

УДК 539.375

© 2005 г. В.И. АСТАФЬЕВ, Л.В. СТЕПАНОВА

АСИМПТОТИКА ДАЛЬНОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РОСТЕ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ В СРЕДЕ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ

Представлено приближенное решение задачи о растущей трещине антиплоского сдвига в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. Характерной особенностью задач о трещинах в связанной постановке (связка “ползучесть – поврежденность”) является существование у вершины трещины области активного накопления повреждений и (или) области “полностью поврежденного материала”, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль. Поэтому наряду с определением напряженно-деформированного состояния интерес представляет исследование геометрии данной области. Построены асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины (найдена асимптотика дальнего поля напряжений) и приведена конфигурация области “полностью поврежденного материала” для различных значений показателей степеней степенного закона ползучести и кинетического уравнения накопления повреждений.

1. Введение. Проблемам определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины как стационарной, так и распространяющейся трещины в связанной постановке задач теории упругости, теории пластичности и теории ползучести с механикой поврежденности в последнее время посвящается большое количество исследований [1–12]. Основной интерес представляет оценка влияния процесса накопления повреждений на распределение напряжений и деформаций (или скоростей деформаций) ползучести).

Можно выделить характерные особенности, свойственные двумерным задачам о стационарной и растущей полубесконечной трещине в бесконечном теле в связанной постановке (упругость – поврежденность, ползучесть – поврежденность). В [1–7] показано, что влияние накопления повреждений проявляется либо в полном устранении особенности напряжений в окрестности вершины трещины, либо в значительном ослаблении сингулярности поля напряжений. В [1, 2] установлено, что эффективные напряжения ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и сами компоненты тензора напряжений линейным образом стремятся к нулю при приближении к вершине трещины. В [4] представлен асимптотический анализ полей напряжений и деформаций в окрестности растущей усталостной трещины в связанной постановке для линейно упругих определяющих соотношений. Численное исследование полученной системы уравнений показало, что связанность постановки задачи приводит к более слабой сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой линейной механики разрушения) поля напряжений для малых значений степени закона накопления повреждений. При возрастании значений показателя степени особенность вообще исчезает. В [5, 6] представлено асимптотическое исследование стационарной трещины нормального отрыва в упругом нелинейно вязком материале со степенной

зависимостью между напряжениями и скоростями деформаций ползучести. Показано, что учет поврежденности также приводит к устранению особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины.

Следующей характерной чертой, присущей этому типу задач, является наличие области полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль [1, 2]. В данных работах при численном определении характера асимптотического поведения компонент тензора напряжений и сплошности у вершины трещины в угловом направлении оказалось, что, начиная с некоторого значения полярного угла θ_0 , величина сплошности начинает принимать отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу этой величины. Данное обстоятельство привело к модифицированной постановке задачи, согласно которой решение разыскивалось в области $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Область $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$, примыкающая к берегам трещины, представлялась полностью поврежденной зоной, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю. На границе же этих областей должны выполняться условия непрерывности как для сплошности, так и для тангенциальной компоненты тензора напряжений. Это позволило найти величину θ_0 . В [4, 7] авторы также приходят к выводу о невозможности выполнения классических граничных условий на берегах трещины и необходимости модифицированной постановки задачи с областью полностью поврежденного материала, примыкающей к берегам трещины.

Проблема определения геометрии области полностью поврежденного материала, либо зоны процесса заслуживает особого внимания. Моделирование процесса разрушения вблизи вершины трещины осуществляется с помощью введения либо зоны процесса, в которой происходит активное накопление повреждений, либо области полностью поврежденного материала (или так называемой “зоны насыщения”, в которой параметр поврежденности (или сплошности) достигает своего критического значения). В [4] представлено асимптотическое исследование усталостного роста трещины нормального отрыва в среде с поврежденностью. Показано, что у вершины трещины существует область процесса – зона, в которой происходит интенсивное накопление рассеянных повреждений (в отличие от области полностью поврежденного материала). Для определения границы данной области использовано то обстоятельство, что кинетическое уравнение, определяющее закон накопления рассеянных повреждений, имеет две “ветви”, разделяющие два состояния материала, находящегося под действием усталостного нагружения: накопление повреждений в окрестности вершины трещины и отсутствие накопления повреждений. В [8, 9] исследованы асимптотики напряжений и параметра сплошности у вершины растущей трещины нормального отрыва. Авторы статьи, основываясь на экспериментальных данных, предполагают, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, есть полуэллипс и прямые, параллельные берегам трещины. Задавая этой гипотезой форму области процесса, можно определить асимптотические разложения компонент тензора напряжений и сплошности. Заметим, что авторы не определяют геометрию области процесса, а задают ее априори. Таким образом, задача нахождения конфигурации области полностью поврежденного материала, либо области активного накопления повреждений у вершины трещины не является еще полностью исследованной. В [1, 2] рассмотрено докритическое подрастание трещины нормального отрыва и антиплоского сдвига в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. Установлено, что в окрестности вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Данная область примыкает к берегам трещины в окрестности вершины трещины и занимает область, определяемую соотношениями $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ и $-\pi \leq \theta \leq -3\pi/2$, где θ – полярный угол в полярной системе координат с полюсом в вершине растущей трещины. Однако в рамках данного исследо-

вания не удается найти конфигурацию этой области, поскольку результаты указывают лишь на существование вертикальной касательной к границе этой области при $\theta = 0$. Геометрию этой области можно определить, находясь от вершины трещины на расстояниях, сравнимых с характерным линейным размером зоны полностью поврежденного материала или превышающих это расстояние. В [10] приведено асимптотическое решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке теории ползучести и механики поврежденности с использованием автомодельной переменной, предложенной в [11] для степенных определяющих соотношений, связывающих скорости деформаций ползучести и напряжения. На основе упомянутых выше исследований в [10] предполагалось существование области полностью поврежденного материала, где все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. В силу наличия данной зоны вблизи вершины трещины нельзя разыскивать асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в непосредственной окрестности вершины трещины, как это обычно принимается в механике разрушения. Поэтому все асимптотические разложения определялись в системе координат, сдвинутой вправо от вершины на расстояние, равное характерному линейному размеру области полностью поврежденного материала. Оказалось, что, в отличие от ранее упомянутых исследований, степени в разложениях по собственным функциям параметра сплошности и компонент тензора напряжения не связаны друг с другом (как правило, кинетическое уравнение, задающее закон накопления поврежденности, обуславливает данную связь). Поэтому приходилось одну из степеней задавать априори (т.е. приходилось задавать асимптотическое поведение параметра сплошности), что ограничивает общность задачи. Тем не менее геометрия области полностью поврежденного материала для различных значений материальных констант при данных предположениях найдена и приведена в [10]. В [12] представлено приближенное решение задачи о растущей трещине антиплоского сдвига в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности с использованием автомодельной переменной, введенной в [11], где построены асимптотические разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины. Выяснилось, что решение Хатчинсона – Райса – Розенгрена (HRR) [13, 14] не может быть использовано в качестве граничного условия в бесконечно удаленной точке.

В публикуемой работе приведено новое исследование докритического подрастания трещины антиплоского сдвига в связанной постановке (без использования автомодельной переменной в отличие от [12]) и проведен анализ асимптотических разложений компонент тензора напряжений и параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины, иллюстрирующий, что действительно решение HRR не может принято как граничное условие в бесконечно удаленной точке.

2. Постановка задачи. Рассмотрим растущую полубесконечную трещину антиплоского сдвига (типа III) в условиях ползучести в среде с поврежденностью. Определяющие соотношения теории ползучести для среды с поврежденностью, предложенные Л.М. Качановым [15] и Ю.Н. Работновым [16], имеют в случае антиплоского сдвига следующий вид:

$$\gamma_{\alpha} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_{\alpha}}{\psi} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (2.1)$$

где γ_{α} – скорости деформации сдвига, τ_{α} – касательные напряжения, $\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$ – интенсивность касательных напряжений; ψ – параметр сплошности; B, n – константы материала. Будем считать, что упругими деформациями и деформациями ползучести, накопленными на первой стадии, можно пренебречь. Параметр сплошности

материала $\psi = 1 - \omega$, где ω – параметр поврежденности, изменяется в соответствии с кинетическим уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m \quad (2.2)$$

где d/dt – материальная производная по времени; A, m – константы материала. В первоначальном неповрежденном состоянии $\psi = 1$ распределение напряжений известно и имеет вид [13, 14]

$$\tau_{\alpha}(r, \theta, t = 0) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\tau}_{\alpha}(\theta, n) \quad (2.3)$$

где r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине трещины; C^* – не зависящий от контура инвариантный интеграл теории установившейся ползучести; I_n – безразмерная константа, зависящая только от n ; функции $\bar{\tau}_{\alpha}(\theta, n)$ определяются численно из решения краевой задачи HRR [3, 4]. В случае трещины, движущейся со скоростью $v(t)$ в направлении оси x (xOy – декартова система координат с центром в вершине трещины), материальная производная по времени t имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2.4)$$

Начальное распределение напряжений (2.3) примем в качестве граничных условий на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) для любого $t > 0$. Граничные условия на берегу трещины и на ее продолжении имеют вид

$$\tau_{\theta}(r, \theta = \pi) = 0, \quad \tau_r(r, \theta = 0) = 0 \quad (2.5)$$

Анализ размерностей величин, вошедших в постановку задачи, позволяет представить решение в форме

$$\tau_{\alpha} = \left(\frac{AC^*}{vBI_n} \right) \Sigma_{\alpha}(R, \theta, T), \quad \psi = \Psi(R, \theta, T) \quad (2.6)$$

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad T = \frac{tv}{r_0}, \quad r_0 = \left(\frac{C^*}{BI_n} \right)^{p/(p-1)} \left(\frac{A}{v} \right)^{1/(p-1)}, \quad p = \frac{m}{n+1} < 1$$

где Σ_{α} и Ψ – безразмерные функции от безразмерных переменных R, θ, T .

Уравнение равновесия, условие совместности, записанное в напряжениях, кинетическое уравнение, а также асимптотическое условие на бесконечности, граничное условие на верхнем берегу трещины и условие симметрии на ее продолжении в безразмерных переменных будут иметь вид

$$\frac{\partial \Sigma_r}{\partial R} + \frac{\Sigma_r}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Sigma^{n-1} \Sigma_r}{\Psi^n} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{R \Sigma^{n-1} \Sigma_{\theta}}{\Psi^n} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} - \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = - \left(\frac{\Sigma}{\Psi} \right)^m \quad (2.9)$$

$$\Sigma_{\alpha} = \frac{1}{R^{1/(n+1)}} \bar{\tau}_{\alpha}(\theta, n) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

$$\Sigma_{\theta}(R, \theta = \pi) = 0, \quad \Sigma_r(R, \theta = 0) = 0, \quad \Sigma = \sqrt{\Sigma_r^2 + \Sigma_{\theta}^2} \quad (2.11)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая установившегося роста трещины, когда $\partial\Psi/\partial T = 0$.

В [1, 2] показано, что у вершины растущей трещины существует область полностью поврежденного материала, где все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Поэтому для построения приближенного решения нельзя разыскивать асимптотические разложения в непосредственной окрестности вершины трещины, поскольку там сформулированная система уравнений не является справедливой. В силу этого будем разыскивать асимптотическое решение задачи для больших расстояний от вершины трещины и попытаемся оценить геометрию области полностью поврежденного материала, приближаясь к ней от бесконечно удаленной точки.

3. Асимптотическое решение задачи. Асимптотическое решение краевой задачи (2.7)–(2.11) при $R \rightarrow \infty$ (для больших расстояний от вершины трещины) можно найти, положив

$$\Psi(R, \theta) = 1 - R^{\gamma} g(\theta), \quad \Sigma_{\alpha}/\Psi(r, \theta) = R^{\lambda} f_{\alpha}(\theta) \quad (3.1)$$

где неизвестные показатели λ и γ связаны соотношением $\gamma = 1 + \lambda m$, полученным из кинетического уравнения (2.9). Следует отметить, что для выполнения граничного условия (2.10) в бесконечно удаленной точке, необходимо потребовать, чтобы $\lambda = -1/(n+1)$. Откуда вытекает, что $\gamma = 1 - m/(n+1) > 0$, что противоречит граничному условию для скалярного параметра сплошности в бесконечно удаленной точке $\Psi = 1$ (показатель степени γ в асимптотическом разложении параметра сплошности в (3.1) должен быть отрицательным). Следовательно, в силу кинетического уравнения (2.9) граничное условие в бесконечно удаленной точке должно быть сформулировано в более общей форме, чем (2.10)

$$\Sigma_{\alpha} = R^{\beta} \bar{\tau}_{\alpha}(\theta, n) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

где показатель β подлежит определению. Граничное условие (2.10) представляет собой требование асимптотического сближения искомого решения с решением HRR, однако, таким образом, как показывает анализ показателей степеней асимптотических разложений (3.1), невозможно формулировать граничные условия в бесконечно удаленной точке в форме (2.10).

Подстановка асимптотических разложений (3.1) для функции сплошности и для компонент тензора напряжений в уравнения (2.7)–(2.9) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{df_r}{d\theta} = f_{\theta} \frac{(\lambda n + 1)f^2 + (n-1)(\lambda + 1)f_r^2}{(n-1)f_r^2 + f^2} \quad (3.3)$$

$$df_{\theta}/d\theta = -(\lambda + 1)f_r \quad (3.4)$$

$$\frac{dg}{d\theta} = \frac{f^m + \gamma \cos \theta g}{\sin \theta}, \quad f = \sqrt{f_r^2 + f_{\theta}^2} \quad (3.5)$$

Данная система уравнений должна быть решена с учетом граничного условия на верхнем берегу трещины и условия симметрии на ее продолжении

$$f_{\theta}(\theta = \pi) = 0, \quad f_r(\theta = 0) = 0 \quad (3.6)$$

n	λ
1	-1.5
2	-1.23029
3	-1.18301
4	-1.16479
5	-1.15523
6	-1.14936
7	-1.14540
8	-1.14254
9	-1.14038
10	-1.13870

а также условие регулярности решения

$$g(\theta = 0) = -f^m(\theta = 0)/\gamma \quad (3.7)$$

Видно, что при подстановке асимптотических разложений (3.1) в систему уравнений (2.7)–(2.9) распалась на систему уравнений (3.3), (3.4) с граничными условиями (3.6) и уравнение (3.5) с граничным условием (3.7). Это приводит к задаче на собственные значения: найти такое собственное число λ , чтобы данная система уравнений с однородными граничными условиями имела ненулевое решение. Из однородности системы (3.3), (3.4) следует, что наряду с функциями $f_r(\theta)$, $f_\theta(\theta)$ и функции $\kappa(T)f_r(\theta)$, $\kappa(T)f_\theta(\theta)$, где $\kappa(T)$ – масштабирующий множитель, также являются решением. Поэтому может быть сформулировано условие нормировки решения в виде

$$f_\theta(\theta = 0) = 1 \quad (3.8)$$

Система уравнений (3.3), (3.4) с граничными условиями (3.8) и вторым из условий (3.6) представляет собой задачу Коши и может быть проинтегрирована численно при любом значении λ . Численное решение задачи Коши осуществлялось с помощью стандартной процедуры метода Рунге – Кутты. В ходе численного эксперимента необходимо было найти значение λ , удовлетворяющее условию $\gamma = 1 + \lambda m < 0$ (отличное от $-1/(n + 1)$), которое ведет к выполнению граничного условия на верхнем берегу трещины. Значения λ , приводящие к выполнению всех перечисленных требований для различных значений материальной константы n , сведены в таблицу. Более того, можно установить [17, 18] и аналитическое выражение, связывающее λ и n :

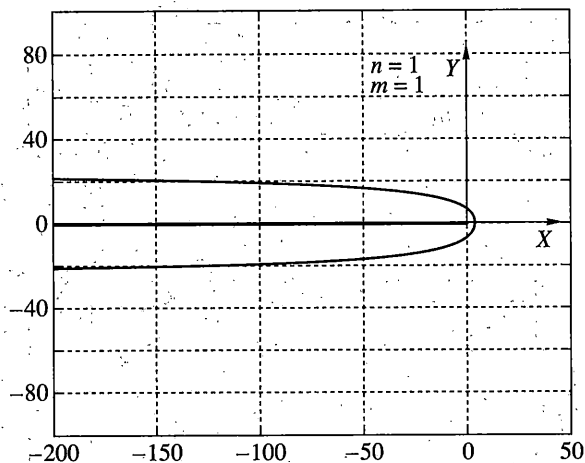
$$\lambda = \frac{2}{-(n + 1) + \sqrt{(n - 1)^2 + 4n/9}} \quad (3.9)$$

Полученное поле напряжений позволяет определить два члена асимптотического разложения скалярного параметра сплошности. Конфигурация области полностью поврежденного материала может быть определена из уравнения

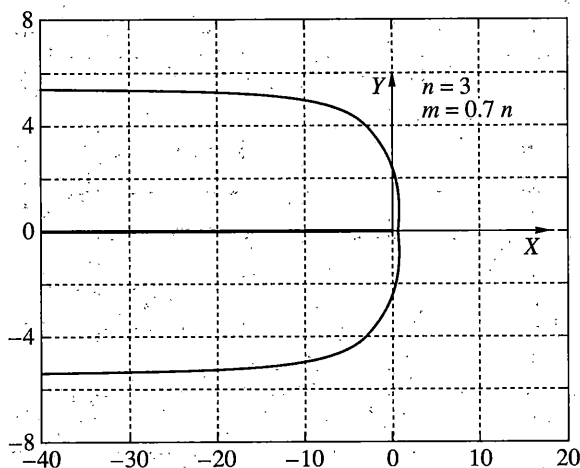
$$\Psi(R, \theta) = 1 - R^\gamma g(\theta) = 0 \quad (3.10)$$

Поэтому граница области полностью поврежденного материала определяется соотношением

$$R(\theta) = (g(\theta))^{-1/\gamma} \quad (3.11)$$



Фиг. 1



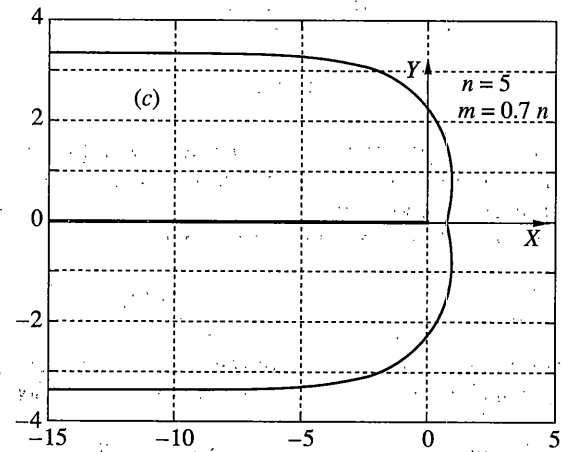
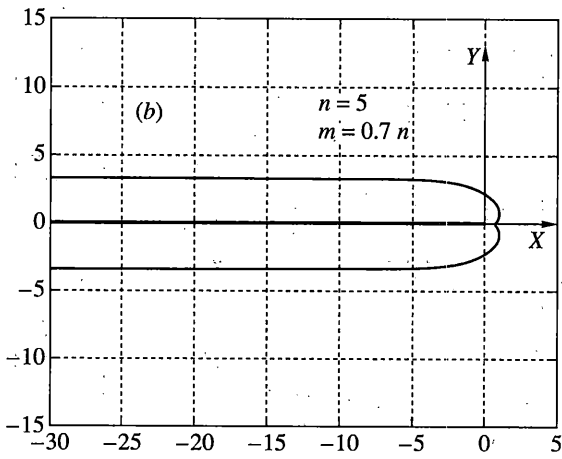
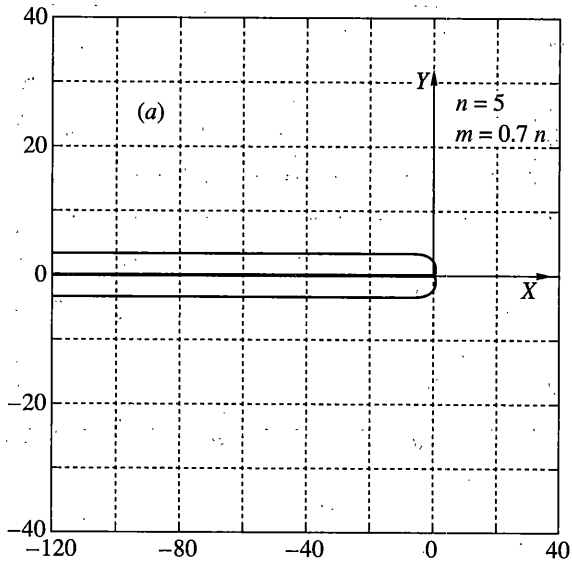
Фиг. 2

Конфигурации областей полностью поврежденного материала, охватывающих магистральную (макро) трещину, построенные в соответствии с последним уравнением для различных значений материальных констант и показателя степени кинетического уравнения, показаны на фиг. 1–5, где приняты обозначения

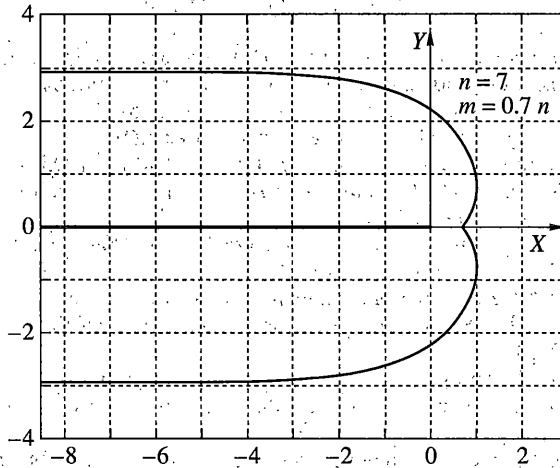
$$X = \frac{x}{k(n)}, \quad Y = \frac{y}{k(n)}, \quad k(n) = (C^*/(BI_n))^{p/(p-1)} (A/\nu)^{1/(p-1)} \quad (3.12)$$

На фиг. 3 *a, b, c* изображена область полностью поврежденного материала для $n = 5$, $m = 0.7n$ для наблюдателя, находящегося на разных расстояниях от вершины растущей трещины.

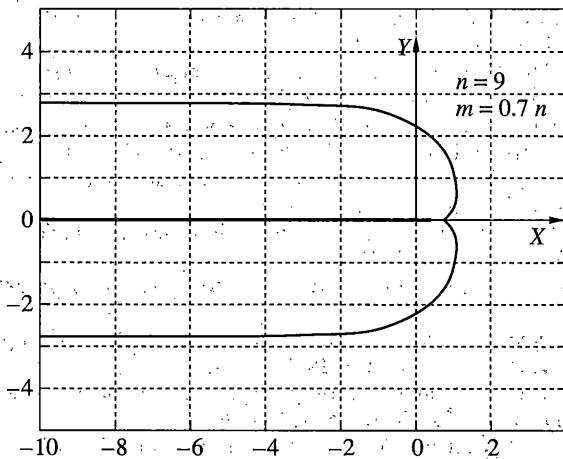
Используемая схема позволила построить границу области полностью поврежденного материала на основе двучленного асимптотического разложения скалярно-



Фиг. 3.



Фиг. 4



Фиг. 5

го параметра сплошности (3.9) и установить, что магистральная трещина в процессе ее распространения окружена областью поврежденного материала, охватывающей вершину трещины и примыкающей к ее берегам.

4. Заключение. В рамках проведенного исследования найдены главные члены асимптотических разложений эффективных напряжений и скалярного параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины. Показано, что распределение HRR не может быть использовано в качестве асимптотического граничного условия задачи на бесконечности. Установлено, магистральная трещина (главная трещина) в процессе ее распространения охвачена областью полностью поврежденного материала и процесс роста трещины следует представлять как продвижение целой области (фиг. 1–5) полностью поврежденного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // Физ.-хим. механика материалов, 1992. Т. 28. № 1. С. 5–11.
2. Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 160–166.
3. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара.: Изд-во Самар. ун-та, 2001. 632 с.
4. Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engn. Frac. Mech, 1995. V.50. № 1: P. 131–141.
5. Lee S.B., Lu M., Kim J.Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Part I. Small damage region around the crack tip // Intern. J. Solids Struct. 1997. V. 34. № 24. P. 3163–3178.
6. Lu M., Lee S.B., Kim J.Y. An asymptotic analysis to a tensile crack in creeping solids coupled with damage. Part II. Large damage region very near the crack tip // Intern. J. Solids Struct. 1997. V. 34. № 10. P. 1183–1197.
7. Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // Intern. J. of Fracture. 2001. V. 108. № 4. P. 383–395.
8. Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37. № 43. P. 6203–6220.
9. Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. V. 183. № 1–2. P. 15–33.
10. Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке (связка “ползучесть – поврежденность”) // Вестн. СамГУ. 2000. № 4(18). С. 128–145.
11. Riedel H. Fracture at High Temperature. Berlin, etc.: Springer, 1987. 418 p.
12. Степанова Л.В., Федина М.Е. О геометрии области полностью поврежденного материала у вершины трещины антиплоского сдвига в связанной постановке задачи (связка “ползучесть – поврежденность”) // Вестн. СамГУ: 2001. № 2(20). С. 87–113.
13. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V.16. № 1. P. 1–12.
14. Hutchinson J. W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 1. P. 13–31.
15. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26–31.
16. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд – во АН СССР, 1959. С. 5–7.
17. Yuan F.G., Yang S. Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear // Intern. J. of Fracture. 1995. V. 69. № 1. P. 1–26.
18. Yang S., Yuan F.G., Cai X. Higher order asymptotic elastic – plastic crack-tip fields under antiplane shear // Engn. Frac. Mech. 1996. V. 54. № 3. P. 405–422.

Самара

Поступила в редакцию
28.08.2003