

УДК 539.375

© 2005 г. В.М. НИКИРЕЕВ

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНЫХ ЛЕДОВЫХ ПЛАСТИН

Для определения разрушающей нагрузки на плоскую льдину использовано предельное условие, учитывающее различные пределы прочности льда на сжатие и растяжение как в горизонтальной плоскости льдины, так и в вертикальном направлении [1]. Аналитическим методом характеристик [2–4] получено точное решение этой задачи для плоской деформации и плоского напряженного состояния. Выявлено, что величина предельной нагрузки существенно зависит от прочности льда на сжатие в плоскости льдины и в меньшей степени от прочности льда на сжатие в направлении толщины льдины. Известно, что пределы прочности твердых тел на одноосное сжатие устанавливаются приравнением этих пределов эмпирическим средним из набора испытываемых образцов. Приведена зависимость, определяющая требуемое количество образцов при установлении предельной прочности льда на сжатие в плоскости льдины в зависимости от числа образцов необходимых для определения предела прочности льда на сжатие в перпендикулярном направлении к плоскости льдины.

Предельное условие, предложенное Рейникке К. и Ральстоном Т., получено с использованием параболического критерия прочности [1]:

$$F(\sigma_{ij}) = a_1[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + a_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_4(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + a_6\tau_{xy}^2 + a_7(\sigma_x + \sigma_y) + a_9\sigma_z - 1 = 0, \quad a_6 = 2(a_1 + 2a_3) \quad (1)$$

Декартовы оси x, y расположены в горизонтальной плоскости льдины, ось z направлена вертикально.

Плоская деформация. В [1] предполагается, что такая деформация реализуется, когда узкий штамп шириною W внедряется в толстую льдину толщиной H , т.е. когда $H \gg W$.

Исходя из ассоциативного закона течения имеем

$$\partial F / \partial \sigma_z = \partial F / \partial \tau_{yz} = \partial F / \partial \tau_{zx} = 0$$

$$\sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 - a_9 / (4a_1), \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

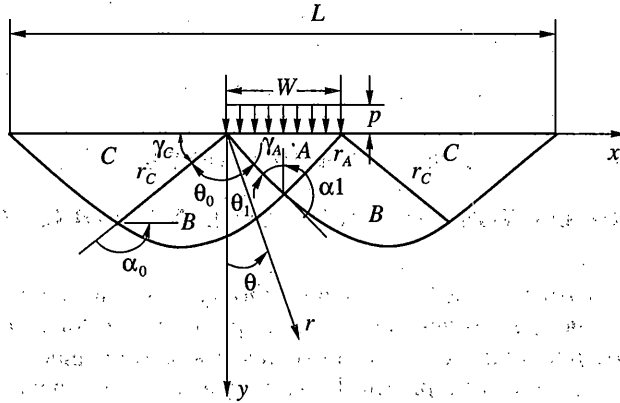
С учетом этих соотношений условие (1) принимает вид

$$F(\sigma_{ij}) = a_6[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] / 4 + b_1(\sigma_x + \sigma_y) / 2 - b_0 = 0 \quad (2)$$

$$b_1 = 2a_7 + a_9, \quad b_0 = 1 + a_9^2 / (8a_1)$$

Положим $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$, $\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2$ (σ_1, σ_2 – главные напряжения). Тогда $\sigma_{x,y} = \sigma \pm (\tau^2 - \tau_{xy}^2)^{1/2}$ и уравнение (2) запишется в следующем виде:

$$F(\sigma, \tau) = a_6\tau^2 + b_1\sigma - b_0 = 0 \quad (3)$$



Последовательно полагая в уравнении (1) $\sigma_z = -C_z$ и T_z , $\sigma_x = -C_x$ и T_x получим следующие значения постоянных a_1, a_3, a_7, a_9 :

$$a_1 = 1/(2C_z T_z), \quad a_3 = 1/(C_x T_x) - a_1, \quad a_7 = 1/T_x - 1/C_x, \quad a_9 = 1/T_z - 1/C_z$$

где C_x, C_z, T_x, T_z – абсолютные значения пределов прочностей на сжатие и растяжение в горизонтальной плоскости льдины и в вертикальном направлении z .

В зависимости для a_1 в [1] допущена опечатка.

Из уравнения (3) имеем

$$\sigma = (b_0 - a_6 \tau^2)/b_1, \quad d\sigma/d\tau = \tau/b, \quad b = -b_1/2a_6 \quad (4)$$

Так как $C_x > T_x, C_z > T_z$, то $a_7 > 0, a_9 > 0$ и $b_1 > 0$.

Для льда, у которого $C_z T_z > C_x T_x/4, a_6 > 0$ и, следовательно, $b < 0$, т.е. $d\sigma/d\tau > 0$ при $\sigma_1 < 0$ (сжатие).

Полагая $d\tau/d\sigma = \cos^2 \gamma$ [2] для плоской задачи получим уравнение характеристик в прямоугольной декартовой системе координат $dy/dx = \operatorname{tg}(\alpha \pm \gamma)$; α – угол между координатной осью x и направлением главного напряжения σ_1 ; $\pm \gamma$ – угол между σ_1 и направлением характеристик:

$$2\gamma = \arccos(b/\tau) \quad (5)$$

Предельная область состоит из трех зон А, В, С (фигура).

Зона С. В треугольной зоне С напряжение $\sigma_2 = 0$, т.е. $\sigma = \tau = \tau_c$. Из уравнения (3) имеем

$$\tau_c = b - (b^2 + b_0/a_6)^{1/2} \quad (6)$$

Знак плюс исключается, так как $\tau_c < 0$. Зная τ_c из (5) находим γ_c .

Зона В. Уравнение характеристик в полярных координатах имеет вид $r d\theta/dr = \operatorname{tg}(\alpha \pm \gamma)$, где α – угол между текущим радиусом r и направлением σ_1 .

В этой зоне первое семейство – радиальные характеристики, второе семейство – криволинейные характеристики. Последние пересекаются радиальными характеристиками под переменным углом, зависящим от полярного угла θ .

Соотношения между τ, α, θ определяется из системы уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha d\tau + 2\tau \cos 2\alpha (d\alpha + d\theta) &= 0 \\ (d\sigma/d\tau - \cos 2\alpha) d\tau + 2\tau \sin 2\alpha (d\alpha + d\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Ненулевое решение для неизвестных $d\tau$ и $2\tau(d\alpha + d\theta)$ существует, если $(d\sigma/d\tau)\cos 2\alpha = 1 = \cos 2\alpha/\cos 2\gamma$, откуда имеем

$$\cos 2\gamma = \cos 2(\pi - \gamma), \quad \gamma = \pi - \alpha \quad (8)$$

Учитывая зависимости (4, 5, 8) из любого уравнения системы (7) получим

$$(\tau^2 - b^2)^{1/2} d\tau/\tau = 2b(d\theta - d\gamma) \quad (9)$$

На границе зон B и C начальное значение разности углов $\theta_0 - \gamma_C = -\pi/2$. На границе зон B и A конечное значение углов $\theta_1 - \gamma_A = 0$. Интегрируя (9) в пределах от τ_C до τ_A , а также $\theta_0 - \gamma_C = -\pi/2$ до $\theta_1 - \gamma_A = 0$ получим определяющее уравнение для нахождения τ_A :

$$(t_A^2 - 1)^2 - (t_C^2 - 1)^2 + \arccos(1/t_C) - \arccos(1/t_A) = \pi \quad (10)$$

$$t_A = \tau_A/b, \quad t_C = \tau_C/b$$

Значение σ_A находим из уравнения (3). Зная σ_A и τ_A определяем главные напряжения σ_1 и σ_2 в зоне A . Угол γ_A находим из выражения (5).

Определим конфигурацию зоны B . Дифференцируем выражение (5) $d\gamma = b(\tau^2 - b^2)^{-1/2} d\tau/(2\tau)$. Исключаем из уравнения (9) $d\gamma$.

$$d\theta = (\tau^2 - b^2)^{-1/2} \tau d\tau/(2b) \quad (11)$$

Для криволинейных характеристик с учетом (8) и (5) имеем

$$d\theta = -\operatorname{tg} 2\gamma dr/r = -(\tau^2 - b^2)^{1/2} dr/(rb) \quad (12)$$

Приравнивая правые части уравнений (11) и (12) получим

$$dr/r = -\tau d\tau/(2(\tau^2 - b^2))$$

Интегрируем и учитывая, что $r = r_C$ при $\tau = \tau_C$ получим формулу, определяющую переменный радиус r характеристик зоны B в зависимости от τ :

$$r = r_C [(\tau_C^2 - b^2)/(\tau^2 - b^2)]^{1/4} \quad (13)$$

Из этого выражения, зная τ_A , находим r_A в зависимости от r_C . Из равенства $r_A = W/(2 \sin \gamma_A)$ определяем r_C .

Зона А. В этой зоне оба семейства характеристик – прямые линии, образующие с горизонталью угол $\pi/2 - \gamma_A$. Главные напряжения σ_1 и σ_2 постоянны и направлены, соответственно, вертикально и горизонтально, т.е. $\sigma_1 = -p$.

Пример 1. Пределы прочности пресноводного льда при 0°C взяты из [1]: $C_x = 2.54$ МПа, $C_z = 7.23$ МПа, $T_x = 1.02$ МПа, $T_z = 1.1$ МПа.

Имеем $a_1 = 0.406 C_x^{-2}$, $a_3 = 2.08 C_x^{-2}$, $a_7 = 1.49 C_x^{-1}$, $a_9 = 1.96 C_x^{-1}$, $a_6 = 9.13 C_x^{-2}$, $b_1 = 4.94 C_x^{-1}$, $b = -0.27 C_x$, $b_0 = 2.18$.

Из уравнений (6) и (10) имеем $\tau_C = -0.83 C_x$, $\tau_A = -1.7 C_x$. Из (4) находим $\sigma_A = -4.9 C_x$. Протяженность предельной области $L = 4.7 W(\gamma_C = 33.5^\circ; \gamma_A = 40.4^\circ)$.

Окончательно имеем $\sigma_1 = -p = -6.6 C_x = -16.8$ МПа; $\sigma_2 = -8.1$ МПа; $\sigma_z = -6.1$; $C_x = -15.5$ МПа. В [1] приведены нижние и верхние оценки предельных давлений, полученных энергетическим методом, а именно, $6.15 C_x$ и $7.02 C_x$. Полученное точное решение удовлетворяет неравенству $6.15 C_x < |\sigma_1| < 7.02 C_x$.

Плоское напряженное состояние ($\sigma_z = 0$). Из (1) имеем

$$2a_1(\sigma^2 + \tau^2) + 4a_3\tau^2 + 2a_7\sigma - 1 = 0 \quad (14)$$

$$\sigma = [-a_7 \pm (A_1 - B_1\tau^2)^{1/2}] / (2a_1) \quad (15)$$

$$A_1 = a_7^2 + 2a_1 = 3.03C_x^{-2}, \quad B_1 = 2a_1a_6 = 7.41C_x^{-4}$$

Далее найдем

$$d\tau/d\sigma = \cos 2\gamma = \pm(A_1 - B_1\tau^2)^{1/2} / (a_6\tau) \quad (16)$$

Зона С. Так как $\sigma_2 = 0$, то $\sigma = \tau = \tau_C = -C_x/2$; $\gamma_C = 38.1^\circ$.

Зона В. Из уравнений (7) и (8) с учетом выражения (16) получим

$$\pm[(a_0\tau^2 - 1)/(1 - f_0\tau^2)]^{1/2} d\tau/\tau = 2(d\theta - d\gamma) \quad (17)$$

$$a_0 = (a_6^2 + B_1)/A_1 = 30C_x^{-2}, \quad f_0 = B_1/A_1 = 2.45C_x^{-2}$$

Интегрируя это уравнение с учетом граничных условий, получим $\tau_A = -0.61C_x$. Интеграл выражается в элементарных функциях. Из формулы (15) находим $\sigma_A = -2.42C_x$. Предельное напряжение под штампом $\sigma_1 = -p = -3.034C_x = -7.7$ МПа, оно удовлетворяет неравенству $2.94C_x < |\sigma_1| < 3.27C_x$. Здесь $2.94C_x$ и $3.27C_x$ – нижняя и верхняя оценки предельных давлений, приведенных в [1]. Протяженность пластической области $L = 3.4 W$, так как $\gamma_A = 47.5^\circ$ и $r_C = r_A[(a_0\tau_A^2 - 1)/(a_0\tau_C^2 - 1)]^{1/4}$. Отметим, что точка с координатами σ_A, τ_A находится на спадающей ветви предельной кривой (14) и потому $\cos 2\gamma_A < 0$.

Известно, что морской лед менее прочен, чем пресноводный лед. Поэтому желательно выяснить – как падает предельное давление p в зависимости от снижения C_x или C_z ?

Проведенные расчеты показали, что при C_x равном $2.54/2 = 1.27$ МПа предельное давление p снижается с 7.7 МПа до 3.3 МПа.

При C_z равном $7.23/2 = 3.615$ МПа предельное давление p снижается с 7.7 МПа до 5.7 МПа.

Эти цифры показывают, что несмотря на то, что $C_z \gg C_x$, предельное давление p в большей степени зависит от C_x и в меньшей степени от C_z . Это обстоятельство требует при установлении пределов прочности существенного превышения числа испытываемых образцов n при определении C_x относительно числа образцов k при определении C_z .

Исходя из эмпирической дисперсии выборки образцов можно рекомендовать следующее соотношение, учитывающее разброс прочностных показателей образцов C_{xi} и C_{zi} :

$$DC_z \geq (C_z/C_x)^{1/2} DC_x$$

$$DC_z = S_{zk}/(k-1), \quad S_{zk} = \sum_{i=1}^k (C_{zi} - C_z)^2, \quad C_z = \left(\sum_{i=1}^k C_{zi} \right) / k \quad (18)$$

$$DC_x = S_{xn}/(n-1), \quad S_{xn} = \sum_{i=1}^n (C_{xi} - C_x)^2, \quad C_x = \left(\sum_{i=1}^n C_{xi} \right) / n$$

Из выражения (18) получаем требуемое соотношение для числа образцов n и k :

$$(n-1)/(k-1) \geq (C_z/C_x)^{1/2} S_{xn}/S_{zk} \quad (19)$$

Так, при $C_x = C_z$ получаем $n = k$. При $C_x = C_z/3$ $k = 6$ и, например, при $S_{xn}/S_{zk} = 1.5$ получаем, что $n \geq 14$.

Полученное аналитическое решение дает возможность уточнять приближенные методы расчета и более корректно планировать выполнение экспериментальных работ по оценке воздействия ледовых полей на платформы в северных морях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рейникке К. Аналитический метод определения ледовых нагрузок, использующий теорию пластичности // Физика и механика льда. М.: Мир, 1983. С. 310–326.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
4. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
5. Никиреев В.М. Задача Прандтля для плоского напряженного состояния // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 106–110.

Москва

Поступила в редакцию
22.07.2003