

УДК 539.376

© 2005 г. К.И. РОМАНОВ

ФИГУРЫ РЕОНОМНОГО СТЕРЖНЯ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

На основе гипотезы плоских сечений получено новое решение задачи о связи лагранжевых и эйлеровых координат в процессе ползучести стержня, растянутого силами собственного веса. Предложен вариант метода последовательных приближений и показано, что удачным начальным приближением, обеспечивающим сходимость последовательных приближений, является однородное деформированное состояние. В результате определена зависимость формы стержня от времени и найдено время разрушения по схеме Хоффа, соответствующей бесконечному удлинению. Изучены формы стержня при больших деформациях ползучести в зависимости от показателя степени в уравнении состояния нелинейно-вязкого тела.

Решены две задачи о фигурах стержня: прямая, когда по заданной начальной форме определяется текущая форма в любой момент времени и обратная, когда по заданной в некоторый момент времени конфигурации находится соответствующее очертание боковой поверхности стержня в исходном состоянии. Решения могут иметь приложения при разработке технологии получения вытянутых кристаллов, усов сложного очертания за счет естественного источника геомеханической энергии.

1. Рассмотрим растяжение стержня, в общем случае переменного поперечного сечения, под действием собственного веса (фиг. 1).

Примем уравнение состояния материала в виде

$$\zeta_e = k\sigma_e^n \quad (1.1)$$

где ζ_e и σ_e – эквивалентные скорость деформации и напряжение, соответственно; k и n – постоянные материала при данной температуре. Положим, также как в теории упругости [1], что напряженное состояние является одноосным: все компоненты эйлерова тензора напряжений равны нулю, за исключением

$$\sigma_z = \sigma_e = \gamma(l-z) \quad (1.2)$$

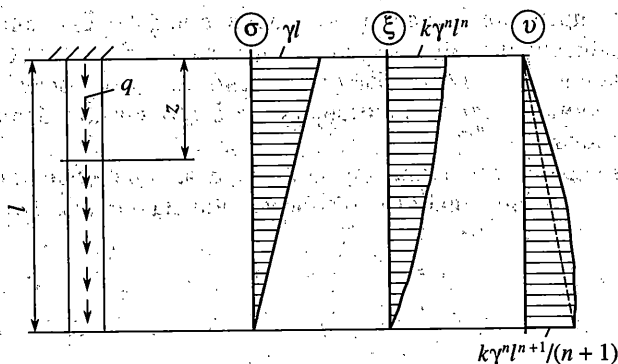
где l – длина стержня в текущий момент времени, z – эйлерова координата материальной точки, γ – вес единицы объема материала.

В этом случае дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях удовлетворяются точно.

Допустим, что поперечные сечения стержня остаются плоскими в деформированном состоянии. Это предположение является приближенным. В частности, при $n = 1$ справедливость гипотезы плоских сечений может быть оценена в начальный момент времени аналитически по аналогии с точным решением теории упругости, которое показывает незначительную погрешность указанной гипотезы.

Для несжимаемого материала уравнения (1.1) и (1.2) приводят к скорости осевой деформации в любой момент времени

$$\xi = k\gamma^n(l-z)^n \quad (1.3)$$



Фиг. 1

В соответствии с зависимостями Стокса [2]:

$$\xi = \partial v / \partial z \quad (1.4)$$

где v – скорость осевого перемещения.

Уравнения (1.3) и (1.4) дают возможность получить дифференциальное уравнение

$$\partial v / \partial z = k\gamma^n (l - z)^n$$

интеграл которого в текущий момент времени с учетом граничного условия при $z = 0$ $v = 0$ имеет вид

$$v = \frac{k\gamma^n}{n+1} [l^{n+1} - (l-z)^{n+1}]$$

На фиг. 1 показаны эпюры σ , ξ и v по длине стержня в текущий момент времени t . Для определения эйлеровой координаты материальной точки служит дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \frac{k\gamma^n}{n+1} \{ l^{n+1}(t) - [l(t) - z(t)]^{n+1} \} \quad (1.5)$$

с начальным условием $z = z_0$ при $t = 0$, где z_0 – лагранжева координата.

Зависимость длины стержня от времени может быть установлена с помощью уравнения (1.5) при $z = l$:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{k\gamma^n}{n+1} l^{n+1}$$

Интеграл полученного уравнения с учетом начального условия $l = l_0$ при $t = 0$ имеет вид

$$\frac{l}{l_0} = \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{-1/n}, \quad t_* = \frac{n+1}{nk\gamma^n l_0^n} \quad (1.6)$$

где t_* – время вязкого разрушения по схеме Хоффа.

Это время оказывается в $(n+1)$ раз больше, чем время вязкого разрушения стержня растянутого силой $\gamma l_0 F_0$, где F_0 – начальная площадь поперечного сечения [2].

Уравнение (1.5) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, определяемыми зависимостью (1.6).

Решение уравнения (1.5) может быть получено методом последовательных приближений, аналогичным методу, примененному в теории колебаний системы с одной степенью свободы [3].

Для получения первого приближения заменим реальный профиль скоростей в текущий момент времени линейным (штриховая линия на фиг. 1), т.е. примем

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{l^n z}{nt_* l_0^n} \quad (1.7)$$

Таким образом, в первом приближении полагаем, что деформированное состояние является однородным. Интеграл уравнения (1.7) с учетом выражения (1.6) и начального условия $z_1 = z_0$ при $t = 0$ имеет вид

$$z_1 = z_0(1 - t/t_*)^{-1/n} \quad (1.8)$$

Во втором приближении зависимость $z_1(t)$ первого приближения подставляется в правую часть уравнения (1.5) и решается дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{nt_*} \left[l_0 - \frac{1}{l_0^n} (l_0 - z_0)^{n+1} \right] \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{-(n+1)/n} \quad (1.9)$$

Интеграл этого уравнения с учетом начального условия $z_2 = z_0$ при $t = 0$ может быть представлен в форме

$$z_2 = z_0 + \left[l_0 - \frac{1}{l_0^n} (l_0 - z_0)^{n+1} \right] \left[\left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{-1/n} - 1 \right] \quad (1.10)$$

Итерационный процесс продолжается до достижения заданной точности путем решения серии дифференциальных уравнений с известной правой частью.

В общем случае точное решение в аналитической форме неизвестно, поэтому сходимость последовательных приближений оценивается сопоставлением в различные моменты времени точного профиля скоростей (1.5) в эйлеровых координатах (сплошная линия на фиг. 1) с профилями скоростей в различных приближениях $v_i = dz_i/dt$ где i – номер приближения.

В частном случае целых n уравнение (1.5) может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{nt_* l_0^n} & \left[(n+1)l^n z - \frac{(n+1)n}{2} l^{n-1} z^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} l^{n-2} z^3 - \right. \\ & \left. - (-1)^m \frac{(n+1)n \dots (n+2-m)}{m!} l^{n+1-m} z^m - (-1)^{n+1} z^{n+1} \right] \end{aligned}$$

Откуда в частных случаях следуют [4]: уравнение Бернулли ($n = 1$):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t_* l_0} (2lz - z^2) \quad (1.11)$$

$$l/l_0 = (1 - t/t_*)^{-1}, \quad t_* = 2l/(k\gamma l_0)$$

и уравнение Абеля первого рода ($n = 2$):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2t_* l_0^2} (3l^2 z - 3lz^2 + z^3) \quad (1.12)$$

$$l/l_0 = (1 - t/t_*)^{-1/2}, \quad t_* = 3/(2k\gamma^2 l_0^2)$$

дающие точные фигуры стержня.

2. Сходимость предложенного варианта метода последовательных приближений изучим на примере линейно-вязкого стержня, ползучесть которого описывается уравнением (1.11). Первое приближение определяется зависимостью (1.8) при $n = 1$.

Во втором приближении поле эйлеровых координат дается уравнением (1.10):

$$z_2 = z_0 \left[1 + \frac{2l_0 - z_0}{l_0} \left(\frac{1}{1 - t/t_*} - 1 \right) \right] \quad (2.1)$$

или в обращенной форме

$$z_0 = \frac{2l_0 l - l_0^2 - l_0 [4(l - l_0)(l - z) + l_0^2]^{1/2}}{2(l - l_0)} \quad (2.2)$$

В третьем приближении решается дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dz_3}{dt} = \frac{1}{t_* l_0} (2l z_2 - z_2^2) = \frac{z_0}{t_* l_0} \left[\frac{(2l_0 - z_0)(2l_0^2 - 2l_0 z_0 + z_0^2)}{l_0^2} \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{-2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{(l_0 - z_0)(2l_0 z_0 - z_0^2 - l_0^2)}{l_0^2} \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{-1} + \frac{2z_0^2}{l_0} - \frac{z_0^3}{l_0^2} - z_0 \right] \end{aligned}$$

с учетом начального условия $z_3 = z_0$ при $t = 0$.

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} z_3 = z_0 + \frac{z_0}{l_0} \left[\frac{(2l_0 - z_0)(2l_0^2 - 2l_0 z_0 + z_0^2)}{l_0^2} \left(\frac{1}{1 - t/t_*} - 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{2(l_0 - z_0)(2l_0 z_0 - z_0^2 - l_0^2)}{l_0^2} \ln \left(1 - \frac{t}{t_*} \right) + \left(\frac{2z_0^2}{l_0} - \frac{z_0^3}{l_0^2} - z_0 \right) \frac{t}{t_*} \right] \quad (2.3) \end{aligned}$$

В табл. 1 в качестве примера для времени, составляющего половину времени разрушения $t = t_*/2$ приведены результаты расчетов профиля осевых скоростей при $n = 1$ по формулам: (1.11) – точное решение, (1.7) – первое приближение, (1.9) – второе приближение. В последнем случае лагранжевы и эйлеровы координаты z_0 и $z = z_2$ связаны между собой соотношениями (2.1) и (2.2).

Точное решение уравнения (1.11) имеет вид

$$z = z_0 \left\{ \left[1 - \frac{z_0}{l_0} + \frac{z_0}{l_0(1 - t/t_*)} \right] \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (2.4)$$

или в обращенной форме

$$z_0 = z \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^2 \left[1 - \frac{zt}{l_0 t_*} \left(1 - \frac{t}{t_*} \right) \right]^{-1} \quad (2.5)$$

Таблица 1

z/l	z/l_0	$v_1 t_*/l_0$	$v_2 t_*/l_0$	v_{t_*}/l_0
1/4	1/2	1	$2\sqrt{7} - 4$	7/4
1/2	1	2	$2\sqrt{5} - 2$	3
3/4	3/2	3	$2\sqrt{3}$	15/4
1	2	4	4	4

Таблица 2

z_0/l_0	z_1/l_0	z_2/l_0	z/l_0	$\Delta, \%$
1/4	1/2	11/16	4/5	14.1
1/2	1	5/4	4/3	6.25
3/4	3/2	27/16	12/7	1.56
1	2	2	2	0

В табл. 2 для $t = t_*/2$ приведены результаты расчетов текущих координат при $n = 1$ по формулам: (2.4) – точное решение, (1.8) – первое и (2.1) – второе приближения.

В крайнем правом столбце даны значения относительных погрешностей $\Delta = [(z - z_2)/z]100\%$. При $z_0/l_0 = 1/4$ расчет по формуле третьего приближения (2.3) приводит к значению эйлеровой координаты $z_3/l_0 = 0.752$, что составляет по сравнению с точным решением ($z = 0.8$) относительную погрешность 6%. Таким образом, предложенный вариант метода последовательных приближений, основанный на начальном приближении в виде однородного деформированного состояния, позволяет определить поле эйлеровых координат с необходимой точностью.

3. Точное решение уравнения (1.12) может быть получено различными путями [4, 5]. В одном из вариантов [5] с помощью подстановки

$$z(t) = u(t)\eta(\varphi)$$

$$\varphi = \int u f_2 dt = -\frac{3}{2l_0} \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{-1}$$

$$u = \exp \int f_1 dt = \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{-3/2}$$

$$f_1 = \frac{3}{2} \left[t_* \left(1 - \frac{t}{t_*}\right) \right]^{-1}, \quad f_2 = -\frac{3}{2} \left[t_* t_0 \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{1/2} \right]^{-1}$$

это уравнение сводится к виду

$$\eta'(\varphi) = g(\varphi)\eta^3 + \eta^2$$

$$g(\varphi) = u(t) \frac{f_3(t)}{f_2(t)} = \frac{2}{9}\varphi, \quad f_3(t) = 1/(2t_* t_0^2) \quad (3.1)$$

Далее подстановка $\varphi'(x) = -1/[x\eta(\varphi)]$ переводит уравнение (3.1) в уравнение

$$\varphi'' + 2/9x^{-2}\varphi = 0$$

Таблица 3

z_0/l_0	z_1/l_0	z_2/l_0	z/l_0	$\Delta, \%$
1/4	$\sqrt{2}/4$	$\frac{37\sqrt{2}-21}{64}$	$\sqrt{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{23}}\right)$	7.6
1/2	$\sqrt{2}/2$	$\frac{7\sqrt{2}-3}{8}$	$\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$	2
3/4	$3\sqrt{2}/4$	$\frac{63\sqrt{2}-15}{64}$	$\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{31}}\right)$	0
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0

С помощью подстановки $\varphi' = \varphi k(x)$ переходим к уравнению Риккати

$$k' + k^2 = -2/9x^{-2}$$

интеграл которого имеет вид

$$x = \pm[(6w-2)/(6w-4)]^{3/4}/c$$

$$w(x) = xk, \quad c = \text{const} > 0$$

Затем с помощью соотношений $k(x) = w(x)/x$ и $\varphi' = \varphi k(x)$ определяем

$$\ln \left| \frac{\varphi}{\varphi_0} \right| = \int_{x_0}^x \frac{2(\pm cx)^{1/3} + 1}{3x[(\pm cx)^{1/3} + 1]} dx, \quad \varphi_0 = \frac{3}{2l_0} \quad (3.2)$$

где φ_0 и x_0 – постоянные.

Исходное уравнение (1.12) является уравнением первого порядка, поэтому можно распорядиться одной постоянной произвольно. Положим $c = 1$ для любого отношения z_0/l_0 .

После определения функции $\varphi(x)$ путем решения уравнения (3.2), определяется функция $\eta(\varphi)$, а затем $z(t)$. Постоянная x_0 выражается через отношение z_0/l_0 с помощью начального условия $z = z_0$ при $t = 0$. Выбор знаков в уравнении (3.2) диктуется условием $0 \leq z_0/l_0 \leq 1$ в любой момент времени $0 \leq t/t_* \leq 1$.

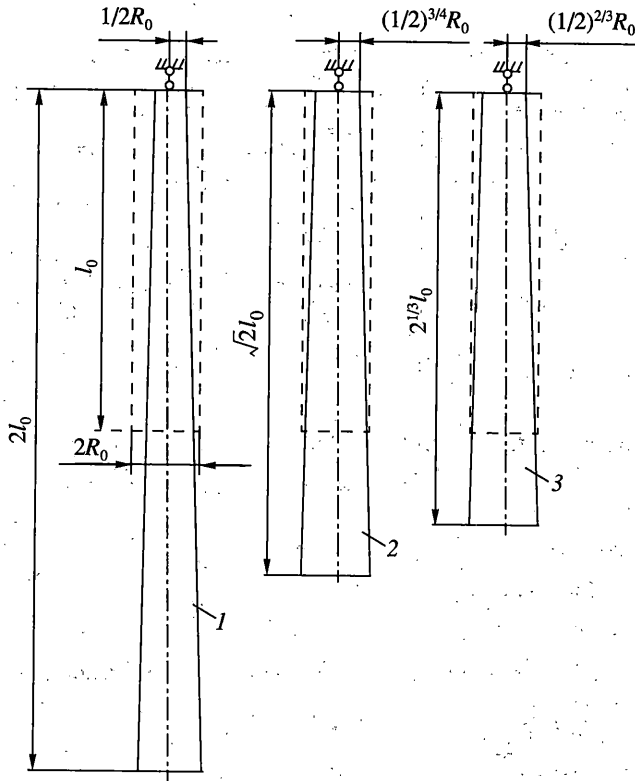
Окончательный вид решения уравнения Абеля первого рода имеет вид

$$z = \frac{l_0}{(1-t/t_*)^{1/2}} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{z_0}{l_0} \right) \left[\left(1 - \frac{z_0}{l_0} \right)^2 + \frac{z_0}{l_0} \left(2 - \frac{z_0}{l_0} \right) \left(1 - \frac{t}{t_*} \right)^{-1} \right]^{-1/2} \right\} \quad (3.3)$$

В табл. 3 для $t = t_*/2$ приведены результаты расчетов текущих координат при $n = 2$ по формулам: (3.3) – точное решение, (1.8) – первое и (1.10) – второе приближения.

Расчеты показывают, что в данном случае уже второе приближение обеспечивает приемлемую точность с учетом приближенного выполнения гипотезы плоских сечений и разброса значений констант в уравнении состояния материала.

4. Вопрос о фигуре стержня может быть решен с помощью условия несжимаемости материала. Предположим, что поперечное сечение стержня – круглое. Тогда на основе условия несжимаемости $\xi_r + \xi_\theta + \xi_z = 0$, где $\xi_r = \xi_\theta$ – скорости деформаций в радиальном и окружном направлениях, соответственно, получаем $v_r = -\xi_r/2$ (v_r – скорость радиального перемещения, r – радиус).



Фиг. 2

На наружном радиусе $r = R$ с учетом равенства (1.3) имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{(n+1)R}{2nt_*l_0^n}(l-z)^n$$

интеграл которого имеет вид

$$\ln \frac{R}{R_0} = -\frac{n+1}{2nt_*l_0^n} \int_0^t (l-z)^n d\tau \quad (4.1)$$

где $R_0 = R$ при $t = 0$ – функция лагранжевой координаты z_0 , зависимость $l(\tau)$ определяется уравнением (1.6).

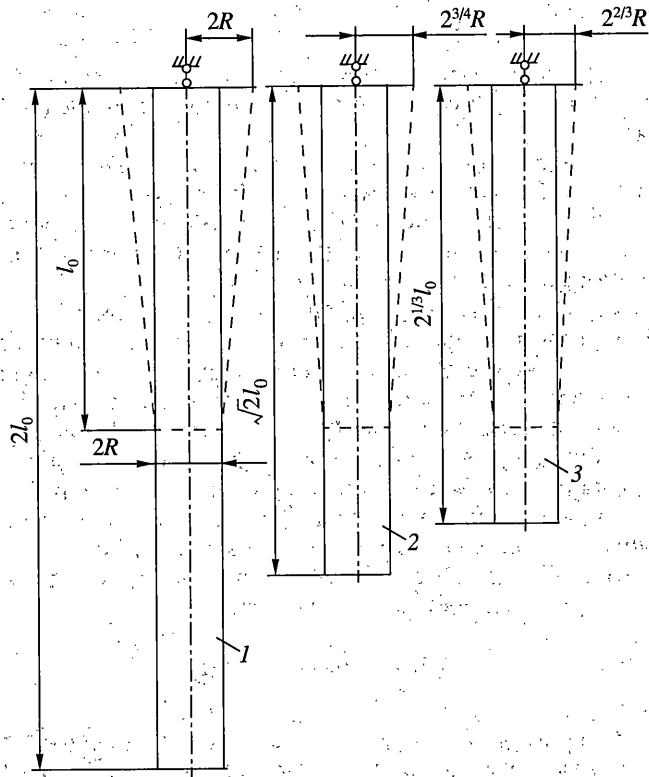
Из уравнения (4.1), в частности, следует, что в верхнем сечении, т.е. при $z = z_0 = 0$:

$$R = R_0(1 - t/t_*)^{(n+1)/(2n)}$$

а в нижнем сечении, где $z = l$, имеет место равенство $R = R_0$ в любой момент времени. В момент вязкого разрушения $t = t_*$ радиус верхнего сечения уменьшается до нуля.

При $n = 1$ точное решение (2.4) уравнения Бернулли совместно с уравнением (4.1) приводит к формуле

$$R = R_0 \left[1 - \frac{t}{t_*} \left(1 - \frac{z_0}{l_0} \right) \right] \quad (4.2)$$



Фиг. 3

которая показывает, что радиус поперечного сечения в текущий момент времени линейно зависит от лагранжевой координаты данного сечения.

Подставим в формулу (4.2) лагранжеву координату, связанную с эйлеровой соотношением (2.5). В результате получим дробно-линейную зависимость текущего значения радиуса поперечного сечения от эйлеровой координаты

$$R = R_0 \left(1 - \frac{t}{t_*} \right) \left[1 - \frac{zt}{l_0 t_*} \left(1 - \frac{t}{t_*} \right) \right]^{-1} \quad (4.3)$$

Таким образом, даже в простейшем случае материала с линейной ползучестью образующая боковой поверхности стержня при $R_0 = \text{const}$ не является прямолинейной. Хотя, отклонения точной формы образующей от прямой невелики.

Обращенная форма соотношения (4.3):

$$R_0 = \frac{R}{1 - t/t_*} \left[1 - \frac{zt}{l_0 t_*} \left(1 - \frac{t}{t_*} \right) \right]$$

показывает, что для обеспечения условия $R = \text{const}$ в некоторый момент времени, начальные радиусы поперечных сечений должны изменяться по линейному закону в зависимости от эйлеровых координат, соответствующих выбранному моменту времени.

При $n = 2$ точное решение (3.3) уравнения Абеля первого рода совместно с уравнением (4.1) дает возможность получить формулу, определяющую фигуру стержня

$$R = R_0 \left[1 - \left(1 - \frac{z_0}{l_0} \right)^2 \frac{t}{t_*} \right]^{3/4}$$

$$R = R(z), \quad R_0 = R_0(z_0)$$

При $n \geq 3$ точное решение $z = z(z_0)$ отсутствует. Поэтому для определения фигуры стержня в случае $n \geq 3$ можно использовать второе приближение (1.10) в сочетании с уравнением (4.1).

На фиг. 2 изображены в качестве примера фигуры стержня, начально постоянно поперечного сечения, в момент времени $t = t_*/2$ (1 : $n = 1$, 2 : $n = 2$, 3 : $n = 3$).

В случае $R_0 = \text{const}$, как уже отмечалось, форма образующей боковой поверхности стержня не сильно отличается от прямолинейной. Поэтому на фиг. 2 образующая боковой поверхности схематизирована прямой.

Для приложений в технологических процессах представляет интерес решение обратной задачи. В частности, на фиг. 3 показаны штриховыми линиями очертания боковой поверхности стержня, с прямолинейной аппроксимацией образующей боковой поверхности в начальный момент времени, обеспечивающие выполнение требования $R = \text{const}$ в момент времени $t = t_*/2$ (1 : $n = 1$, 2 : $n = 2$, 3 : $n = 3$).

В общем случае, когда $R_0 = R_0(z_0)$ в прямой задаче, или необходимо обеспечить заданную конфигурацию $R(z)$ в некоторый момент времени в обратной задаче, установленные закономерности на основе теоретического решения дают возможность рассчитать фигуры стержня для материалов, характеризующихся различными значениями показателя n , и оценить точность той или иной аппроксимации образующей боковой поверхности в любой момент времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Папкович П.Ф. Теория упругости. М.; Л.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Rayleigh Lord. The Theory of Sound. L.: MacMillan, 1929 = Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1977. 512 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 828 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.04.2003