  в (3.21)–(3.23) и последних в (3.16) с учетом (3.17) получим нелинейное уравне-

Таблица 1

Материал	$E$ , ГПа	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\sigma_p$ , МПа	$\delta$ , %	$\nu$
Сплав АДН	71.0	100.0	150.0	6.0	0.31
Борные волокна	416.5	-	3150.0	0.2	0.23

ние относительно  $H(x_1)$ . Решая это уравнение в каждой точке  $0 \leq x_1 \leq D$ , получим распределение толщины пластины, обеспечивающее равнонапряженность волокон одного из семейств. В случае армирования в поперечном направлении ( $\psi_1 = 0$ ) получаем задачу, аналогичную задаче о профилировании равнопрочной изгибаемой балки. Поэтому не будем рассматривать этот пример более подробно, а обратимся к более сложной задаче.

В случае осесимметричного изгиба кольцевых пластин направления главных деформаций совпадают с радиальным и окружным. При этом возможны три альтернативных РА-проекта: радиальное армирование, окружное армирование и радиально-окружное армирование. Как показывают расчеты [16], при осесимметричном изгибе кольцевых пластин постоянной толщины, армирование по направлениям главных деформаций не всегда (не для всех композиций и не при всех условиях нагружения) обеспечивает максимальную несущую способность конструкции. Из трех же альтернативных РА-проектов наилучшим по прочности является проект с радиально-окружной структурой армирования при задании плотностей армирования в виде

$$\omega_1(r) = r_0 \omega_{01} / r, \quad \omega_2(r) = \omega_{01} - \omega_1(r) \quad (\omega_{01} = \omega_1(r_0), 0 < \omega_{01} \leq \omega_*) \quad (3.24)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  – интенсивности армирования радиального и окружного семейств соответственно;  $r_0$  – значение полярного радиуса  $r$ , определяющего внутренний контур пластины. Первое равенство (3.24) является следствием (1.33) в осесимметричном случае [16]; интенсивность же армирования окружного семейства  $\omega_2$  может быть задана произвольно [11] так, чтобы выполнялись физические ограничения (1.38). Задание  $\omega_2$  в виде (3.24) означает, что всюду в пластине при плоском армировании суммарная плотность армирования остается постоянной:  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{01} = \text{const}$ . При  $\omega_{01} = \omega_*$  получаем предельно допустимую суммарную плотность армирования в каждой точке пластины.

Уменьшить расход фазовых материалов в пластине с радиально-окружной структурой армирования можно за счет ее рационального профилирования. Для решения задач РП изгибаемых РА-пластин, по крайней мере в осесимметричном случае, можно использовать итерационный процесс, аналогичный тому, что предложен в [17] для определения профилей вращающихся дисков. Обсудим результаты проведенных расчетов.

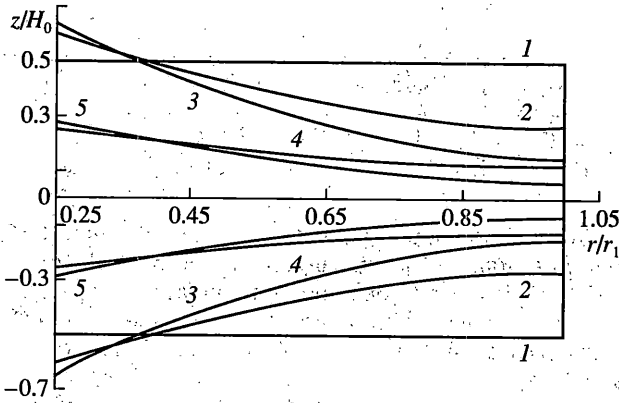
Пусть кольцевые бороалюминиевые пластины армированы по радиально-окружным направлениям, потребуем, чтобы на их лицевых поверхностях ( $z = \pm H/2$ ) для волокон радиального семейства выполнялось условие равнонапряженности (1.28) при  $k = 1$ .

Рассмотрим пластины, ограниченные кромками радиусов  $r_0, r_1$ , ( $r_0 = 0.25r_1$ ), жестко защемленные на внутренней кромке  $r_0$  ( $w_0 = \theta_n = 0$ ) и нагруженные на внешней кромке  $r_1$  изгибающим моментом  $M_n = -50tH_0^2 \sigma_{p1}$  ( $F_{nz} = 0$ ). На пластины действует равномерно распределенная поперечная нагрузка  $p(r) = t\sigma_{p1} = \text{const}$  ( $t \geq 0$  – параметр нагружения,  $H_0 = r_1/30$  – толщина эталонной (непрофилированной) пластины.)

В качестве критериев сопоставимости РП-пластин будем использовать объемное содержание волокон

$$V_f = \sum_k V_k, \quad V_k = \int_V \omega_k dV = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} H(r) \omega_k(r) r dr \quad (3.25)$$





и связующей матрицы

$$V_m = V - V_f = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} H(r) \left( 1 - \sum_k \omega_k(r) \right) r dr \quad (3.26)$$

в конструкции ( $V, V_k$  – объем пластины и арматуры  $k$ -го семейства).

Ломаная 1 на фигуре изображает профиль эталонной пластины (ЭП), армированной по радиально-окружным направлениям с интенсивностями (3.24) при  $\omega_{01} = 0.6$ . Методами, изложенными в [16], было установлено, что при чисто-упругом изгибе несущая способность ЭП исчерпывается при  $t = 0.3531 \cdot 10^{-4}$ , причем пластические деформации возникают в связующем на лицевых поверхностях пластины ( $z = \pm H_0/2$ ) в окрестности внутренней кромки  $r_0$ , а волокна имеют значительный запас по прочности и устойчивости.

Кривые 2 задают РП упругой пластины при плоском армировании с тем же законом распределения плотностей армирования (3.24), что и в ЭП ( $\omega_{01} = 0.6$ ). Для всех рассматриваемых ниже, упруго изгибаемых пластин уровень напряжений в равнонапряженной арматуре радиального семейства на лицевых поверхностях подбирался так, чтобы хотя бы в одной из точек пластины возникло начальное разрушение одного из фазовых материалов. При этом начальное разрушение характеризуется возникновением пластических деформаций в связующем на лицевых поверхностях пластины в окрестности внутренней кромки; армирующие волокна имеют значительный запас прочности ( $|\sigma_{01}| < 0.17\sigma_{p1}$ , как следует из табл. 2) и не теряют устойчивости [7]. Из табл. 2

Таблица 2

Характеристики	Упругий изгиб			Уругоупругий изгиб	
	Плоское армирование		Пространственное армирование	Плоское армирование	Пространственное армирование
	1	2			
$V_m/V_{m*}$	1.0	0.6923	0.5228	0.3061	0.2257
$V_f/V_{f*}$	1.0	0.6923	0.5553	0.3061	0.2439
$ \sigma_{01} /\sigma_{p1}$	–	0.1598	0.1694	1.0	1.0
$\max \sigma_2 /\sigma_{p1}$	–	0.0889	0.0715	0.5912	0.4126

(в которой номера столбцов соответствуют номерам профилей на фигуре и индексом "звездочка" помечены характеристики ЭП), следует, что в пластине с профилем 2 расход связующего и волокон составляет 69.23% от тех же величин в ЭП. При плоском армировании согласно (3.24)  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{01} = \text{const}$ , поэтому из (3.25), (3.26) следует  $V_m/V_{m*} = V_f/V_{f*} = V/V_*$ , где  $V_*$  – объем ЭП.

Профиль 3 на фигуре соответствует упругой пластине с пространственным армированием. В этом случае плотности армирования с учетом необходимого выполнения неравенств (1.38) задаются равенствами [11, 17]:

$$\omega_1(r) = \frac{H(r_0)r_0\omega_{01}}{H(r)r}, \quad \omega_2(r) = \begin{cases} \omega_{01} - \omega_1(r) & \text{при } \omega_{01} - \omega_1(r) > 0, \\ 0 & \text{при } \omega_{01} - \omega_1(r) \leq 0, \quad 0 < \omega_{01}, \quad \omega_1(r) \leq \omega_* \end{cases}$$

в расчетах принималось  $\omega_* = 1$ , поэтому, как видно из табл. 2,  $V_m/V_{m*} \neq V_f/V_{f*}$ . Сопоставление кривых 2, 3 и данных, приведенных в табл. 2 для этих профилей, показывает, что за счет пространственного армирования можно расход материалов связующего и волокон дополнительно уменьшить на 17 и 13.7% соответственно по сравнению с плоским армированием РП-пластины.

Как показывают значения  $|\sigma_{01}|/\sigma_{p1}$  и  $\max|\sigma_2|/\sigma_{p1}$ , приведенные в табл. 2 в столбцах с номерами 2, 3, при чисто упругом изгибе РП-пластин напряжения в равнонапряженных волокнах радиального семейства составляют по модулю всего 16–17%, а максимальные по модулю напряжения окружного семейства 7–9% от предела прочности борных волокон. Следовательно, при чисто упругом изгибе бороалюминиевых РП-пластин несущая способность волокон используется незначительно. Потребуем, чтобы напряжения в волокнах радиального семейства на лицевых поверхностях пластины достигали предела прочности ( $|\sigma_{01}| = \sigma_{p1}$ ). Тогда в связующем возникнут пластические деформации. Линии 4, 5 на фигуре характеризуют, соответственно, профили плоско и пространственно армированных пластин при упругопластическом изгибе. Сопоставление данных, приведенных в табл. 2 для профилей 2, 4 и 3, 5, показывает, что при равных условиях нагружения и армирования (при одинаковых  $\omega_{01}$ ) расход фазовых материалов при упругопластическом изгибе бороалюминиевой пластины можно уменьшить более чем в два раза по сравнению с упругим РП-проектом. Из сравнения данных, приведенных для профилей 4, 5, следует, что при упругопластическом изгибе использование пространственной радиально-окружной структуры армирования, как и при упругом изгибе, позволяет дополнительно сэкономить расход фазовых материалов по сравнению со случаем плоского армирования. Отметим, что при армировании пластины только в радиальном направлении выбор типа армирования (плоского или пространственного) практически не влияет на расход фазовых материалов: разница составляет доли процента.)

**Заключение.** Проведенные исследования и расчеты показывают, что решение сформулированной задачи РА поперечно изгибаемых пластин существует, причем могут существовать несколько альтернативных проектов армирования пластины по направлениям главных деформаций и напряжений. В пластинах с таким армированием не только исключается нежелательный взаимный сдвиг волокон, но в некоторых случаях (например, при цилиндрическом изгибе) обеспечивается максимальная несущая способность конструкции. Кроме того, дополнительное требование равнонапряженности волокон одного из семейств является эффективным критерием РП, позволяющим существенно (в разы) сэкономить расход фазовых материалов. За счет более полного использования несущей способности армирующих волокон при упругопластическом изгибе РА-пластин можно дополнительно (в разы) уменьшить расход материалов субструктурных элементов композиции по сравнению со случаем чисто упругого изгиба.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00161-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брызгалин Г.И. К рациональному армированию анизотропных плоских тел со слабым связующим // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 123–131.
2. Васильев В.В., Марциновский В.В. Оптимальное проектирование композитных материалов при плоском напряженном состоянии // Проектирование, расчет и испытание конструкций из композиционных материалов. М.: ЦАГИ, 1978. Вып. 6. С. 141–152.
3. Cooper A.A.G., Wu E.M. Trajectory fiber reinforcement of composites // Composite Materials in Engineering Design: Proc. 6<sup>th</sup> Symp., St. Louis, 1973. P. 377–382.
4. Колеров Н.Н. Расчет и проектирование баллонов из композиционных материалов // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. М.: ЦАГИ, 1978. Вып. 6. С. 153–160.
5. Васильев В.В. Оптимальное проектирование безмоментных армированных оболочек вращения // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. № 13. С. 7–13.
6. Бунаков В.А., Радвинский А.Л. К определению рациональной формы безмоментных оболочек вращения, изготовленных методом намотки из высокомодульных материалов // Механика полимеров. 1975. № 5. С. 822–828.
7. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
9. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
10. Немировский Ю.В. Об упругопластическом поведении армированного слоя // Прикладная механика и техническая физика. 1969. № 6. С. 81–89.
11. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 2. С. 20–40.
12. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
13. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
14. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О некоторых свойствах решения задачи поперечного изгиба пластины с равнонапряженной арматурой // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 2. С. 15–28.
15. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. 620 с.
16. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Влияние структуры армирования и теплового воздействия на несущую способность изгибаемых кольцевых пластин // Изв. вузов. Строительство. 2002. № 12. С. 4–12.
17. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное профилирование армированных вращающихся дисков // Механика композитных материалов. 2002. Т. 38, № 1. С. 3–24.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
10.04.2003