

© 2005 г. Ю.Н. БАХАРЕВА, Ю.Н. РАДАЕВ

ОБ ОБОБЩЕНИИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ШИЛДА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматривается обобщение автомоделных решений осесимметричной задачи, соответствующих течению на ребре призмы Треска, полученных Р. Шилдом [1]. Поиск новых автомоделных решений реализован на основе соотношений пространственной задачи, сформулированных в изостатических координатах, с учетом осевой симметрии и возможности отделения еще одной неугловой изостатической координаты. Установлено, что осесимметричная задача теории пластичности допускает ряд автомоделных решений, обобщающих решения Шилда, когда в качестве автомоделных переменных выступают произведения степеней изостатических координат. При некоторых значениях показателей, участвующих в представлении автомоделного решения, удается понизить порядок уравнений осесимметричной задачи на одну единицу и свести таким образом задачу к решению одного нелинейного неавтономного уравнения первого порядка, которое приводится затем к уравнению Абея первого рода. Построены интегральные кривые этого уравнения внутри естественной области определения. В области автомоделного решения численно получена зависимость наибольшего (наименьшего) главного напряжения от полярного угла в меридиональной плоскости.

1. Введение. В [2] установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска) уравнения пространственной задачи теории пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Уравнения пространственной и осесимметричной задачи математической теории пластичности и их анализ даны в [3]. В [4] также приведены соотношения теории пластичности в случае осевой симметрии и изучены различные режимы осесимметричного пластического течения. В [1] рассматривается осесимметричное пластическое течение идеально пластического тела с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. В этой работе также изучены пластические поля напряжений, примыкающие к свободным от нагрузок коническим поверхностям.

Целью представляемой работы является поиск новых автомоделных решений осесимметричной задачи теории пластичности с помощью метода развитого в [5–7].

2. Основные уравнения. Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. Обозначим через σ тензор напряжений; l, m, n – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – соответствующие собственные значения (главные напряжения); k – предел текучести при чистом сдвиге. Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 l \otimes l + \sigma_2 m \otimes m + \sigma_3 n \otimes n \quad (2.1)$$

Оссимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа¹: тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k . Первый случай исследуется элементарными средствами. Второй случай – состояние “полной пластичности” Хаара – Кармана. Если присвоить тангенциальному главному напряжению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему состояние “полной пластичности”:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k \quad (2.2)$$

Пусть, для определенности, σ_1 – наибольшее меридиональное главное напряжение; тогда

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2k \quad (2.3)$$

Это уравнение определяет ребро призмы Треска в пространстве напряжений.

Задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, статически определима, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Приведем, следуя [5, 6], уравнение равновесия $\operatorname{div} \sigma = 0$ к виду

$$\operatorname{grad} \sigma_3 - 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1) \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) принадлежит к гиперболическому типу; его характеристики найдены в [3].

Преобразуем уравнение (2.4) к криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 . Выбор координатной системы, наиболее подходящей для изучения трехмерных уравнений математической теории пластичности, будет указан ниже. Ковариантные компоненты векторного поля $\operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ равны

$$(\operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial (g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] \quad (l = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

где g_{ij} – компоненты метрического тензора, $g = \det \|g_{ij}\|$, $[rs, l]$ – символы Кристоффеля первого рода. Через n^m обозначены контравариантные компоненты единичного векторного поля \mathbf{n} .

Используя формулу (2.5), представим уравнение (2.4) в ковариантной форме

$$-\frac{\partial (\sigma_3)}{\partial \xi^l} + g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial (g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] = 0 \quad (2.6)$$

Ключевым для дальнейшего анализа системы уравнений пространственной задачи теории пластичности (2.6) выступает условие расслоенности векторного поля \mathbf{n} в зоне пластического течения.

¹ Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при оссимметричном напряженном состоянии. Классификация различных режимов оссимметричного пластического течения приводится в [1] и воспроизводится в [4].

Можно показать [6], что нетривиальные решения уравнения (2.6) в некоторой области можно получить только в случае, если векторное поле \mathbf{n} расслоенное (т.е. существует семейство поверхностей, заполняющее эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям данного семейства совпадает с полем \mathbf{n} собственных векторов тензора напряжений) и вихрь его ненулевой. Эти два условия (расслоенность и ненулевая завихренность) могут быть выражены следующим образом: $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$, $\text{rot} \mathbf{n} \neq 0$.

Уравнение (2.6) в криволинейных координатах ξ^m , выбранных таким образом, что координатные поверхности $\xi^3 = \text{const}$ есть слои поля \mathbf{n} , а поверхности $\xi^1 = \text{const}$ и $\xi^2 = \text{const}$ – интегральные поверхности поля \mathbf{n} , существенно упрощается и сводится к трем интегрируемым соотношениям [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} \right) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} - \ln \sqrt{g} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (2.7) состоит в возможности разложения детерминанта g в произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3) \tag{2.8}$$

3. Автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности. Автомодельные решения уравнений теории пластичности удобнее всего искать, используя специальные переменные ξ^1, ξ^2, ξ^3 и учитывая возможность отделения координаты ξ^3 .

В случае осевой симметрии формулы, связывающие декартовы координаты x_1, x_2, x_3 и криволинейные координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 , следует очевидно искать в следующем виде:

$$x_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2, \quad x_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2, \quad x_3 = h(\xi^1, \xi^3) \tag{3.1}$$

Здесь ξ^i – специальные криволинейные координаты, определяемые по векторному полю \mathbf{n} , функции f и h подлежат определению, ξ^2 – угловая координата.

Так как криволинейная координатная сетка характеризуется свойствами $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, а детерминант g разлагается в произведение двух функций (см. формулу (2.8)), то отображающие функции (3.1) необходимо должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1 \partial f_1}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \frac{\partial f_2 \partial f_2}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \frac{\partial f_3 \partial f_3}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} &= 0 \\ \frac{\partial f_1 \partial f_1}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} + \frac{\partial f_2 \partial f_2}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} + \frac{\partial f_3 \partial f_3}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} &= 0 \\ \left(\frac{\partial f_k \partial f_k}{\partial \xi^3 \partial \xi^3} \right) \left[\left(\frac{\partial f_p \partial f_p}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial f_r \partial f_r}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial f_s \partial f_s}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right)^2 \right] &= G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$(f_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2, f_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2, f_3 = h(\xi^1, \xi^3))$$

Тогда поверхности $\xi^3 = \text{const}$ можно принять в качестве слоев поля \mathbf{n} и затем с помощью интегралов (2.7) восстановить поле напряжений.

Подставим выражения (3.1) в систему дифференциальных уравнений (3.2). В результате находим

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^1} \frac{\partial f}{\partial \xi^3} + \frac{\partial h}{\partial \xi^1} \frac{\partial h}{\partial \xi^3} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \xi^1} \right)^2 \right] f^2 = G_1(\xi^1) G_2(\xi^3) \quad (3.3)$$

В этой системе уравнений у функции G_1 исключается зависимость от угловой координаты ξ^2 в силу осевой симметрии.

Будем искать решения системы (3.3) в предположении, что автомодельная переменная представляет собой произведение степеней изостатических переменных с различными показателями

$$f = \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} F(\xi), \quad h = \xi^{1\alpha_1} \xi^{3\beta_1} H(\xi) \quad (3.4)$$

где $\xi = \xi^{1\gamma} \xi^{3\delta}$ – автомодельная переменная; $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta$ – некоторые показатели.

Тогда, при условии, что существует показатель ω такой, что

$$\xi^\omega = \xi^{1\alpha_1 - \alpha} \xi^{3\beta_1 - \beta} \quad (3.5)$$

система двух уравнений в частных производных (3.3) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\alpha\beta F^2 + \xi(\alpha\delta + \gamma\beta)FF' + \xi^2\gamma\delta F'^2 +$$

$$+ \xi^{2\omega}[\alpha_1\beta_1 H^2 + \xi(\alpha_1\delta + \beta_1\gamma)HH' + \xi^2\gamma\delta H'^2] = 0 \quad (3.6)$$

$$\left(FH' - HF' + \frac{\omega}{\xi} HF \right)^2 = \frac{G_1(\xi^1)G_2(\xi^3)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \xi^{14\alpha + 2\alpha_1 - 2} \xi^{34\beta + 2\beta_1 - 2} \xi^2 F^2}$$

где в силу условия (3.5) $\alpha_1 = \alpha + \gamma\omega$, $\beta_1 = \beta + \delta\omega$, а остальные показатели независимы. Естественно предполагается выполнение условия $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

С целью устранения переменных ξ^1 и ξ^3 в (3.6) представим G_1 и G_2 в следующем виде:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{14\alpha + 2\alpha_1 + \gamma(\mu + 2) - 2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{34\beta + 2\beta_1 + \delta(\mu + 2) - 2} \quad (3.7)$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные константы, а μ – некоторый показатель.

Вводя в плоскости $\xi^{-\omega/2}F$, $\xi^{\omega/2}H$ полярные координаты

$$\xi^{-\omega/2}F = \rho \cos t, \quad \xi^{\omega/2}H = \rho \sin t \quad (3.8)$$

преобразуем полученную систему (3.6), приняв $C = C_1 C_2$, к виду

$$4\alpha\beta\rho^2 + 2(\alpha\delta + \gamma\beta)\omega\rho^2 + \gamma\delta\omega^2\rho^2 +$$

$$+ 4\xi[(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)\rho\rho'] + 4\xi^2\gamma\delta(\rho'^2 + \rho^2 t'^2) = 0 \quad (3.9)$$

$$t'^2 = \frac{C\xi^{\mu - \omega}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^6 \cos^2 t}$$

Отметим, что в меридиональной плоскости $x_2 = 0$ справедливы соотношения

$$\xi^\omega \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} \rho^2 = x_1^2 + x_3^2, \quad \operatorname{tg} \iota = x_3/x_1$$

т.е. угол ι – полярный угол в меридиональной плоскости, отсчитываемый от горизонтальной оси.

Разделим первое уравнение полученной системы на второе уравнение этой же системы. Заметим что, положив $\mu = \omega - 2$ зависимость от автомодельной переменной ξ будет устранена. При этих условиях вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.9) получаем дифференциальное первого порядка относительно ρ , ι , при этом полагаем, что $d/d\xi > 0$:

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left(\frac{dW}{d\iota}\right)^2, \quad W = \ln \rho$$

$$l_1 = \frac{-(4\alpha\beta + 2\omega(\alpha\delta + \beta\gamma) + \omega^2\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{4C\gamma\delta} \quad (3.10)$$

$$l_2 = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\sqrt{C\gamma\delta}} \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

Исследуем знак коэффициента l_1 , для чего необходимо исследовать знак квадратного трехчлена $4\alpha\beta + 2(\alpha\delta + \beta\gamma)\omega + \gamma\delta\omega^2$. Подсчитывая его корни

$$\omega_{1,2} = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma) \pm |\alpha\delta - \beta\gamma|}{\gamma\delta}$$

для l_1, l_2 находим выражения

$$l_1 = -\gamma^2 \delta^2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{16C}$$

$$l_2 = -\gamma\delta \frac{(\omega_1 - \omega_2)(2\omega - \omega_1 - \omega_2)}{4\sqrt{C}}$$

Предположим, что $l_1 > 0$, т.е. либо γ и δ одного знака и $\omega_2 < \omega < \omega_1$, либо γ и δ разных знаков и $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Тогда, поскольку $\operatorname{sign}(\gamma\delta) \operatorname{sign}(\omega_1 - \omega_2) = 1$, то

$$\frac{l_2}{\sqrt{l_1}} = -\frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}}, \quad \omega' = \omega - \omega_1, \quad \omega'' = \omega - \omega_2$$

Произведем замены переменных $e^{3W} = z^{-1}$ и $\sin \iota = u$. Обозначая $V = z/\sqrt{l_1}$, уравнение (3.10) представим в форме

$$\left(\frac{dV}{du}\right)^2 = 3^2 \left(1 + \frac{\omega' + \omega''}{3\sqrt{|\omega'\omega''|}} \frac{dV}{du} - \frac{V^2}{1-u^2}\right) \quad (3.11)$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2dV}{3du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega'\omega''|} + 4\left(1 - \frac{V^2}{1-u^2}\right)} \quad (3.12)$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса, уравнение которого есть

$$u^2 + V^2/\gamma_1^2 = 1$$

а большая полуось определяется как

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega'\omega''|}}$$

Заметим, что при условии $l_1 > 0$ необходимо $\omega'\omega'' < 0$, т.е.

$$\gamma_1^2 = \frac{(\omega' - \omega'')^2}{4\omega'\omega''}$$

Уравнение (3.12) представляет собой нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение, содержащее иррациональность в правой части. Аналитически уравнение (3.11) пока проинтегрировать не удается. Поэтому оно было проанализировано численно. Результаты численного анализа и соответствующие графические построения приведены в [7].

Вводя вместо пары переменных V и u пару τ , ι по формулам $V = \gamma_1 \sin \tau \cos \iota$, $u = \sin \iota$, приходим к уравнению, содержащему тригонометрическую иррациональность

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \left(\frac{3}{2} \frac{\omega' + \omega''}{\gamma_1 \sqrt{|\omega'\omega''|} \cos \tau} \pm 3 \right) + \text{tg} \tau \text{tg} \iota \tag{3.13}$$

которое, учитывая, что $\omega'\omega'' < 0$ при условии $l_1 > 0$, может быть преобразовано к форме

$$\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left(\frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''| \cos \tau} \pm 1 \right) + \text{tg} \tau \text{tg} \iota \tag{3.14}$$

Заметим, что уравнение (4.3), полученное в [1],

$$\chi' \sin \chi + 1 + 3 \sin \chi + \cos \chi \text{tg} \psi = 0 \tag{3.15}$$

определяющее поля напряжений в окрестности прямолинейных свободных границ, являются частным случаем уравнения (3.14), если принять $(\omega' + \omega'')/|\omega' - \omega''| = 1/3$, произвести замены $\tau = \pi/2 - \chi$, $\iota = \psi$ и выбрать положительный знак. Можно поэтому сделать вывод, что полученное уравнение (3.14) является обобщением уравнения Шилда (3.15) и, следовательно, определяет все известные к настоящему времени автомодельные решения.

Предположим далее, что $l_1 < 0$, т.е.: γ и δ одного знака и $\omega > \omega_1$; γ и δ одного знака и $\omega < \omega_2$; γ и δ разных знаков и $\omega > \omega_2$; γ и δ разных знаков и $\omega < \omega_1$.

Обозначая $V = z/\sqrt{-l_1}$, уравнение (3.10) представим в форме

$$\left(\frac{dV}{du} \right)^2 = 3^2 \left(-1 + \frac{\omega' + \omega''}{3\sqrt{|\omega'\omega''|}} \frac{dV}{du} - \frac{V^2}{1-u^2} \right) \tag{3.16}$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2dV}{3du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega'\omega''|} - 4 \left(1 + \frac{V^2}{1-u^2} \right)} \tag{3.17}$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса, уравнение которого есть

$$u^2 + V^2/\gamma_2^2 = 1$$

а большая полуось определяется как

$$\gamma_2 = \sqrt{-1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega'\omega''|}}$$

Заметим, что при условии $l_1 < 0$ необходимо $\omega'\omega'' > 0$, т.е.

$$\gamma_2^2 = (\omega' - \omega'')^2 / (4\omega'\omega'')$$

Поведение интегральных кривых уравнения (3.17) внутри естественной области определения представлено в [7].

Вводя вместо пары переменных V и u пару τ, ι по формулам $V = \gamma_2 \sin \tau \cos \iota, u = \sin \iota$, приходим к уравнению, совпадающему с (3.14).

Форма автомодельного решения в переменных ι, τ определяется, как это следует из уравнения (3.14), единственным параметром

$$\omega^* = \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|} \quad (3.18)$$

Этот параметр может быть выражен через показатели автомодельного решения

$$\omega^* = \text{sign}(\gamma\delta) \frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\beta}{|\alpha\delta - \beta\gamma|} \quad (3.19)$$

Уравнение (3.14) упрощается, если $\omega' + \omega'' = 0$, т.е. когда показатель ω подобран в соответствии с формулой²

$$-\omega = \alpha/\gamma + \beta/\delta$$

Тогда получаем наиболее простую и симметричную форму этого уравнения:

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \pm \text{tg} \frac{2\pi}{3} + \text{tg} \tau \text{tg} \iota \quad (3.20)$$

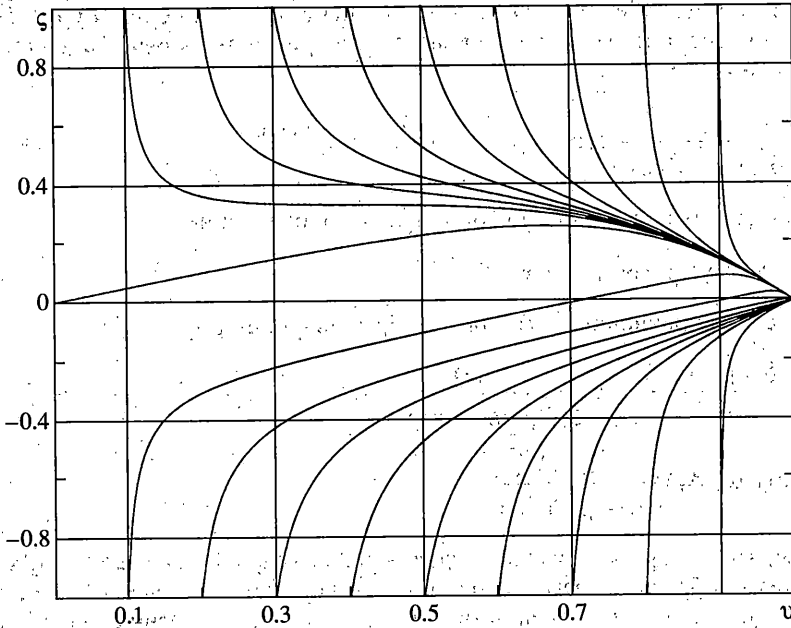
Исследуем полученное уравнение. Сначала вместо переменных τ, ι введем новые переменные: $\lambda = \text{tg} \tau, v = \text{tg} \iota$, а затем заменим неизвестную функцию по формуле $\lambda = a(v)\zeta + b(v)$.

Подберем выражения для $a(v)$ и $b(v)$ так, чтобы вид уравнения стал максимально простым. Положив $b = \mp v^{-1}$ и $a = (1 + v^2)^2 v^{-3}$, уравнение заменой независимой переменной $v = 1/(1 + v^2)$ удастся свести к виду

$$\frac{d\zeta}{dv} = \mp \frac{1}{2} - \frac{\zeta^3}{2v^2(1-v)^3} \quad (3.21)$$

Здесь изменение независимой переменной v ограничивается интервалом $(0, 1]$.

² Речь не идет об уравнении (3.16), поскольку равенство $\omega' + \omega'' = 0$ предполагает, что $\omega'\omega'' < 0$.



Фиг. 1

Полученное уравнение классифицируется как уравнение Абеля первого рода³ и сводится к уравнению Абеля второго рода, если известно хотя бы одно его частное решение.

Проинтегрируем уравнение (3.21) численно, задавая значения v на отрезке $[0.1, 0.9]$ с шагом 0.1 при $\xi = \pm 1$ и значение $v = 0$ при $\xi = 0$. На фиг. 1 изображены интегральные кривые уравнения (3.21) внутри полосы $0 < v < 1$ в случае, когда в уравнении выбран положительный знак. Видно, что все интегральные кривые этого уравнения, расположенные внутри указанной полосы, проходят через точку $v = 1, \xi = 0$.

4. Распределение главных напряжений в области автомодельного решения. Вычисляя метрику, соответствующую преобразованию координат (3.1), на основании (2.7) может быть найдено распределение главного нормального напряжения σ_3 в зоне автомодельного решения.

С помощью несложных расчетов компоненту g_{33} метрического тензора можно получить в форме

$$g_{33} = \xi^{12\alpha + \gamma\omega} \xi^{32\beta + \delta\omega - 2} [((\beta + \delta\omega/2)\rho + \delta\xi\rho')^2 + (\delta\xi\rho')^2] \quad (4.1)$$

Определитель g в соответствии с формулами (2.8), а также представлениями (см. (3.7)):

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{16\alpha + 2\gamma\omega + \gamma(\mu + 2) - 2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{36\beta + 2\delta\omega + \delta(\mu + 2) - 2} \quad (4.2)$$

вычисляется в виде

$$g = C \xi^{16\alpha + 2\gamma\omega - 2 + \gamma(2 + \mu)} \xi^{36\beta + 2\delta\omega - 2 + \delta(2 + \mu)} \quad (4.3)$$

³ См., например, Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 44–47; Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. С. 80.

Преобразуем выражение (4.1). Для этого воспользуемся первым уравнением системы (3.9) и разрешим его относительно ρ' . Дискриминант квадратного относительно ρ' уравнения есть

$$D = \frac{\xi^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^4 \cos^2 \iota} [(\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C\gamma^2 \delta^2 \xi^{\mu - \omega + 2}] \quad (4.4)$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести обозначение

$$D^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C\gamma^2 \delta^2 \xi^{\mu - \omega + 2}$$

Тогда система уравнений (3.9) примет нормальную форму

$$\begin{aligned} \rho' &= -\frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta\omega\rho}{2\gamma\delta} \frac{1}{\xi} \pm \frac{\sqrt{D^*}}{2\gamma\delta\xi(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^2 \cos \iota} \\ \iota' &= \text{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\sqrt{C}\xi^{(\mu - \omega)/2}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^3 \cos \iota} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отметим, что из определения автомодельной переменной ξ следует, что $\xi^1 = \xi^{1/\gamma}\xi^{3 - \delta/\gamma}$. Устранив таким образом переменную ξ^1 и учитывая систему уравнений (4.5), на основании которой можно исключить производные ρ' , ι' , запишем соотношение (4.1) для g_{33} в форме

$$g_{33} = \frac{\xi^{32(\beta - \alpha\delta/\gamma - 1)} \xi^{2\alpha/\gamma + \omega}}{2\gamma^2} \left[(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho \cos \iota} \right] \quad (4.6)$$

После этого, определив g_{33} , можно следующим образом найти выражение для σ_3 . Из анализа первых двух уравнений системы (2.7) можно сделать вывод о том, что сумма $\sigma_3/2k + \ln \sqrt{g_{33}}$ может зависеть только от координаты ξ^3 :

$$\sigma_3/(2k) + \ln \sqrt{g_{33}} = f(\xi^3) \quad (4.7)$$

Тогда последнее уравнение этой системы позволяет заключить, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} (f(\xi^3) - \ln \sqrt{g}) = 0 \quad (4.8)$$

Воспользуемся далее соотношением для определителя метрического тензора (4.3); устраним в нем переменную ξ^1 (выразив ее через ξ и ξ^3) и, интегрируя (4.8), установим вид функции $f(\xi^3)$:

$$f(\xi^3) = (3\beta + \delta\omega - 1 + \delta(2 + \mu)/2) \ln |\xi^3| + \text{const} \quad (4.9)$$

Таким образом удается определить главное напряжение σ_3 в области автомодельного решения

$$\sigma_3 = 2k \ln \left| \xi^{33\beta + \delta(\omega + 1 + \mu/2) - 1} g_{33}^{-1/2} \right| + \text{const} \quad (4.10)$$

Остальные главные напряжения определяются в соответствии с равенствами (2.3).

Отметим, что, согласно (4.10), главное напряжение σ_3 зависит от ξ , ξ^3 , ι и ρ . Численно анализируя систему (4.5), можно получить зависимости $\iota = \iota(\xi)$, $\rho = \rho(\xi)$ и тем самым выразить главное напряжение σ_3 только через переменные ξ и ξ^3 . Будем из-

бегать прямого анализа системы (4.5) и в целях простоты ограничимся лишь минимальным набором параметров, определяющих форму автомоделного решения.

Прежде всего, удобно, используя (4.10), подобрать такую величину, которая зависела бы только от автомоделной переменной ξ :

$$\begin{aligned} \sigma_3 - k(4\beta + 2\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(2 + \mu)) \ln|\xi^3| = \\ = -k \ln \left| \frac{\xi^{2\alpha/\gamma + \omega}}{2\gamma^2} \left[(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho \cos t} \right] \right| + \text{const} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Рассмотрим далее частный случай. В определении автомоделной переменной ξ положим $\gamma = 1$ и $\delta = -1$, т.е. $\xi = \xi^1/\xi^3$.

Предположим также, что все остальные параметры, определяющие, согласно (3.4), форму автомоделного решения осесимметричной задачи, равны друг другу: $\alpha = \beta = \omega = \alpha_1 = \beta_1$. Тогда на основании (3.5) заключаем, что показатель $\omega = 0$. Заметим, что $\mu = -2$, $\omega^* = 0$.

Необходимое для построения распределения главного напряжения σ_3 соотношение (4.6) представляется тогда в виде следующей зависимости:

$$g_{33} = \xi^{2\alpha} \xi^{34\alpha-2} \left(2\alpha^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho \cos t} \right), \quad D^* = 16\alpha^4 \rho^6 \cos^2 t - 4C \quad (4.12)$$

Соотношение (4.11) с учетом сделанных выше предположений о значениях показателей переписем в виде

$$\sigma_3 - 2\alpha k \ln|\xi^3| = -k \ln \left| \xi^{2\alpha} \left(2\alpha^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho \cos t} \right) \right| + \text{const} \quad (4.13)$$

а систему уравнений (4.5), ограничившись выбором положительных знаков, представим в форме

$$\rho' = \frac{\sqrt{D^*}}{4\alpha\xi\rho^2 \cos t}, \quad t' = \frac{\sqrt{C}}{2|\alpha|\xi\rho^3 \cos t} \quad (4.14)$$

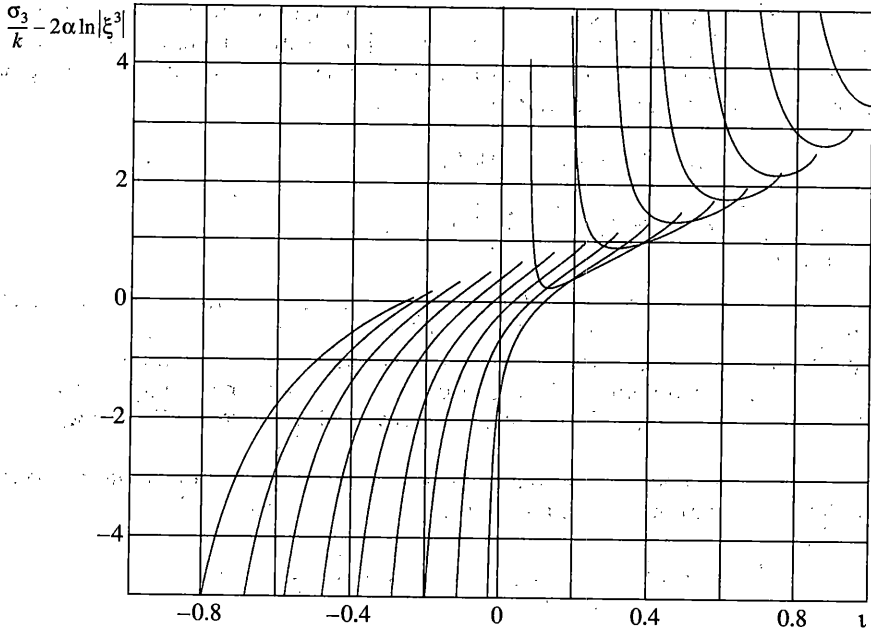
Для рассматриваемого частного случая значения параметров l_1 и l_2 вычисляются как $l_1 = 4\alpha^4/C$, $l_2 = 0$. Ясно, что $l_1 > 0$, и уравнение (3.12) для переменных u , V будет иметь следующий вид:

$$\frac{dV}{du} = \pm 3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{1-u^2}} \quad (4.15)$$

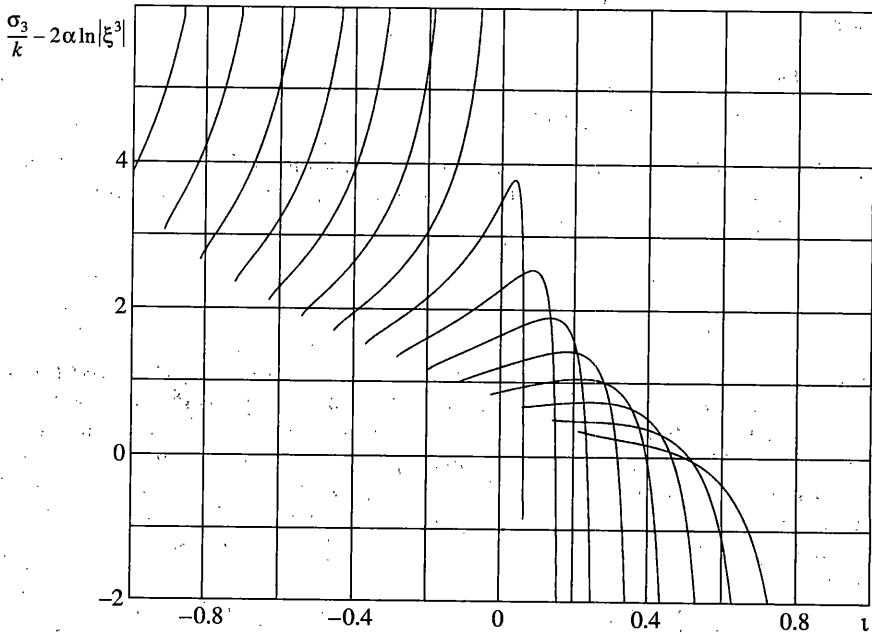
Проинтегрируем это уравнение (выбрав положительный знак) численно, задавая при $V = 0.1$ значения u на отрезке $[-0.8, 0.8]$ с шагом 0.1. Произведем затем обратные замены переменных. В результате получим функциональные зависимости $\rho = \rho(t)$ вдоль каждой из 17 интегральных кривых уравнения (4.15) на плоскости u , V . Используя второе уравнение системы (4.14) и разделяя в нем переменные, находим зависимости $\xi = \xi(t)$ (или $t = t(\xi)$) вдоль упомянутых интегральных кривых. В итоге можно найти зависимость разности $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln|\xi^3|$ от полярного угла t в меридиональной плоскости.

Графические построения, соответствующие значению показателя $\alpha = -1/2$, приводятся на фиг. 2, если $V > 0$, и фиг. 3, если $V < 0$. Если $V = 0$, то необходимо $\rho = 0$ и, сле-

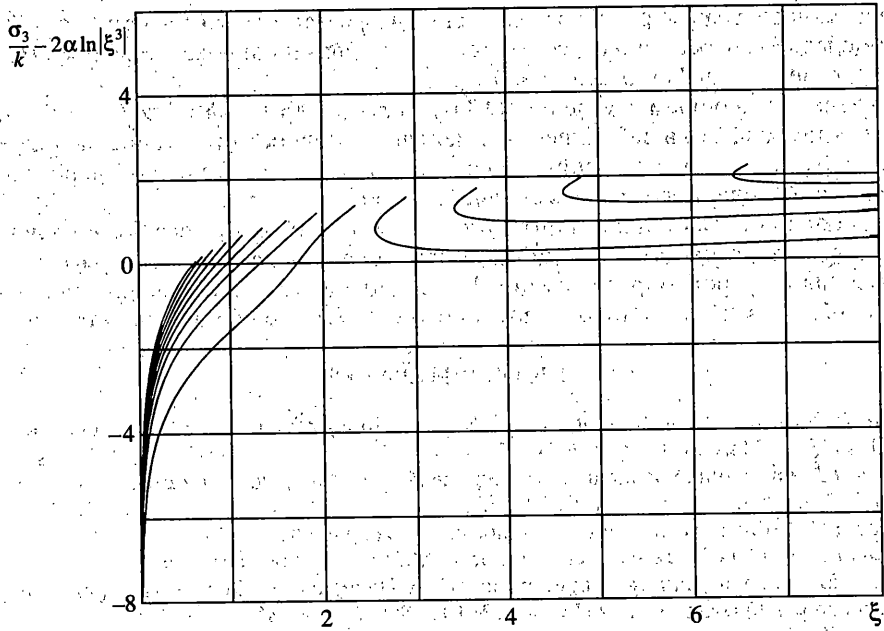
⁴ Отметим, что автомоделным решениям Шилда соответствует значение $\omega^* = 1/3$.



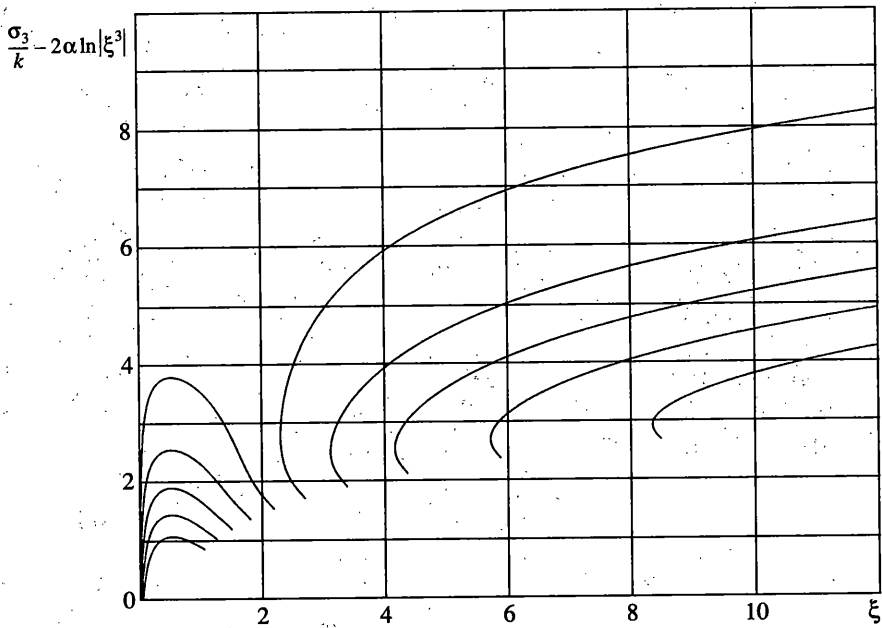
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

довательно, производные ρ' и τ' неограниченно возрастают. Зависимости $k^{-1}\sigma_3 - 2\alpha \ln|\xi^3|$ от автомодельной переменной ξ , соответствующие значению показателя $\alpha = -1/2$, даны на фиг. 4, если $V > 0$, и фиг. 5, если $V < 0$.

Очевидно, что в общем случае (см. (4.11)), положив $4\beta + 2\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(2 + \mu) = 0$, можно заключить, что наибольшее (наименьшее) главное нормальное напряжение в области автомодельного решения зависит только от автомодельной переменной ξ (или только от полярного угла в меридиональной плоскости).

Таким образом, удается построить автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности, обобщающие решение Шилда, которое при некоторых значениях параметров, определяющих форму автомодельных решений, также как и решение Шилда зависят только от полярного угла i в меридиональной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shield R.T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. № 1193. P. 267–287.
2. *Ивлев Д.Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. *Радаев Ю.Н.* О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 86–94.
6. *Радаев Ю.Н.* К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 5. С. 102–120.
7. *Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н.* К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2003. № 4(30). С. 125–139.

Самара

Поступила в редакцию
5.03.2003