МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2005

УДК 531.2

© 2005 г. И.И. АРГАТОВ

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЙ

Изучена задача об определении условий предельного равновесия твердого тела, опирающегося на шероховатую плоскость, в предположении осевой симметрии распределения нормальных давлений. Силы трения подчиняются закону Амонтона – Кулона. Решение задачи получено в рамках теории Жуковского. Введено понятие кривой предельного равновесия и доказана ее выпуклость. Получено достаточное условие равновесия. Рассмотрена задача о торможении диска, движущегося по шероховатой плоскости, в предположении осевой симметрии распределения массы и нормальных давлений. Показано, что в момент остановки линейная и угловая скорости обращаются в нуль одновременно[1].

1. Постановка задачи. Пусть твердое тело опирается на шероховатую плоскость с коэффициентом трения f по площадке ω, передавая на основание (неотрицательное) нормальное давление p. Для определенности будем считать, что тело расположено в области $z \geq 0$ и с опорной плоскостью свяжем систему координат Oxy. Рассмотрим задачу об определении ограничений, налагаемых на интегральные характеристики сдвигающих нагрузок (проекции F_x, F_y и M_z главного вектора и главного момента), при достижении которых тело теряет положение равновесия, начиная скольжение по плоскости.

Согласно закону Амонтона – Кулона направление сил трения противоположно направлению начинающегося движения, а их величина пропорциональна нормальному давлению. Обозначим через (x, y) координаты центра вращения (точка C). Тогда уравнения статического равновесия в предельном положении имеют вид

$$F_x + \sigma f \iint_{\omega} \frac{(\eta - y)p(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 0 \tag{1.1}$$

$$F_y - \sigma f \iint_{\omega} \frac{(\xi - x)p(\xi, \eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 0 \tag{1.2}$$

$$M_z - xF_y + yF_x - \sigma f \iint_{\omega} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, p(\xi, \eta)d\xi d\eta = 0 \tag{1.3}$$

Здесь знак $\sigma = \pm 1$ указывает направление начального вращения. Значения величин x, y и σ априори не известны и должны определяться по предельно возможным значениям интегральных характеристик сдвигающих нагрузок.

[1] Результаты работы докладывались на Международной научно-практической конференции "Третьи Окуневские чтения" (Санкт-Петербург, 24–29 июня 2002 г.).

Впервые задача о предельном равновесии твердого тела на шероховатой плоскости была поставлена в [1]. В [2] были изучены основные свойства функции момента сил трения (относительно центра вращения), с точностью до умножения на коэффициент трения f равной

$$Z(x, y) = \iint_{\omega} \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \tag{1.4}$$

Функция Жуковского (1.4) для случая равномерного опирания на круговую площадку ω была вычислена в [3]. Решение данной задачи используется при расчете устойчивости сооружений с плоской подошвой на сдвиг эксцентричной силой (см. статью [5], где рассмотрен случай прямоугольной площадки ω). В настоящей работе методом [2] исследуется задача об определении условий предельного равновесия в случае произвольного осесимметричного распределения нормальных давлений.

2. Функция Жуковского. Пусть площадка ω представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом a. (Все основные результаты немедленно обобщаются на случай кольцевой области ω.) Введем полярные координаты ρ и φ. Тогда плотность нормальных давлений p будет функцией только координаты ρ. В силу осевой симметрии функция Жуковского также не будет зависеть от угловой координаты φ.

Не умаляя общности, положим, что центр вращения лежит на оси Ox на расстоянии r от центра площадки ω. В результате будем иметь

$$Z(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi}\, p(\rho)\rho\, d\rho\, d\varphi \tag{2.1}$$

Интегрируя по переменной φ (см. формулу (2.576.2) [4]), получаем

$$Z(r) = 4\int_0^{a} (r+\rho)\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) p(\rho)\rho\, d\rho \tag{2.2}$$

где $\mathbf{E}$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Если центр вращения C лежит вне площадки опоры ω, т.е. $a \le r$, то согласно формуле (8.126.4) [4] находим

$$Z(r) = 4r\int_0^{a} \left[2\mathbf{E}\left(\frac{\rho}{r}\right) - \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)\mathbf{K}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right] p(\rho)\rho\, d\rho \tag{2.3}$$

Если же центр вращения C оказывается внутри площадки ω, точнее говоря $0 < r < a$, то

$$\begin{aligned} Z(r) = {} & 4r\int_0^{r} \left[2\mathbf{E}\left(\frac{\rho}{r}\right) - \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)\mathbf{K}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right] p(\rho)\rho\, d\rho + \\ & + 4\int_r^{a} \left[2\mathbf{E}\left(\frac{r}{\rho}\right) - \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)\mathbf{K}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right] p(\rho)\rho^2\, d\rho \end{aligned} \tag{2.4}$$

Наконец, при вращении относительно центра площадки будем иметь

$$Z(0) = 2\pi\int_0^{a} p(\rho)\rho^2\, d\rho \tag{2.5}$$

В случае квадратичного распределения нормальных давлений $p(\rho) = A + B\rho^2$, используя формулы (5.111) [4], интегралы (2.3), (2.4) можно свести к эллиптическим. Так, если $a < r$, то

$$Z(r) = \frac{4}{9}Ar^3\left[\left(1+7\frac{a^2}{r^2}\right)\mathbf{E}\left(\frac{a}{r}\right)-\left(4+3\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\mathbf{K}\left(\frac{a}{r}\right)\right]+$$
$$+\frac{4}{225}Br^5\left\{\left(4+\frac{a^2}{r^2}+99\frac{a^4}{r^4}\right)\mathbf{E}\left(\frac{a}{r}\right)-\left(64+48\frac{a^2}{r^2}+45\frac{a^4}{r^4}\right)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\mathbf{K}\left(\frac{a}{r}\right)\right\} \quad (2.6)$$

Если же $0 \le r < a$, то

$$Z(r) = \frac{4}{9}Aa^3\left[\left(\frac{r^2}{a^2}+7\right)\mathbf{E}\left(\frac{r}{a}\right)-4\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\mathbf{K}\left(\frac{r}{a}\right)\right]+$$
$$+\frac{4}{225}Ba^5\left\{\left(4\frac{r^4}{a^4}+\frac{r^2}{a^2}+99\right)\mathbf{E}\left(\frac{r}{a}\right)-\left(54-2\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\mathbf{K}\left(\frac{r}{a}\right)\right\} \quad (2.7)$$

В случае равномерного распределения нормальных давлений ($B = 0$) формулы (2.6), (2.7) совпадают с результатами [3].

3. Неравенство Жуковского. Покажем, что для функции Жуковского имеет место следующее неравенство [2]:

$$Z(r) > rN \quad (3.1)$$

где N – сила нормального давления, т.е.

$$N = 2\pi\int_0^a p(\rho)\rho d\rho \quad (3.2)$$

Действительно, для $r \ge a$ неравенство (3.1) вытекает из представления (2.3) и неравенства

$$\frac{2}{\pi}[2\mathbf{E}(k)-(1-k^2)\mathbf{K}(k)] > 1 \quad (0 < k^2 < 1) \quad (3.3)$$

Воспользовавшись известными разложениями

$$\frac{2}{\pi}\mathbf{E}(k) = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}, \quad \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(k) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n}$$

справедливыми при $k^2 < 1$, находим

$$\frac{2}{\pi}[2\mathbf{E}(k)-(1-k^2)\mathbf{K}(k)] = 1+\frac{1}{2^2}k^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}\right]^2 k^{2n} \quad (3.4)$$

Очевидно, что при $k \ne 0$ все члены ряда (3.4) положительны, что и доказывает неравенство (3.3).

В случае $0 < r < a$ дополнительно следует заметить, что $\rho > r$ во втором интеграле в представлении (2.4).

Дифференцируя обе части равенства (2.1), получаем

$$\frac{dZ}{dr} = 2\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{r-\rho\cos\varphi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}}p(\rho)\rho d\rho d\varphi \tag{3.5}$$

Используя формулы (2.571.5) и (2.576.2) [4], находим

$$\frac{dZ}{dr} = 2\int_0^a\left[\frac{r+\rho}{r}\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)+\frac{r-\rho}{r}\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\right]p(\rho)\rho d\rho$$

При помощи формул (3.674.1) и (3.674.3) [4] нетрудно вывести аналогичные формулы (2.3) и (2.4) выражения для производной функции Жуковского. В частности, будем иметь:

$$\frac{dZ}{dr} = 4\int_0^a\mathbf{E}\left(\frac{\rho}{r}\right)p(\rho)\rho d\rho \quad (r>a) \tag{3.6}$$

Отсюда следует неравенство

$$dZ/dr < N \tag{3.7}$$

Далее, дифференцируя обе части равенств (3.5) и (3.6), находим

$$\frac{d^2Z}{dr^2} = 2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi)^{3/2}}p(\rho)\rho d\rho$$

$$\frac{d^2Z}{dr^2} = \frac{4}{r}\int_0^a\left[\mathbf{K}\left(\frac{\rho}{r}\right)-\mathbf{E}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right]p(\rho)\rho d\rho \quad (r>a)$$

что иллюстрирует выпуклость графика функции Жуковского.

4. Условие предельного равновесия. При вращении твердого тела вокруг точки $C(x, y)$ в положительном направлении проекции главного вектора сил трения T выражаются через функцию Жуковского по формулам [2]:

$$T_x(x, y) = -f\frac{\partial Z}{\partial y}(x, y), \quad T_y(x, y) = f\frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) \tag{4.1}$$

Введем проекции вектора $\boldsymbol{T}$ на орты полярной системы координат $T_r = T_x\cos\varphi + T_y\sin\varphi$, $T_\varphi = -T_x\sin\varphi + T_y\cos\varphi$. Используя соотношения

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial Z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}$$

преобразуем формулы (4.1) к виду

$$T_r = -f\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}, \quad T_\varphi = f\frac{\partial Z}{\partial r}$$

При осесимметричном распределении нормального давления функция Жуковского зависит только от координаты r, т.е. $\partial_\varphi Z = 0$ и, следовательно, $T_r = 0$.

Пусть к твердому телу, опирающемуся на круговую площадку ω, приложена сдвигающая сила $F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$, линия действия которой отстоит от центра площадки на расстоянии b. (Для определенности можно считать, что $M_z = +b\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.) Согласно теореме Жуковского [2] в положении предельного равновесия данная сила должна уравновешиваться силой трения площадки, действующей вдоль заданной прямой.

Так как в силу симметрии сила трения площадки перпендикулярна прямой, проходящей через центр круговой площадки ω и центр вращения C, то последний должен лежать на прямой, проходящей через центр площадки ω и перпендикулярной линии действия сдвигающей силы $F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$. При этом согласно неравенству Жуковского (3.1) центр вращения C отстоит от линии действия сдвигающей силы дальше, нежели центр опорной площадки. Таким образом, уравнения равновесия твердого тела в предельном положении могут быть записаны так (штрихом обозначается производная по переменной r):

$$fZ' = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad fZ = (r+b)\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{4.2}$$

Ясно, что равновесие возможно лишь при условии $\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \le fN$, причем знак равенства отвечает случаю приложения сдвигающей силы к центру площадки опоры. Если величина b отлична от нуля, то равновесие возможно лишь при условии

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \le fZ' \tag{4.3}$$

где радиус r, равный расстоянию центра вращения C от центра площадки опоры, отыскивается как корень уравнения (сравните с [3], § 6.6, пример 7°):

$$Z/Z' - r = b \tag{4.4}$$

Когда действующие на твердое тело сдвигающие нагрузки характеризуются главным вектором $F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{i}$ и главным моментом $M_z\mathbf{k}$, плечо статически эквивалентной сдвигающей силы определяется по формуле

$$b = |M_z|/\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{4.5}$$

Если же $F_x = F_y = 0$ и сдвигающие нагрузки приводятся к паре, то согласно первому уравнению (4.2) получаем $r = 0$ и равновесие будет возможно лишь при условии

$$|M_z| \le fZ_0 \tag{4.6}$$

где введено обозначение $Z_0 = Z(0)$.

5. Кривая предельного равновесия. Введем безразмерные величины

$$F = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{fN}, \quad M = \frac{|M_z|}{fZ_0} \tag{5.1}$$

Согласно неравенствам (3.7), (4.3) и (4.6) справедливы ограничения $F \le 1$ и $M \le 1$.

На плоскости переменных F и M построим кривую, характеризующую положение предельного равновесия. Ясно, что она должна лежать в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ и проходить через точки $F = 0$, $M = 1$ и $F = 1$, $M = 0$.

Первый способ построения кривой предельного равновесия заключается в следующем. По заданному значению переменной F определяем значение радиуса r из первого уравнения (4.2). После чего из второго уравнения (4.2) при учете обозначения (4.5) находим соответствующее значение переменной M. Заметим, что зависимость переменной $r \in (0, +\infty)$ от $F \in (0, 1)$ взаимно однозначная, поскольку при $r > 0$ имеем $Z'(r) > 0$. Последнее неравенство вытекает из неравенства $Z''(r) > 0$ и начального значения $Z'(0) = 0$.

Второй способ подразумевает параметрическое задание кривой предельного равновесия. Так, из уравнений (4.2) выводим ее параметрические уравнения в виде

$$F = \frac{1}{N}Z'(r), \quad M = \frac{Z(r)}{Z_0} - \frac{r}{Z_0}Z'(r) \quad (0 \le r \le +\infty) \tag{5.2}$$

Покажем, что кривая, определяемая уравнениями (5.2), выпукла. Для этого вычислим ее кривизну

$$\kappa(r) = \frac{F'M'' - M'F''}{[(F')^2 + (M')^2]^{3/2}}$$

$$F' = \frac{1}{N}Z''(r), \quad M' = -\frac{r}{Z_0}Z''(r) \tag{5.3}$$

$$F'' = \frac{1}{N}Z'''(r), \quad M'' = -\frac{Z''(r)}{Z_0} - \frac{r}{Z_0}Z'''(r)$$

Видно, что

$$F'M'' - M'F'' = -\frac{1}{NZ_0}Z''(r)^2 \tag{5.4}$$

$$(F')^2 + (M')^2 = \left(\frac{1}{N^2} + \frac{r^2}{Z_0^2}\right)Z''(r)^2 \tag{5.5}$$

Таким образом, получаем, что величина (5.3) отрицательна. Поскольку при изменении параметра r в пределах от 0 до $+\infty$ движение происходит от точки $F = 0$, $M = 1$ до точки $F = 1$, $M = 0$ по часовой стрелке, знак кривизны $\kappa(r)$ и указывает на выпуклость кривой предельного равновесия.

6. Достаточное условие равновесия твердого тела на шероховатой плоскости. Из свойства выпуклости кривой предельного равновесия следует, что эта кривая располагается выше отрезка, соединяющего точки (0, 1) и (1, 0).

Таким образом, если выполняется неравенство $F + M \le 1$ или

$$\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{fN} + \frac{|M_z|}{fZ_0} \le 1 \tag{6.1}$$

то тело заведомо будет находиться в равновесии. Условие (6.1) является достаточным.

Необходимое условие равновесия может быть записано в виде

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{fN}, \frac{|M_z|}{fZ_0}\right) \le 1 \tag{6.2}$$

где $\varphi(F, M) = 1$ – уравнение кривой предельного равновесия, причем неравенство $\varphi(F, M) \le 1$ определяет ограниченную часть первого квадранта.

Отметим, что уравнение кривой предельного равновесия не зависит от коэффициента трения f и не изменяется при пропорциональном увеличении плотности нормальных давлений.

Расчеты показывают, что в случае равномерного распределения нормальных давлений кривая $\varphi(F, M) = 1$ лежит внутри окружности $F^2 + M^2 = 1$. Однако в общем случае это неверно.

Действительно, вычислим кривизну кривой предельного равновесия в ее вершинах. Так, согласно формулам (5.3), (5.4) и (5.5) имеем:

$$|\kappa(r)| = \frac{N^2}{Z_0}\left(1+\frac{N^2r^2}{Z_0^2}\right)^{-3/2}\frac{1}{Z''(r)} \tag{6.3}$$

Подставляя сюда значение $r = 0$, получаем

$$|\kappa(0)| = \frac{N^2}{Z_0Z''(0)} \tag{6.4}$$

$$Z''(0) = \pi\int_0^a p(\rho)d\rho \tag{6.5}$$

Переходя в формуле (6.3) к пределу при $r \to +\infty$, находим

$$|\kappa(+\infty)| = \frac{Z_0^2}{NZ_1} \tag{6.6}$$

$$Z_1 = \lim_{r\to\infty} r^3Z''(r) = \pi\int_0^a p(\rho)\rho^3 d\rho \tag{6.7}$$

Положим

$$p(r) = p_1(r/a)^\gamma \tag{6.8}$$

где p_1 – значение нормального давления на краю площадки. При $\gamma > -1$ все величины, фигурирующие в формулах (6.4) и (6.6), конечны. Опуская несложные выкладки, приведем результаты вычислений:

$$|\kappa(0)| = \frac{2(\gamma+3)(\gamma+1)}{(\gamma+2)^2}, \quad |\kappa(+\infty)| = \frac{2(\gamma+2)(\gamma+4)}{(\gamma+3)^2}$$

Видно, что $|\kappa(0)| = 1$ при $\gamma = -2 + \sqrt{2}$. При этом для $-1 < \gamma < -2 + \sqrt{2}$ кривая предельного равновесия, отвечающая распределению нормальных давлений (6.8), в малой окрестности точки (0, 1) выходит за пределы единичного круга.

В [6] было введено понятие условий гарантированного равновесия, обеспечивающих равновесие твердого тела на шероховатой плоскости при любом распределении нормальных реакций в статически неопределимом случае. В случае опирания именно на круговую площадку подход [6] непосредственно не применим.

Так, рассмотрим распределение нормальных реакций

$$p(r) = p_0(1-r^2/a^2)^\beta \tag{6.9}$$

где p_0 – максимальное (при $\beta > 0$) или минимальное (при $-1 < \beta < 0$) значение нормальных давлений. По формулам (3.2) и (2.5) находим

$$N = \frac{p_0a^2}{\beta+1}, \quad Z_0 = \frac{\pi^{3/2}p_0a^3\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\beta+(5/2))}$$

Нормальные реакции будут уравновешены весом тела, если $p_0 = (\beta + 1)N/(\pi a^2)$ и, следовательно,

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\pi}aN\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\beta+2+(1/2))}$$

По свойствам гамма-функции устанавливаем, что $Z_0 \to 0$ при $\beta \to +\infty$. Напомним, что геометрическое место точек на плоскости переменных $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ и $|M_z|$, при которых возможно равновесие, заведомо заключено в прямоугольнике $0 \le \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \le fN$ и $0 \le |M_z| \le \le fZ_0$. Тем самым, для плотности нормальных реакций вида (6.9) при любом наперед заданном значении $|M_z| \ne 0$ найдется такое значение показателя эпюры β, превышение которого приводит к невозможности равновесия при заданных сдвигающих нагрузках.

7. Об условии остановки диска, движущегося по шероховатой плоскости. Следуя [7], рассмотрим торможение диска под действием сил сухого трения. Будем считать, что двумерная плотность $\chi(r)$ распределения массы в диске (так же как и плотность $p(r)$ нормального давления) зависит только от расстояния r до центра диска. Обозначим через m и I массу диска и центральный момент инерции относительно вертикальной оси, причем

$$m = 2\pi\int_0^a \chi(r)rdr, \quad I = 2\pi\int_0^a \chi(r)r^3dr$$

Заметим, что в силу неотрицательности плотности $\chi(r)$, отличной от тождественного нуля, выполняется неравенство

$$I/(a^2m) < 1 \tag{7.1}$$

Движение диска описывается следующими уравнениями [7]:

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{T}, \quad I\dot{\omega} = L_O \tag{7.2}$$

Здесь $\mathbf{V}$ – вектор скорости центра масс диска, ω – угловая скорость его вращения, $\mathbf{T}$ – главный вектор сил трения, приложенных к поверхности диска, L_O – величина главного момента сил трения относительно центра масс.

В [7] исследован случай равномерного распределения нормальных давлений. В [8] изучен случай распределения нормальных давлений по закону Герца

$$p(r) = p_0(1 - r^2/a^2)^{1/2}$$

Случай распределения нормальных давлений по закону Буссинеска

$$p(r) = p_0(1 - r^2/a^2)^{-1/2}$$

с применением метода работы [8] изучался в [9]. Ниже задача о торможении диска, движущегося по шероховатой плоскости, рассматривается в предположении осевой симметрии произвольного распределения массы и нормальных давлений.

Следуя [7], систему координат свяжем с центром диска и обозначим через $\mathbf{r} = = r(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)$ радиус-вектор, соединяющий начало координат с элементом площади $dS = rdrd\varphi$, где r и φ – полярные координаты. Тогда скорость элемента dS будет равна $\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ – вектор угловой скорости диска, и согласно закону Амонтона – Кулона получаем

$$\mathbf{T} = -f\iint_\omega \frac{\mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}}{|\mathbf{V} + \omega \times \mathbf{r}|}p(r)dS \tag{7.3}$$

$$L_O\mathbf{k} = -f\iint\limits_{\omega}\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|}p(r)dS \tag{7.4}$$

Введем координаты x_c и y_c мгновенного центра вращения, исходя из равенства $\mathbf{V}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_C)$:

$$x_C = -V_y/\omega, \quad y_C = V_x/\omega \tag{7.5}$$

Тогда силу трения площадки опоры (7.3) можно записать так:

$$\mathbf{T} = -\sigma f\iint\limits_{\omega}\frac{-(y-y_C)\mathbf{i}+(x-x_C)\mathbf{j}}{\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}}p(r)dxdy$$

Здесь $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\sigma = \operatorname{sign}\omega$ – знак угловой скорости ω, определяющий направление вращения.

Соответственно для момента сил трения относительно центра диска согласно формуле (7.4) получаем выражение $L_O = L_C + x_CT_y - y_CT_x$, где L_C – величина момента сил трения относительно центра вращения, причем

$$L_C = -\sigma f\iint\limits_{\omega}\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}p(r)dxdy$$

Таким образом, при помощи функции Жуковского

$$Z(x_C, y_C) = \iint\limits_{\omega}\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}p(r)dxdy \tag{7.6}$$

проекции равнодействующей и момента (относительно центра диска) могут быть выражены следующим образом:

$$T_x = -\sigma f\frac{\partial Z}{\partial y_C}, \quad T_y = \sigma f\frac{\partial Z}{\partial x_C} \tag{7.7}$$

$$L_O = -\sigma fZ + \sigma f\left(x_C\frac{\partial Z}{\partial x_C} + y_C\frac{\partial Z}{\partial y_C}\right) \tag{7.8}$$

Заметим (см. формулы (7.6) и (7.7)), что функция Жуковского (7.6) с точностью до множителя совпадает с диссипативной функцией, введенной в [3] (см. § 5.12, пример 2°).

В [7] установлено, что при движении аксиально-симметричного диска вектор скорости $\mathbf{V}$ сохраняет постоянное направление. Пусть для определенности $V_x = 0$, $V_y = V > 0$ и $\omega > 0$. Тогда $y_C = 0$ и $x_C < 0$. Положим

$$x_C = -\beta, \quad \beta = V/\omega \tag{7.9}$$

В таком случае уравнения движения (7.2) согласно соотношениям (7.7) и (7.8) принимают вид

$$m\dot{V} = \sigma f\frac{\partial Z}{\partial x_C}, \quad I\dot{\omega} = -\sigma fZ + \sigma fx_C\frac{\partial Z}{\partial x_C} \tag{7.10}$$

Составляя теперь из равенств (7.10) пропорцию, получаем

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{I}{ma^2}\frac{a^2Z'(\beta)}{Z(\beta)-\beta Z'(\beta)} \tag{7.11}$$

При выводе данного уравнения учтено свойство аксиальной симметрии графика функции Жуковского (7.6), использовано обозначение (7.9) и штрихом обозначена операция дифференцирования.

Заметим, что согласно неравенству Жуковского (3.1) и неравенству (3.7) знаменатель второй дроби в правой части уравнения (7.11) положителен. Положительность производной $Z'(\beta)$ при $\beta > 0$ вытекает из начального условия $Z'(0) = 0$ и неравенства $Z''(\beta) > 0$. Тем самым, правая часть уравнения (7.11), которую обозначим через $\Phi(\beta)$, положительна при $\beta > 0$, причем $\Phi(0) = 0$.

Непосредственным дифференцированием устанавливаем равенство

$$\Phi'(\beta) = \frac{I}{ma^2}\frac{a^2 Z''(\beta)Z(\beta)}{[Z(\beta) - \beta Z'(\beta)]^2} \tag{7.12}$$

Отсюда находим

$$\Phi'(0) = \frac{I}{ma^2}\frac{a^2 Z''(0)}{Z(0)} \tag{7.13}$$

Переходя в равенстве (7.12) к пределу при $\beta \to \infty$, получаем

$$\frac{ma^2}{I}\Phi'(+\infty) = \lim_{\beta\to\infty}\frac{a^2 Z''(\beta)Z(\beta)}{[\beta^2 Z''(\beta)]^2} = \frac{a^2 N}{Z_1} \tag{7.14}$$

где N и Z_1 – величины, определяемые формулами (3.2) и (6.7).

Отметим, что для любой неотрицательной плотности $p(r)$, не равной нулю тождественно, выполняются неравенства

$$\frac{ma^2}{I}\Phi'(+\infty) > 1 \tag{7.15}$$

$$\frac{ma^2}{I}\Phi(a) > a \tag{7.16}$$

Последнее неравенство вытекает из соотношений (см. формулу (3.6)):

$$\frac{dZ}{dr}(a) = 4\int_0^a \mathbf{E}\left(\frac{\rho}{a}\right)p(\rho)\rho d\rho, \quad Z(a) - aZ'(a) = 4\int_0^a \frac{\rho^2}{a^2}\mathbf{B}\left(\frac{\rho}{a}\right)p(\rho)\rho d\rho$$

где $\mathbf{B}(k) = k^{-2}[\mathbf{E}(k) - (1 - k^2)\mathbf{K}(k)]$, при учете неравенства $\mathbf{E}(k) > \mathbf{B}(k)$ при $k \in [0, 1)$. Неравенство (7.15) очевидно в силу соотношений (7.14), (3.2) и (6.7).

Таким образом, согласно неравенству (7.13) относительное значение β_*/a корня уравнения $(ma^2/I)\Phi(\beta) = \beta$ не может быть больше единицы. Исключение составляет случай абсолютно тонкого кольца, для которого $I/(ma^2) = 1$ и неравенство (7.16) обращается в равенство, поскольку $\mathbf{E}(1) = \mathbf{B}(1) = 1$.

В случае равномерного распределения нормального давления согласно формулам (2.5), (6.5), (3.1) и (6.7) имеем

$$\Phi'(0) = \frac{3}{2}\frac{I}{ma^2}, \quad \Phi'(+\infty) = 4\frac{I}{ma^2} \tag{7.17}$$

Уравнение (7.11) является однородным (см., в частности [10], гл. 1, § 4) и при помощи подстановки (7.9) приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Параметрическое решение уравнения (7.11) дается формулами

$$\omega = \omega_0 \exp\left\{\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\tau}{\Phi(\tau)-\tau}\right\}, \quad \beta_0 = \frac{V_0}{\omega_0} \tag{7.18}$$

$$V = \omega_0 \beta \exp\left\{\int\limits_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\tau}{\Phi(\tau)-\tau}\right\} \tag{7.19}$$

где β_0 – начальное значение параметра β. Если уравнение $\Phi(\beta) = \beta$ имеет корень $\beta_* > 0$, то уравнение (7.11) имеет решение $V = \beta_*\omega$. При этом интеграл с переменным верхним пределом, фигурирующий в формулах (7.18) и (7.19), расходится в точке $\beta = \beta_*$.

В случае равномерного распределения нормального давления можно выделить три ситуации:

(*1*) $\Phi(\beta) < \beta$ при $\beta > 0$,

(*2*) $\Phi(\beta) < \beta$ при $\beta \in (0, \beta_*)$ и $\Phi(\beta) > \beta$ при $\beta > \beta_*$,

(*3*) $\Phi(\beta) > \beta$ при $\beta > 0$.

В первом случае согласно соотношениям (7.17) должно выполняться неравенство $\Phi'(\infty) \le 1$, т.е. $I/(ma^2) \le 1/4$. При этом $\beta \to +\infty$ при торможении диска, т.е. мгновенный центр вращения удаляется на бесконечность.

Во втором случае необходимо соблюсти двойное неравенство

$$1/4 < I/(ma^2) < 2/3$$

Соответственно, при торможении диска $\beta \to \beta_* - 0$, если $\beta_0 < \beta_*$, и $\beta \to \beta_* + 0$, если $\beta_0 > \beta_*$, и, как было установлено в [7] для частного случая $2I = ma^2$, непосредственно перед остановкой мгновенный центр скоростей находится на расстоянии β_* от центра диска. Заметим, что для диска постоянной плотности $(\beta_*/a) \approx 0.653$ (вычислено в [11]).

Наконец, в третьем случае должно выполняться неравенство $\Phi'(0) \ge 1$, т.е. $I/(ma^2) \ge 2/3$. При торможении диска $\beta \to 0$, тем самым мгновенный центр вращения в момент остановки совпадает с центром диска.

Наконец заметим, что в общем случае согласно формулам (7.18) и (7.19) для всех движений при $\beta \in (0, +\infty)$, т.е. кроме поступательного движения ($\omega = 0$) и чистого вращения ($V = 0$), скорости V и ω обращаются в нуль одновременно в момент остановки.

8. Заключение. Отметим, что при выводе уравнения (4.4) для определения положения центра вращения существенно использовано неравенство Жуковского (3.1) (см., в частности, вторую формулу (4.2)).

В силу предположения об осевой симметрии в распределении нормальных давлений по площадке опоры (круг, кольцо, несколько колец и т.п.) для характеристики сдвигающей нагрузки (в целях определения положения предельного равновесия) достаточно лишь двух величин $\sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ и $|M_z|$. (Знак момента M_z определяет направление вращения.) Кривая предельного равновесия разбивает первый квадрат плоскости безразмерных параметров нагрузки (5.1) на две части. Во "внутренней" части, определяемой неравенством (6.2), приложенные внешние силы недостаточны для нарушения равновесия, а при выходе из нее твердое тело неминуемо сдвигается.

Автор благодарит Н.Н. Дмитриева за обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шиллер Н.Н.* Заметка о равновесии твердого тела при действии трения на некоторую часть его поверхности // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1892. Т. 5. Вып. 1. С. 1–5.
2. *Жуковский Н.Е.* Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Собр. соч. Т. 1. М.; Л., 1949. С. 339–354.
3. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. *Можевитинов А.Л., Кузьмин С.А., Попов А.Ф.* Расчет устойчивости сооружений на сдвиг эксцентричной силой // Изв. Всесоюзн. НИИ Гидротехники. 1971. Т. 95. С. 70–76.
6. *Черноусько Ф.Л.* Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 6–17.
7. *Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л.* О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 17–28.
8. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
9. *Киреенков А.А.* О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 60–67.
10. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1970. 572 с.
11. *Дмитриев Н.Н.* О движении плоских тел по поверхности с сухим анизотропным трением. Деп. ВИНИТИ. 02.11.88. № 8143-В88. 22 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
22.05.2003