МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2005

УДК 534.1

© 2005 г. В. В. КУЛАГИН, В. А. ПРОУРЗИН

АМОРТИЗАТОР, МАКСИМАЛЬНО РОБАСТНЫЙ К ИЗМЕНЕНИЮ МАССЫ ЗАЩИЩАЕМОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрена задача оптимальной амортизации для случая, когда ограничены смещение и перегрузка амортизируемого объекта. Выбором динамической характеристики максимизируется диапазон значений массы амортизируемого объекта, для которых данные ограничения выполняются. Решения получены на классе демпферов и на классе упругих амортизаторов.

1. Введение. Известна задача оптимальной амортизации [1], где масса амортизируемого объекта может принимать значения из заданного интервала. При ограниченном ходе амортизатора минимизируется максимум перегрузки объекта, взятый по данному диапазону значений массы (т.е. решается игровая задача о минимуме гарантированного результата).

В предлагаемой ниже постановке задачи оптимальной амортизации диапазон значений массы объекта не известен. Условия защищенности амортизируемого объекта задаются ограничением хода и перегрузки. Каждому амортизатору сопоставляется множество робастности – все значения массы, для которых обеспечены условия защищенности объекта. Вводится количественная оценка множества робастности – показатель робастности амортизатора, и решается задача выбора амортизатора с максимальным показателем робастности. Максимизация осуществляется на классе всех упругих характеристик и на классе всех диссипативных характеристик.

Данная постановка актуальна для пассивных амортизаторов. В активных системах виброударозащиты теоретически возможна автоматическая подстройка усилия в амортизаторе – с тем чтобы обеспечить требуемое ускорение защищаемого объекта при изменении его массы.

Исследование проводилось в предположении, что внешнее воздействие есть дельта-функция заданной интенсивности. Использование результатов работ [2, 3] позволило распространить полученные решения на класс воздействия с ограниченным по величине интегралом от модуля.

2. Постановка задачи. *2.1.* Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = -m\sigma(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \tag{2.1}$$

где x – координата амортизируемого объекта относительно подвижного основания; m – масса объекта; $f(x, \dot{x}) \in F$ – динамическая характеристика амортизатора; $\sigma(t) \in \Sigma$ – абсолютное ускорение основания (внешнее воздействие). Решение уравнения (2.1) есть функция $x(t) = x(t; f, m)$.

Пусть $I(f, m)$ – максимальное абсолютное ускорение объекта (перегрузка), $J(f, m)$ – его максимальное отклонение от основания (ход амортизатора). Условия защищенности объекта заданы в виде

$$I(f, m) = \max_t \left| \frac{f(x(t), \dot{x}(t))}{m} \right| \le \alpha, \quad J(f, m) = \max_t |x(t)| \le \beta \tag{2.2}$$

где α, β – заданные положительные числа.

Динамической характеристике $f = f(x, \dot{x})$ сопоставляется множество значений массы, при которых выполнены условия защищенности (2.2):

$$M(f) = \{m : I(f, m) \le \alpha, \quad J(f, m) \le \beta\} \tag{2.3}$$

Это множество называется множеством робастности характеристики $f = f(x, \dot{x})$. Вводится количественная оценка множества робастности $\varphi(M(f))$ – показатель робастности характеристики $f = f(x, \dot{x})$. После переобозначения $\Phi(f) = \varphi(M(f))$ задача о максимально робастном амортизаторе есть задача нахождения характеристики $f^* = f^*(x, \dot{x})$ из заданного класса F, такой, что

$$\Phi(f^*) = \max_{f \in F} \Phi(f) \tag{2.4}$$

2.2. Ниже рассматриваются некоторые свойства множества робастности (2.3).

Пусть для характеристики $f = f(x, \dot{x})$ множество $M(f)$ не пусто. Тогда для произвольного числа $a > 0$ и характеристики $af(x, \dot{x})$ выполнено

$$M(af) = aM(f) = \{m : m = a\mu, \mu \in M(f)\} \tag{2.5}$$

Действительно, уравнение (2.1) с характеристикой $af(x, \dot{x})$ после деления обеих частей на a примет вид

$$\frac{m}{a}\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = -\frac{m}{a}\sigma(t)$$

Решение этого уравнения будет удовлетворять условиям защищенности (2.2) тогда и только тогда, когда $ma^{-1} \in M(f)$. Умножение характеристики на число $a > 1$ приводит к растяжению соответствующего множества робастности и сдвигу его вправо. Умножение на число $0 < a < 1$ – к сжатию и сдвигу влево.

Вводится величина k, называемая запасом хода, $k = \beta x_0^{-1}$, где x_0 – минимально возможное отклонение амортизируемого объекта, ускорение которого ограничено величиной α при заданном воздействии $\sigma(t)$ [4]. Для того, чтобы множество $M(f)$ было не пусто и содержало более одной точки, необходимо выполнение неравенства $\beta > x_0$, т.е. $k > 1$. Для ударного воздействия $\sigma(t) = v_0\delta(t)$, как показано в [4], $x_0 = v_0^2(2\alpha)^{-1}$. В этом случае запас хода $k = \beta x_0^{-1} = 2\alpha\beta v_0^{-2}$.

Далее рассмотрены примеры построения множества $M(f)$ для некоторых динамических характеристик и внешнего воздействия $\sigma(t) = v_0\delta(t)$. Уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{2.6}$$

Пусть характеристика амортизатора есть выпуклая линейная комбинация релейной пружины и сухого трения

$$f(x, \dot{x}) = \lambda c \operatorname{sign} x + (1 - \lambda) c \operatorname{sign}(\dot{x}), \quad c > 0, \quad \lambda \in [0, 1]$$

Случай $\lambda = 1$ соответствует релейной пружине, случай $\lambda = 0$ – демпферу сухого трения. Ускорение, развиваемое таким амортизатором, равно cm^{-1} на всем участке движения до достижения максимального отклонения, и условия защищенности (2.2) есть

$$I(f, m) = cm^{-1} \le \alpha, \quad J(f, m) = mv_0^2(2c)^{-1} \le \beta \tag{2.7}$$

Из условий (2.7) вытекают условия на допустимые значения массы $c\alpha^{-1} \le m \le 2c\beta v_0^{-2}$, откуда $M(f) = [c\alpha^{-1}, kc\alpha^{-1}]$. Неравенство $k \ge 1$ есть условие непустоты множества $M(f)$.

Пусть теперь амортизатор – линейная пружина $f(x) = cx$. В данном случае решение уравнения (2.6) и показатели качества амортизации имеют вид

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t, \quad I(f,m) = v_0\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad J(f,m) = v_0\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Условия защищенности (2.2) приводят к неравенствам $v_0^2 c\alpha^{-2} \le m \le c\beta^2 v_0^{-2}$. Условие их совместности (непустоты множества $M(f)$) есть $\beta \ge 2x_0$ или $k \ge 2$. В итоге, $M(f) = \varnothing$ при $k < 2$ и $M(f) = [c\ v_0^2\alpha^{-2}, c\beta^2 v_0^{-2}]$ при $k \ge 2$.

Следующий пример показывает, что множество робастности $M(f)$ может быть несвязным и состоять из нескольких интервалов. Пусть $f(x)$ есть характеристика ступенчатой релейной пружины с двумя уровнями усилия:

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & 0 \le x < x_1 \\ c_2, & x \ge x_1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Множество робастности для характеристики (2.8) имеет вид $M(f) = [m_1, m_2] \cup [m_3, m_4]$

$$m_1 = c_1\alpha^{-1};\ m_2 = m_1 x_1 x_0^{-1};\ m_3 = c_2\alpha^{-1};\ m_4 = m_2 + m_3(\beta - x_1)x_0^{-1}$$

Если $x_0 \le x_1 \le \beta$ и $c_2 > c_1 x_1 x_0^{-1}$, то множество $M(f)$ состоит из двух интервалов.

Заметим, что можно построить характеристики, множество робастности которых состоит из большего числа интервалов.

2.3. Показатель робастности. На первый взгляд, в качестве $\Phi(f)$ можно взять Лебегову меру множества $M(f)$, т.е. $\Phi(f) = \mathrm{mes}M(f)$. Но задача максимизации этого функционала некорректна. Действительно, из свойства (2.5) следует, что для любой характеристики f с непустым множеством $M(f)$ величина $\Phi(af)$ стремится к бесконечности при увеличении параметра a. С ростом меры растет и минимальное значение $m \in M(af)$, также стремясь к бесконечности. Это означает, что любое конечное значение массы рано или поздно перестанет попадать в это множество.

Предлагается следующий способ оценки множества $M(f)$. Пусть задано некоторое выделенное значение массы защищаемого объекта m_0. Это может быть, например, масса амортизируемой платформы, на которую устанавливается защищаемое оборудование, или масса незагруженного автомобиля. Если это значение не принадлежит множеству робастности, то положим $\Phi(f) = 0$. Если m_0 попадает в $M(f)$, то будем увеличивать значение массы, начиная с m_0, до тех пор, пока не выйдем за пределы множества $M(f)$. Последнее значение массы, еще остающееся во множестве $M(f)$, и объявляется оценкой робастности данной характеристики. Для удобства, в дальнейшем используется значение этой максимальной массы, отнесенное к m_0. В итоге

$$\Phi(f) = \begin{cases} m_0^{-1}\max\{m : [m_0, m] \subset M(f)\}, & m_0 \in M(f) \\ 0, & m_0 \notin M(f) \end{cases} \tag{2.9}$$

Для динамических характеристик f, множество робастности которых есть интервал $[m_1, m_2]$:

$$\Phi(f) = \begin{cases} m_0^{-1} m_2, & m_0 \in M(f) \\ 0, & m_0 \notin M(f) \end{cases} \tag{2.10}$$

Показатель $\Phi(f)$ означает, во сколько раз можно превысить значение массы m_0, не выходя за ограничения по ходу и перегрузке. Легко видеть, что если $M(f_1) \subset M(f_2)$, то $\Phi(f_1) \le \Phi(f_2)$.

3. Максимально робастный демпфер. Пусть внешнее воздействие $\sigma(t) = \upsilon_0\delta(t)$, запас хода $k > 1$. Рассматривается задача (2.4) для чисто диссипативных характеристик амортизатора из класса F_d функций скорости $f = f(\dot{x})$, удовлетворяющих условию $f(\dot{x})\operatorname{sign}\dot{x} > 0$. Предполагается, что функции $f(\dot{x})$ кусочно-непрерывны, ограничены на замкнутом интервале $[-\upsilon_0, \upsilon_0]$ и определены в точках разрыва таким образом, чтобы достигались все используемые ниже максимумы.

Подстановка $\upsilon = \dot{x}$ приводит уравнение (2.6) к виду

$$m\frac{d}{dx}\upsilon = -\frac{f(\upsilon)}{\upsilon}, \quad \upsilon(0) = \upsilon_0$$

решение которого задается выражением $x = -m\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon}[f(\upsilon)]^{-1}\upsilon d\upsilon$.

Не уменьшая общности, можно положить $\upsilon_0 > 0$. При этом величина υ будет монотонно уменьшаться от $\upsilon = \upsilon_0$ до $\upsilon = 0$, а значения $f(\upsilon)$ будут положительными при $\upsilon > 0$.

Максимальное отклонение достигается при $\upsilon = 0$, и условия защищенности (2.2) запишутся следующим образом:

$$I(f, m) = \max_t\left|\frac{f(\upsilon(t))}{m}\right| = \max_{0 \le \upsilon \le \upsilon_0}\frac{f(\upsilon)}{m} \le \alpha$$

$$J(f, m) = m\int\limits_0^{\upsilon_0}\frac{\upsilon d\upsilon}{f(\upsilon)} \le \beta$$

Откуда следует, что множество робастности $M(f)$ будет интервалом $[m_1, m_2]$, где

$$m_1 = \frac{1}{\alpha}\max_{0 \le \upsilon \le \upsilon_0} f(\upsilon), \quad m_2 = \beta\left[\int\limits_0^{\upsilon_0}\frac{\upsilon d\upsilon}{f(\upsilon)}\right]^{-1}$$

а показатель робастности $\Phi(f)$ задается выражением (2.10). Для того, чтобы этот показатель отличался от нуля, требуется, чтобы $m_0 \in M(f)$, т.е.

$$\max_{0 \le \upsilon \le \upsilon_0} f(\upsilon) \le \alpha m_0, \quad m_0 \le m_2 \tag{3.1}$$

Задача свелась к максимизации функционала

$$\Phi(f) = \frac{\beta}{m_0}\left[\int\limits_0^{\upsilon_0}\frac{\upsilon d\upsilon}{f(\upsilon)}\right]^{-1} \tag{3.2}$$

при ограничениях (3.1).

Функционал (3.2) достигает своего максимума, когда функция $f(\upsilon)$ достигает своего максимального значения при каждом $\upsilon \in [0, \upsilon_0]$. Отсюда следует, что оптимальная динамическая характеристика $f_d^*(\dot{x})$ равна $m_0\alpha$ на интервале $\upsilon \in [0, \upsilon_0]$. С учетом знака скорости $\dot{x}$:

$$f_d^*(\dot{x}) = m_0\alpha\operatorname{sign}\dot{x}$$

Максимальное значение показателя робастности $\Phi(f_d^*) = k$. Оптимальное множество робастности $M(f_d^*) = [m_0, km_0]$.

4. Максимально робастный упругий амортизатор. Рассматривается задача (2.4) для упругих амортизаторов. Внешнее воздействие $\sigma(t) = \upsilon_0\alpha(t)$, запас хода $k > 1$.

4.1. Самостоятельный интерес представляет решение этой задачи на классе степенных характеристик $f(x) = c|x|^\gamma \operatorname{sign} x$, где $c, \gamma \geq 0$. В силу консервативности рассматриваемой системы, имеет место интеграл энергии

$$\frac{c}{\gamma+1}|x|^{\gamma+1} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} \tag{4.1}$$

Максимальное значение $|x(t)|$ достигается при $\dot{x} = 0$, т.е. с учетом (4.1), следует

$$J(f, m) = \left[\frac{m\upsilon_0^2(\gamma+1)}{2c}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}}$$

Учитывая монотонность изменения $x(t)$ от 0 до $J(f, m)$ и монотонность характеристики $f(x)$, можно записать

$$I(f, m) = \max_t \left|\frac{f(x(t))}{m}\right| = \max_{0 \leq x \leq J(f, m)} \frac{f(x)}{m} =$$

$$= \frac{f(J(f, m))}{m} = \frac{c[J(f, m)]^\gamma}{m} = \left[\frac{c}{m}\right]^{\frac{1}{\gamma+1}} \left[\frac{\upsilon_0^2(\gamma+1)}{2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$$

Из условий защищенности (2.2) следует, что $M(f) = [m_1, m_2]$, где

$$m_1 = \frac{c}{\alpha}\left[\frac{\beta(\gamma+1)}{k}\right]^\gamma, \quad m_2 = \frac{ck\beta^\gamma}{\alpha(\gamma+1)} \tag{4.2}$$

Условие $m_1 \leq m_2$ непустоты множества $M(f)$ приводит к неравенству $\gamma \leq k - 1$.

Показатель робастности определяется здесь выражением (2.10) и есть функция двух переменных $\Phi(c, \gamma)$. Условие $m_1 \leq m_0 \leq m_2$, после подстановки выражений (4.2), приводится к виду

$$c_1(\gamma) \leq c \leq c_2(\gamma)$$

$$c_1(\gamma) = \alpha m_0 \frac{\gamma+1}{k\beta^\gamma}, \quad c_2(\gamma) = \alpha m_0 \left[\frac{k}{\beta(\gamma+1)}\right]^\gamma$$

Таким образом, $\Phi(c, \gamma) = 0$ при $\gamma > k - 1$:

$$\Phi(c, \gamma) = \begin{cases} \dfrac{kc\beta^\gamma}{m_0\alpha(\gamma+1)}, & c \in [c_1(\gamma), c_2(\gamma)] \\ 0, & c \notin [c_1(\gamma), c_2(\gamma)] \end{cases}$$

при $0 \leq \gamma \leq k - 1$.

Исходная задача свелась к задаче на максимум функции $\Phi(c, \gamma)$ при ограничениях $0 \leq \gamma \leq k - 1$, $c \geq 0$. Видно, что оптимальное значение переменной c для каждого допустимого значения переменной γ равно $c^*(\gamma) = c_2(\gamma)$. При этом множество $M(f_{c,\gamma}) = [m_1^*, m_2^*]$, где

$$m_1^* = m_0, \quad m_2^* = m_0\left[\frac{k}{\gamma+1}\right]^{\gamma+1}$$

Задача приведена к задаче максимизации функции одной переменной

$$\Phi(c^*(\gamma), \gamma) = m_0^{-1} m_2^*(\gamma) = \left[\frac{k}{\gamma+1}\right]^{\gamma+1}$$

при ограничении $0 \le \gamma \le k - 1$. Анализ этой функции и ее производной дает следующее решение:

$$\gamma^* = 0, \quad c^* = \alpha m_0, \quad \Phi(c^*, \gamma^*) = k, \quad M(f_{c,\gamma}^*) = [m_0, km_0]$$

при $1 \le k \le e$;

$$\gamma^* = ke^{-1} - 1$$

$$c^* = \alpha m_0 e^{\gamma^*} \beta^{-\gamma^*}, \quad \Phi(c^*, \gamma^*) = e^{\gamma^*+1}, \quad M(f_{c,\gamma}^*) = [m_0, m_0 e^{\gamma^*+1}]$$

при $k > e$.

Вид оптимальной характеристики

$$f_{c,\gamma}^*(x) = c^*|x|^{\gamma^*}\operatorname{sign} x$$

определяется значением запаса хода. При $1 \le k \le e$ оптимальные параметры равны $\gamma^* = 0$, $c^* = m_0\alpha$ и соответствуют релейной пружине. При $e < k < 2e$ оптимальной будет нелинейная пружина с мягкой характеристикой ($0 < \gamma < 1$). При $k = 2e$ оптимальные параметры равны $\gamma^* = 1$, $c^* = 0.5 m_0 \alpha x_0^{-1}$ и соответствуют линейной пружине. При $k > 2e$ оптимальной будет нелинейная пружина с жесткой характеристикой ($\gamma > 1$).

4.2. Ниже строится решение задачи (2.4) с показателем (2.9) для всех упругих характеристик из класса F_s функций $f = f(x)$, удовлетворяющих условию $f(x)\operatorname{sign} x > 0$. Предполагается, что функции $f(x)$ кусочно-непрерывны, ограничены на замкнутом интервале $[-\beta, \beta]$ и определены в точках разрыва таким образом, чтобы достигались все используемые далее максимумы.

При заданном воздействии $\sigma(t) = \upsilon_0\delta(t)$ достаточно ограничиться рассмотрением характеристик, симметричных относительно начала координат. Предполагается, что $\upsilon_0 > 0$, и строится оптимальная характеристика для $x \ge 0$. Через

$$g(x) = \int_0^x f(s)ds$$

обозначена потенциальная энергия пружины. Из закона сохранения механической энергии следует $g(x) + m\dot{x}^2/2 = m\upsilon_0^2/2$.

Для удобства дальнейшего изложения, через ξ обозначается максимальное значение отклонения $\xi = J(f, m)$. Это значение достигается при $\dot{x} = 0$ и $g(\xi) = 0.5m\upsilon_0^2$. Поскольку $g(x)$ строго монотонно возрастающая функция при положительных значениях аргумента, то последнее равенство устанавливает взаимно однозначное соответствие между максимальным отклонением ξ и массой m. Множеству масс $M(f)$ соответствует множество максимальных отклонений $\Xi(f)$.

Выражение для перегрузки $I(f, m)$, с учетом замены $m = 2\upsilon_0^{-2}g(\xi)$ и равенства $x_0 = \upsilon_0^2(2\alpha)^{-1}$, имеет вид

$$I(f,m) = \max_{0\le x\le\xi}\frac{f(x)}{m} = \max_{0\le x\le\xi}\frac{\upsilon_0^2 f(x)}{2g(\xi)} = \max_{0\le x\le\xi}\frac{\alpha x_0 f(x)}{g(\xi)}$$

Условия защищенности (2.2) теперь можно записать

$$\max_{0\le x\le\xi} f(x) \le \frac{1}{x_0}g(\xi), \quad x_0 \le \xi \le \beta \tag{4.3}$$

Во втором неравенстве учтено, что x_0 есть минимум максимального отклонения. Система неравенств (4.3) определяет множество максимальных отклонений $\Xi(f)$. Очевидно, что множество $\Xi(f)$ ограничено, $\Xi(f) \subseteq [x_0, \beta]$. Построение множества робастности $M(f)$ сводится к построению множества максимальных отклонений $\Xi(f)$ и обратной замене $m = 2\upsilon_0^{-2}g(\xi)$:

$$M(f) = \{m : m = 2\upsilon_0^{-2}g(\xi), \xi \in \Xi(f)\}$$

Множество $M(f)$ ограничено, и $\Phi(f) < \infty$ для любой характеристики $f(x) \in F_s$.

Ниже доказывается ряд утверждений относительно оптимальной характеристики.

Утверждение 1. Оптимальная характеристика $f_s^*(x)$ монотонно возрастает. Действительно, для каждой характеристики $f(x) \in F_s$ можно построить функцию рекордных значений

$$f_r(x) = \max_{0\le s\le x} f(s)$$

которая будет монотонно возрастать, и выполнено $f_r(x) \ge f(x)$, $g_r(x) \ge g(x)$, $g_r^{-1}(x) \le g^{-1}(x)$. Через $g_r(x)$ обозначена функция потенциальной энергии, построенная для характеристики $f_r(x)$. Для любой массы $m \in M(f)$ и функции $f_r(x)$ справедливы следующие оценки для хода $\xi_r = J(f_r, m)$ и перегрузки $I(f_r, m)$:

$$\xi_r = g_r^{-1}(0.5m\upsilon_0^2) \le g^{-1}(0.5m\upsilon_0^2) = \xi \le \beta$$

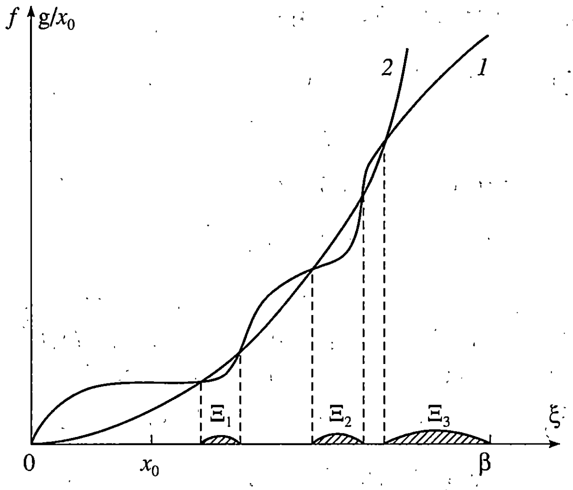
$$I(f_r, m) = m^{-1}\max_{0\le x\le\xi_r} f_r(x) = m^{-1}f_r(\xi_r) = m^{-1}\max_{0\le x\le\xi_r} f(x) \le$$
$$\le m^{-1}\max_{0\le x\le\xi} f(x) = I(f, m) \le \alpha$$

Итак, показано, что $M(f) \subset M(f_r)$, и, соответственно, $\Phi(f) \le \Phi(f_r)$, что и доказывает утверждение.

Ниже рассматривается подмножество монотонно возрастающих зависимостей $f(x)$. Тогда $f_r(\xi) = f(\xi)$, и множество максимальных отклонений $\Xi(f)$ определяется системой неравенств

$$f(\xi) \le \frac{1}{x_0}g(\xi), \quad x_0 \le \xi \le \beta \tag{4.4}$$

Использование условий (4.4) для графического построения множества $\Xi(f)$ приведено на фиг. 1, где цифрой 1 обозначена функция $f(\xi)$, цифрой 2 функция $x_0^{-1}g(\xi)$, а множество Ξ есть объединение множеств Ξ_i.



Фиг. 1

Утверждение 2. Пусть $f_s^*(x)$ – оптимальная характеристика, $g^*(x)$ – соответствующая потенциальная энергия, тогда $\Xi(f_s^*) = [x_0, \beta]$, $M(f_s^*) = [m_0, 2\upsilon_0^{-2} g^*(\beta)]$.

Доказательство. Из оптимальности $f_s^*(x)$ следует, что $\Phi(f_s^*) \geq \Phi(f_{c,\gamma}^*) \geq k > 1$. Тогда $[m_0, m_0\Phi(f_s^*)] \subseteq M(f_s^*)$. Отрезку допустимых масс $[m_0, m_0(f_s^*)]$ соответствует отрезок $[\xi_1, \xi_2] \subset \Xi(f_s^*)$. Если этот отрезок отличен от $[x_0, \beta]$, то можно построить характеристику f^{**} с показателем робастности большим, чем у характеристики $f_s^*(x)$.

Из включения $m_0 \in M(f_s^*)$ следует, что значение функции $f_s^*(x) \leq m_0\alpha$, по крайней мере при $0 \leq x \leq \xi_1$. Функция $f_s^*(x)$ монотонно возрастает. Поэтому либо $f_s^*(x) \leq m_0\alpha$ на всем интервале $[x_0, \beta]$, либо существует точка $x' \geq \xi_1$, такая что $f_s^*(x) \leq m_0\alpha$ при $x \leq x'$ и $f_s^*(x) > m_0\alpha$ при $x' < x \leq \beta$. В первом случае достаточно рассмотреть функцию $f^{**} = m_0\alpha$, для которой выполнено $\Xi(f^{**}) = [x_0, \beta]$ и $\Phi(f^{**}) \geq \Phi(f_s^*)$.

Во втором случае можно указать функцию

$$f^{**}(x) = \begin{cases} m_0\alpha, & x \leq x' \\ f_s^*(x), & x' > x \leq \xi_2 \\ f_s^*(\xi_2), & \xi_2 > x \leq \beta \end{cases}$$

которая представляет из себя срезку монотонно возрастающей функции $f_s^*(x)$ снизу по уровню $m_0\alpha$ и сверху по уровню $f_s^*(\xi_2)$. При $0 \leq x \leq x'$ функция принимает постоянное значение $m_0\alpha$, для которого из условия (4.4) следует включение $[x_0, x'] \in \Xi(f^{**})$.

При $x' \leq \xi \leq \xi_2$ функция $f^{**}(\xi) = f_s^*(\xi)$. Выполнено неравенство $g^{**}(x) \geq g^*(x)$ для $0 \leq x \leq \xi_2$, где $g^{**}(x)$ – функция потенциальной энергии, построенная для характеристики $f^{**}(x)$. Отсюда при любом $\xi \in [x', \xi_2]$ верно

$$f^{**}(\xi) - \frac{1}{x_0} g^{**}(\xi) \le f_s^*(\xi) - \frac{1}{x_0} g^*(\xi) \le 0$$

т.е. $[x', \xi_2] \in \Xi(f^{**})$.

Для $\xi_2 < \xi \le \beta$ с учетом того, что $f^{**}(x) = f_s^*(\xi_2)$ и $g^{**}(x) \ge g^*(\xi_2)$ можно записать

$$f^{**}(\xi) - \frac{1}{x_0} g^{**}(\xi) \le f_s^*(\xi_2) - \frac{1}{x_0} g^*(\xi_2) \le 0$$

т.е. $[\xi_2, \beta] \in \Xi(f^{**})$.

В результате получено, что $\Xi(f^{**}) = [x_0, \beta]$. Значение $m_0 \in M(f^{**})$, и ему соответствует максимальное отклонение, равное x_0. Следовательно, $M(f^{**}) = [m_0, m_2]$, $\Phi(f^{**}) = m_0^{-1} m_2$, где $m_2 = 2 v_0^{-2} g^{**}(\beta)$, и выполнено неравенство

$$\Phi(f^{**}) = m_0^{-1} m_2 = 2 m_0^{-1} v_0^{-2} g^{**}(\beta) > 2 m_0^{-1} v_0^{-2} g^*(\xi_2) = \Phi(f_s^*)$$

Утверждение доказано.

Для массы m_0 максимальное отклонение равно x_0 только тогда, когда $f_s^*(x) = m_0\alpha$ при $x \in [0, x_0]$. Тем самым определено значение оптимальной характеристики $f_s^*(x)$ для значений аргумента $x \in [0, x_0]$.

Значения оптимальной характеристики при $x > x_0$ определяются из решения задачи максимизации $\Phi(f) = 2 v_0^{-2} m_0^{-1} g(\beta)$ при условии (4.4). Вводится обозначение $u(x) = f(x) - x_0^{-1} g(x)$. Тогда поставленную задачу можно рассматривать как следующую задачу оптимального управления в форме Майера:

$$g(\beta) \to \max_{u \in U}, \quad U = \{u : u \le 0\}$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{x_0} g(x) + u(x), \quad g(x_0) = \frac{m_0 v_0^2}{2}$$

Решение этой задачи находится исходя из принципа максимума. Оптимальное управление $u^*(x) = 0$ при $x \in [x_0, \beta]$. Функция потенциальной энергии для оптимальной характеристики $g^*(x)$ есть решение линейного дифференциального уравнения

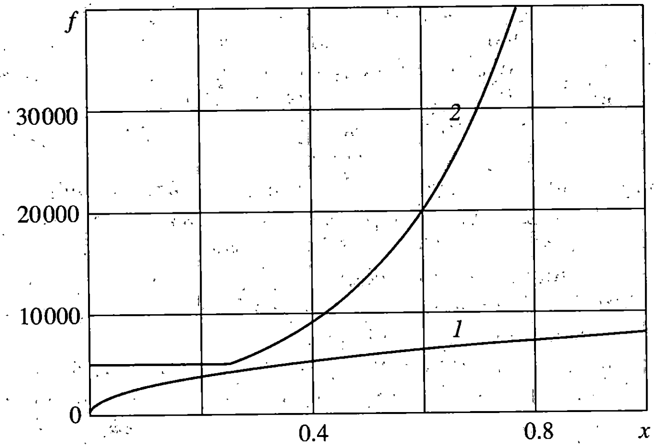
$$\frac{dg^*(x)}{dx} - \frac{1}{x_0} g^*(x) = 0, \quad g^*(x_0) = \frac{m_0 v_0^2}{2}$$

Оптимальная характеристика упругого амортизатора при $x \ge x_0$ есть производная функции $g^*(x)$. Окончательно имеем

$$f_s^*(x) = \begin{cases} m_0 \alpha \,\mathrm{sign}\, x, & |x| \le x_0 \\ m_0 \alpha \exp(|x| x_0^{-1} - 1)\,\mathrm{sign}\, x, & |x| > x_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Максимальное значение показателя робастности и соответствующее множество робастности равны

$$\Phi(f_s^*) = e^{k-1}, \quad M(f_s^*) = [m_0, m_0 e^{k-1}]$$



Фиг. 2

4.3. Для иллюстрации полученных результатов приведен следующий пример. Пусть задача характеризуется следующими исходными данными: $\upsilon_0 = 5$ м/с, $\alpha = 50$ м/с^2, $\beta = 1$ м, $m_0 = 100$ кг. Тогда минимум максимального отклонения будет $x_0 = 0.25$ м, запас хода $k = 4$. Оптимальный демпфер сухого трения $f_d^*(\dot{x})$ имеет множество робастности $M(f_d^*) = [100, 400]$ и показатель робастности $\Phi(f_d^*) = 4$. Оптимальный упругий амортизатор со степенной характеристикой $f_{c,\gamma}^*(x)$ характеризуется параметрами $c^* = 8012.12$ Н/м, $\gamma^* = 0.47152$. Его множество робастности $M(f_{c,\gamma}^*)$ есть отрезок [100, 435.58], показатель робастности $\Phi(f_{c,\gamma}^*) = 4.3558$. Оптимальный упругий амортизатор (4.5) имеет множество робастности $M(f_s^*) = [100, 2008.55]$ и показатель робастности $\Phi(f_s^*) = 20.0855$. На фиг. 2 кривая *1* соответствует характеристике $f_{c,\gamma}^*(x)$, кривая *2* – оптимальной характеристике $f_s^*(x)$, построенные для заданного примера.

5. Распространение на класс внешних воздействий. Рассмотрим множество воздействий $\sigma = \sigma(t)$, введенное в работе [2]:

$$\Sigma(\upsilon_0) = \left\{\sigma(t) : \int_0^\infty |\sigma(t)| dt \le \upsilon_0\right\}$$

В [2, 3] для некоторых классов динамических характеристик, куда входят и построенные выше характеристики $f_d^*(\dot{x})$, $f_{c,\gamma}^*(x)$, $f_s^*(x)$, показано, что наибольшие по всем $\sigma \in \Sigma(\upsilon_0)$ значения ускорения $I(f^*, m, \sigma)$ и смещения $J(f^*, m, \sigma)$ достигаются при $\sigma(t) = \upsilon_0\delta(t)$, т.е.

$$\max_{\sigma \in \Sigma(\upsilon_0)} I(f^*, m, \sigma) = I(f^*, m, \upsilon_0\delta(t)) \tag{4.6}$$

$$\max_{\sigma \in \Sigma(\upsilon_0)} J(f^*, m, \sigma) = J(f^*, m, \upsilon_0\delta(t)) \tag{4.7}$$

Таким образом, для каждой из построенных оптимальных характеристик f^* верно следующее утверждение. Пусть при воздействии $\sigma(t) = \upsilon_0\delta(t)$ для некоторого значения массы m выполнены условия защищенности (2.2), т.е. $m \in M(f^*;\ \upsilon_0\delta(t))$. Тогда эти условия, в силу (4.6), (4.7), тем более выполнены для любого воздействия $\sigma(t) \in \Sigma(\upsilon_0)$. Последнее означает, что множество робастности, построенное для характеристики f^* и воздействия $\sigma(t) \in \Sigma(\upsilon_0)$, включает в себя множество робастности, построенное для воздействия $\sigma(t) = \upsilon_0\delta(t)$. Показатель робастности характеристики f^* при смене воздействия $\sigma(t) = \upsilon_0\delta(t)$ на любое $\sigma(t) \in \Sigma(\upsilon_0)$ разве что возрастет.

6. Заключение. Рассмотрена задача проектирования оптимальной системы противоударной амортизации в условиях неопределенности диапазона возможных значений массы амортизируемого объекта. Условия защищенности задавались в виде ограничений на перегрузку защищаемого объекта и его смещение относительно основания. Максимизировался диапазон значений массы, при которых выполняются условия защищенности объекта, названный диапазоном робастности.

Для различных семейств динамических характеристик амортизаторов построены максимальные диапазоны робастности и оптимальные характеристики. Приведены численные примеры.

Оптимизация, проведенная на классе всех чисто диссипативных характеристик, позволила оценить предельные возможности таких характеристик по увеличению диапазона робастности. Оптимальной характеристикой оказалось сухое трение.

Оптимизация на классе всех упругих характеристик дала оценку предельных возможностей упругих амортизаторов по увеличению диапазона робастности и выражение для оптимальной упругой динамической характеристики. Оптимальная пружина есть сумма релейной пружины и пружины с экспоненциальным законом увеличения жесткости, включаемой начиная с определенного смещения.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН 17 “Математическое моделирование, интеллектуальные системы и управление механическими системами” (проект 3.1.4) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баландин Д.В.* Оптимизация противоударных амортизаторов при неточно известной массе защищаемого объекта // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 27–31.
2. *Болотник Н.Н.* Задачи оптимальной амортизации для классов внешних воздействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 34–41.
3. *Баландин Д.В.* Оптимизация противоударных амортизаторов для класса внешних воздействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 53–60.
4. *Гурецкий В.В.* Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
3.06.2002