МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2005

УДК 531.391.5

© 2005 г. А. В. ШАТИНА

О ДЕФОРМАЦИЯХ ПЛАНЕТЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОДВИЖНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ЯДРО, В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА И СПУТНИКА

Исследуется поступательно-вращательное движение системы планета-спутник в гравитационном поле притягивающего центра. Планета предполагается состоящей из абсолютно твердой невесомой сферы, к которой с внешней стороны жестко прикреплена вязкоупругая сферическая оболочка, а внутри имеется подвижное внутреннее ядро. Спутник и притягивающий центр моделируются материальными точками. Из вариационного принципа Даламбера–Лагранжа выводится система уравнений движения рассматриваемой механической системы. К полученной системе уравнений применяется метод разделения движений и строится решение задачи теории упругости, которое описывает деформации упругого слоя планеты под действием гравитационных сил и сил инерции. Показано, что действие внешних гравитационных полей вызывает центрально симметричные деформации упругого сферического слоя планеты, а колебания внутреннего ядра нарушают эту симметрию.

Рассмотрим движение системы планета-спутник в гравитационном поле притягивающего центра. Предположим, что планета имеет сложную структуру. А именно, она состоит из абсолютно твердой невесомой сферы радиуса r_0, к которой жестко прикреплена однородная изотропная вязкоупругая оболочка, занимающая в естественном недеформированном состоянии область $\Omega = \{\mathbf{r} \in E^3 | r_0 \le |\mathbf{r}| \le r_1\}$ в трехмерном евклидовом пространстве. Масса упругой оболочки равна M, плотность – ρ. Внутри сферы радиуса r_0 движется ядро – материальная точка P массы m, которая присоединена к центру сферы – точке D невесомой пружиной жесткости c. Спутник моделируется материальной точкой F с массой равной μ_0. Связка планета-спутник движется относительно общего центра масс C, который в свою очередь осуществляет движение относительно притягивающего центра O (материальной точки с массой равной единице).

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в притягивающем центре. Систему координат $Dx_1x_2x_3$ жестко свяжем с невесомой абсолютно твердой сферой. Положение центра масс C системы планета-спутник в инерциальной системе координат $OXYZ$ определим радиус-вектором $\mathbf{R}_1 = \mathbf{OC}$, а взаимное расположение планеты и спутника друг относительно друга вектором $\mathbf{R}_2 = \mathbf{DF}$. Положение точки P в подвижной системе координат $Dx_1x_2x_3$ зададим вектором $\mathbf{q} = \mathbf{DP}$. Предполагается, что $|\mathbf{q}| \ll r_0$.

Положение точки K деформируемой оболочки в инерциальной системе координат $OXYZ$ определяется векторным полем

$$\boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{OD} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \tag{1}$$

где Γ – оператор перехода от подвижной системы координат $Dx_1x_2x_3$, интегральным образом связанной с шаром к системе осей Кенига $D\xi_1\xi_2\xi_3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – вектор упругого смещения.

Так как точка C – центр масс системы планета-спутник, то

$$\mathbf{OC} = \frac{1}{m_\Sigma}\left\{\int_\Omega [\mathbf{OD} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})]\rho dx + m(\mathbf{OD} + \Gamma\mathbf{q}) + \mu_0 \mathbf{OF}\right\} \tag{2}$$

$$m_\Sigma = M + m + \mu_0, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

Кроме того справедливо векторное равенство

$$\mathbf{OD} + \mathbf{DF} = \mathbf{OF} \tag{3}$$

Используя соотношения (2), (3), а также то, что $\mathbf{OC} = \mathbf{R}_1$, $\mathbf{DF} = \mathbf{R}_2$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{OD} &= \mathbf{R}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\left[\int_\Omega \Gamma\mathbf{u}\rho dx + m\Gamma\mathbf{q}\right] \\ \mathbf{OF} &= \mathbf{R}_1 + \frac{M+m}{m_\Sigma}\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\left[\int_\Omega \Gamma\mathbf{u}\rho dx + m\Gamma\mathbf{q}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Помимо вектора $\boldsymbol{\eta}_1$, определяющего положение точки K деформируемой оболочки в инерциальной системе координат $OXYZ$, введем векторы $\boldsymbol{\eta}_2$ и $\boldsymbol{\eta}_3$, определяющие положения точек F и P соответственно. Тогда

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{R}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\left[\int_\Omega \Gamma\mathbf{u}\rho dx + m\Gamma\mathbf{q}\right] + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{R}_1 + \frac{M+m}{m_\Sigma}\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\left[\int_\Omega \Gamma\mathbf{u}\rho dx + m\Gamma\mathbf{q}\right] \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \mathbf{R}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\left[\int_\Omega \Gamma\mathbf{u}\rho dx + m\Gamma\mathbf{q}\right] + \Gamma\mathbf{q} \tag{7}$$

Потенциальная энергия внешних гравитационных полей определяется функционалом

$$\Pi_1 = -\int_\Omega \frac{f\rho}{|\boldsymbol{\eta}_1|}dx - \frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_2|} - \int_\Omega \frac{f\mu_0\rho}{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|}dx - \frac{fm}{|\boldsymbol{\eta}_3|} - \frac{f\mu_0 m}{|\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_2|} \tag{8}$$

где f – универсальная гравитационная постоянная.

Гравитационное взаимодействие частиц планеты друг с другом описывается функционалом потенциальной энергии [1]:

$$\Pi_2 = -\int_\Omega \frac{fM}{r_1^3}(\mathbf{r}, \mathbf{u})\rho dx - \int_\Omega \frac{fm\rho}{|\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{q}|}dx \tag{9}$$

Потенциальная энергия пружины, соединяющей центр невесомой оболочки с твердым внутренним ядром, имеет вид $\Pi_3 = 1/2c(\mathbf{q}, \mathbf{q})$.

Функционал потенциальной энергии упругих деформаций введем в соответствии с линейной моделью теории упругости

$$\mathscr{E}[\mathbf{u}] = \int_\Omega \alpha_1(I_E^2 - \alpha_2 II_E)dx, \quad \alpha_1 > 0, \quad 0 < \alpha_2 < 3$$

$$\alpha_1 = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \tag{10}$$

$$I_\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{3} e_{ii}, \quad II_\mathrm{E} = \sum_{i<j}^{3}(e_{ii}e_{jj} - e_{jj}^2), \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

где E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона, I_E, II_E – инварианты тензора малых деформаций.

Функционал внутренних диссипативных сил $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}[\dot{\mathbf{u}}]$ будем полагать заданным в виде $\mathfrak{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \chi\mathcal{E}[\dot{\mathbf{u}}]$, где $\chi > 0$ – коэффициент внутреннего вязкого трения (модель Кельвина-Фойгта).

Уравнения движения получим из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа, который представим в виде

$$\begin{gathered}\int_\Omega (\ddot{\boldsymbol{\eta}}_1, \delta\boldsymbol{\eta}_1)\rho dx + \mu_0(\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2, \delta\boldsymbol{\eta}_2) + m(\ddot{\boldsymbol{\eta}}_3, \delta\boldsymbol{\eta}_3) + \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2 + \delta\Pi_3 + \\ + (\nabla_\mathbf{u}\mathcal{E}[\mathbf{u}] + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathfrak{D}[\dot{\mathbf{u}}], \delta\mathbf{u})_\Omega = 0, \quad \forall\delta\mathbf{u} \in (W_2^1(\Omega))^3\end{gathered} \tag{11}$$

где $(W_2^1(\Omega))^3$ – пространство Соболева.

Из равенства (5) получим

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \dot{\mathbf{R}}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\dot{\mathbf{R}}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\Gamma\left\{\int_\Omega [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}]\rho dx + m[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}]\right\} + \Gamma\{\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}\}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\ddot{\mathbf{R}}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\Gamma\int_\Omega [\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}}]\rho dx - \\ - \frac{m}{m_\Sigma}\Gamma[\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{q} + \ddot{\mathbf{q}}] + \\ + \Gamma[\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \ddot{\mathbf{u}}]\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\delta\boldsymbol{\eta}_1 = \delta\mathbf{R}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\delta\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\Gamma\left\{\int_\Omega [\delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}]\rho dx + m[\delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}]\right\} + \\ + \Gamma[\delta\boldsymbol{\alpha}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \delta\mathbf{u}]\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость системы координат $Dx_1x_2x_3$, определяемая равенством $\boldsymbol{\omega}\times(\cdot) = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}(\cdot)$. Вариация $\delta\boldsymbol{\alpha}$ в последнем соотношении возникла при варьировании ортогонального оператора Γ [2]: $\delta\Gamma(\cdot) = \Gamma[\delta\boldsymbol{\alpha}\times(\cdot)]$.

Аналогично дифференцируя и варьируя равенства (6) и (7), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2 = \ddot{\mathbf{R}}_1 + \frac{M+m}{m_\Sigma}\ddot{\mathbf{R}}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\Gamma\int_\Omega [\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}}]\rho dx - \\ - \frac{m}{m_\Sigma}\Gamma[\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{q} + \ddot{\mathbf{q}}]\end{gathered} \tag{14}$$

$$\delta\boldsymbol{\eta}_2 = \delta\mathbf{R}_1 + \frac{M+m}{m_\Sigma}\delta\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\Gamma\int_\Omega[\delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}]\rho dx - \frac{m}{m_\Sigma}\Gamma[\delta\mathbf{q}\times\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}] \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_3 = \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\ddot{\mathbf{R}}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\Gamma\int_\Omega[\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}}]\rho dx + \\ + \frac{M+\mu_0}{m_\Sigma}\Gamma[\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{q} + \ddot{\mathbf{q}}]\end{gathered} \tag{16}$$

$$\delta\boldsymbol{\eta}_3 = \delta\mathbf{R}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\delta\mathbf{R}_2 - \frac{1}{m_\Sigma}\Gamma\int_\Omega[\delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}]\rho dx + \frac{M+\mu_0}{m_\Sigma}\Gamma[\delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}] \tag{17}$$

При варьировании функционалов Π_1, Π_2, Π_3 получим

$$\begin{gathered}\delta\Pi_1 = \int_\Omega f|\boldsymbol{\eta}_1|^{-3}(\boldsymbol{\eta}_1, \delta\boldsymbol{\eta}_1)\rho dx + f\mu_0|\boldsymbol{\eta}_2|^{-3}(\boldsymbol{\eta}_2, \delta\boldsymbol{\eta}_2) + fm|\boldsymbol{\eta}_3|^{-3}(\boldsymbol{\eta}_3, \delta\boldsymbol{\eta}_3) + \\ + \int_\Omega f\mu_0|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^{-3}(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2, \delta\boldsymbol{\eta}_1 - \delta\boldsymbol{\eta}_2)\rho dx + f\mu_0 m|\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_2|^{-3}(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_2, \delta\boldsymbol{\eta}_3 - \delta\boldsymbol{\eta}_2) \\ \delta\Pi_2 = \int_\Omega fMr_1^{-3}(\mathbf{r}, \delta\mathbf{u})\rho dx + \int_\Omega fm|\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{q}|^{-3}(\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{q}, \delta\mathbf{u} - \delta\mathbf{q})\rho dx \\ \delta\Pi_3 = c(\mathbf{q}, \delta\mathbf{q})\end{gathered} \tag{18}$$

Преобразовывая (11) в соответствии с равенствами (12)–(18) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta\mathbf{R}_1$, $\delta\mathbf{R}_2$, $\delta\boldsymbol{\alpha}$, $\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{u}$, получим уравнения движения рассматриваемой механической системы в виде:

$$\int_\Omega \ddot{\boldsymbol{\eta}}_1\rho dx + \mu_0\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2 + m\ddot{\boldsymbol{\eta}}_3 + \int_\Omega \frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_1|^3}\boldsymbol{\eta}_1\rho dx + \frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_2|^3}\boldsymbol{\eta}_2 + \frac{fm}{|\boldsymbol{\eta}_3|^3}\boldsymbol{\eta}_3 = 0 \tag{19}$$

$$\begin{gathered}-\frac{\mu_0}{m_\Sigma}\int_\Omega \ddot{\boldsymbol{\eta}}_1\rho dx + \frac{\mu_0(M+m)}{m_\Sigma}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2 - \frac{\mu_0 m}{m_\Sigma}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_3 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\int_\Omega \frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_1|^3}\boldsymbol{\eta}_1\rho dx + \frac{(M+m)}{m_\Sigma}\frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_2|^3}\boldsymbol{\eta}_2 - \\ - \int_\Omega \frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^3}(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2)\rho dx - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\frac{fm}{|\boldsymbol{\eta}_3|^3}\boldsymbol{\eta}_3 - \frac{fm\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_2|^3}(\boldsymbol{\eta}_3 - \boldsymbol{\eta}_2) = 0\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\int_\Omega\left[\mathbf{r} + \mathbf{u} - \frac{1}{m_\Sigma}\int_\Omega \mathbf{u}\rho dx - \frac{m}{m_\Sigma}\mathbf{q}\right]\times\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_1\rho dx - \\ - \left[\frac{\mu_0}{m_\Sigma}\int_\Omega \mathbf{u}\rho dx + \frac{\mu_0 m}{m_\Sigma}\mathbf{q}\right]\times\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2 + \left[\frac{(M+\mu_0)m}{m_\Sigma}\mathbf{q} - \frac{m}{m_\Sigma}\int_\Omega \mathbf{u}\rho dx\right]\times\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_3 + \\ + \int_\Omega\left[\mathbf{r} + \mathbf{u} - \frac{1}{m_\Sigma}\int_\Omega \mathbf{u}\rho dx - \frac{m}{m_\Sigma}\mathbf{q}\right]\times\frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_1|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_1\rho dx -\end{gathered} \tag{21}$$

$$
-\left[\frac{\mu_0}{m_\Sigma}\int\limits_\Omega \mathbf{u}\rho dx+\frac{\mu_0 m}{m_\Sigma}\mathbf{q}\right]\times\frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_2|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_2+\int\limits_\Omega[\mathbf{r}+\mathbf{u}]\times\frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2|^3}\Gamma^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)\rho dx+
$$

$$
+\left[\frac{(M+\mu_0)m}{m_\Sigma}\mathbf{q}-\frac{m}{m_\Sigma}\int\limits_\Omega \mathbf{u}\rho dx\right]\times\frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_3|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_3+\mathbf{q}\times\frac{f\mu_0 m}{|\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_2|^3}\Gamma^{-1}(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_2)=0
$$

$$
-\frac{m}{m_\Sigma}\int\limits_\Omega\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_1\rho dx-\frac{\mu_0 m}{m_\Sigma}\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2+\frac{(M+\mu_0)m}{m_\Sigma}\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_3-
$$

$$
-\frac{m}{m_\Sigma}\int\limits_\Omega\frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_1|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_1\rho dx-\frac{m}{m_\Sigma}\frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_2|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_2+\frac{fm(M+\mu_0)}{m_\Sigma\cdot|\boldsymbol{\eta}_3|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_3+ \qquad (22)
$$

$$
+\frac{f\mu_0 m}{|\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_2|^3}\Gamma^{-1}(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_2)-\int\limits_\Omega\frac{fm(\mathbf{r}+\mathbf{u}-\mathbf{q})}{|\mathbf{r}+\mathbf{u}-\mathbf{q}|^3}\rho dx+c\mathbf{q}=0
$$

$$
\rho\Bigg\{\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_1-\frac{1}{m_\Sigma}\int\limits_\Omega\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_1\rho dx-\frac{\mu_0}{m_\Sigma}\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2-\frac{m}{m_\Sigma}\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_3+\frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_1|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_1-
$$

$$
-\frac{1}{m_\Sigma}\int\limits_\Omega\frac{f}{|\boldsymbol{\eta}_1|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_1\rho dx-\frac{1}{m_\Sigma}\cdot\frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_2|^3}\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_2+\frac{f\mu_0}{|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2|^3}\Gamma^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)- \qquad (23)
$$

$$
-\frac{fm}{m_\Sigma}\cdot\frac{\Gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}_3}{|\boldsymbol{\eta}_3|^3}+\frac{fM}{r_1^3}\mathbf{r}+\frac{fm(\mathbf{r}+\mathbf{u}-\mathbf{q})}{|\mathbf{r}+\mathbf{u}-\mathbf{q}|^3}\Bigg\}+\nabla_{\mathbf{u}}\mathscr{E}[\mathbf{u}]+\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathscr{D}[\dot{\mathbf{u}}]=0
$$

В уравнениях (19)–(23) векторы $\boldsymbol{\eta}_i$, $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ определены соотношениями (5)–(7), (12), (14), (16). Система (19)–(23) является точной системой уравнений движения рассматриваемой механической системы в рамках линейной модели теории упругости. Будем считать, что период собственных колебаний вязкоупругой оболочки на наинизшей частоте много меньше времени затухания этих колебаний, которое в свою очередь много меньше характерного времени движения системы как целого. Для определения частного решения уравнения (23), описывающего деформации вязкоупругой оболочки, вызванные действием гравитационных сил и сил инерции переносного движения, воспользуемся методом разделения движений [3]. Так как жесткость деформируемой оболочки предполагается большой, то будет малый безразмерный параметр $\varepsilon = \omega_0^2\rho r_0^2 E^{-1}$, где ω_0 – модуль начальной угловой скорости системы координат $Dx_1x_2x_3$. Выбирая соответствующим образом масштабы размерных единиц, можно получить $\varepsilon = E^{-1}$.

Если $\varepsilon = 0$, то вектор упругого смещения полагается равным нулю. При $\mathbf{u} \equiv 0$ уравнения (19)–(22) описывают движение системы планета-спутник в гравитационном поле притягивающего центра, когда планета состоит из абсолютно твердой сферической оболочки и подвижного внутреннего ядра. Положив в уравнениях (19)–(22) $\mathbf{u} \equiv 0$ и разрешив их относительно вторых производных по времени, получим невозмущенную систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
m_\Sigma \ddot{\mathbf{R}}_1 + \frac{fM[\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}|^3} + \frac{f\mu_0[\mathbf{R}_1 + M_1\mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_1 + M_1\mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}|^3} + \\
+ \frac{fm[\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 + M_0\Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 + M_0\Gamma\mathbf{q}|^3} = 0
\end{gathered} \tag{24}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\mathbf{R}}_2 - \frac{f[\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}|^3} + \frac{f[\mathbf{R}_1 + M_1\mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_1 + M_1\mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}|^3} + \\
+ \frac{fm[\mathbf{R}_2 - \Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_2 - \Gamma\mathbf{q}|^3} + \frac{f(M+\mu_0)\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3} + \frac{c}{M}\Gamma\mathbf{q} = 0
\end{gathered} \tag{25}
$$

$$
A_0\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \tag{26}
$$

$$
\begin{gathered}
\ddot{\mathbf{q}} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}] + f\Gamma^{-1}\left\{-\frac{[\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}|^3} + \right. \\
\left. + \frac{[\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 + M_0\Gamma\mathbf{q}]}{|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 + M_0\Gamma\mathbf{q}|^3} - \frac{\mu_0(\mathbf{R}_2 - \Gamma\mathbf{q})}{|\mathbf{R}_2 - \Gamma\mathbf{q}|^3} + \frac{\mu_0\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3}\right\} + \frac{c(M+m)}{Mm}\mathbf{q} = 0
\end{gathered} \tag{27}
$$

$$
M_0 = \frac{M+\mu_0}{m_\Sigma}, \quad M_1 = \frac{M+m}{m_\Sigma}
$$

При $\varepsilon \neq 0$ согласно методу разделения движений [3] частное решение уравнения (23) ищется в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$
\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1 + \varepsilon^2\mathbf{u}_2 + \ldots
$$

Для написания уравнения, определяющего функцию $\mathbf{u}_1$ первого приближения по ε необходимо найти нулевое приближение по $\mathbf{u}$ выражения, заключенного в фигурные скобки в левой части уравнения (23). В результате получим уравнения для функции $\mathbf{u}_1$ в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\rho\Gamma^{-1}\{-\mu_0/m_\Sigma\ddot{\mathbf{R}}_2 - m/m_\Sigma\Gamma[\dot{\boldsymbol{\omega}}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q}] + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{q} + \ddot{\mathbf{q}}] + \Gamma\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}] + \\
+ \frac{f(\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q} + \Gamma\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q} + \Gamma\mathbf{r}|^3} - \frac{fM(\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q})}{|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}|^3} - \\
- \frac{f\mu_0(\mathbf{R}_1 + M_1\mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q})}{m_\Sigma|\mathbf{R}_1 + M_1\mathbf{R}_2 - m/m_\Sigma \Gamma\mathbf{q}|^3} - f\mu_0\frac{(\mathbf{R}_2 - \Gamma\mathbf{r})}{|\mathbf{R}_2 - \Gamma\mathbf{r}|^3} - \frac{fm(\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 + M_2\Gamma\mathbf{q})}{m_\Sigma|\mathbf{R}_1 - \mu_0/m_\Sigma \mathbf{R}_2 + M_2\Gamma\mathbf{q}|^3}\Bigg\} + \\
+ \frac{\rho fM}{r_1^3}\mathbf{r} + \frac{\rho fm}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{q}) + \varepsilon\nabla_{\mathbf{u}}\mathscr{E}[\mathbf{u}_1] + \varepsilon\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathscr{D}[\dot{\mathbf{u}}_1] = 0, \quad M_2 = \frac{M+\mu}{m_\Sigma}
\end{gathered} \tag{28}
$$

В уравнении (28) $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{q}$ зависят от времени согласно невозмущенной системе уравнений (24)–(27). С учетом уравнений невозмущенного движения уравнение (28) примет вид:

$$\varepsilon\nabla_{\mathbf{u}}\mathscr{E}[\mathbf{u}_1] + \varepsilon\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathscr{D}[\dot{\mathbf{u}}_1] + \rho\left\{\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}] + \frac{f\mu_0}{R_2^3}[\mathbf{r} - 3(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{r})\boldsymbol{\xi}_2] + \right.$$

$$\left. + \frac{f}{Q_1^3}[\mathbf{r} - 3(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{r})\boldsymbol{\xi}_1] + \frac{c}{M}\mathbf{q} + \frac{fM}{r_1^3}\mathbf{r} + \frac{fm}{r^3}\mathbf{r} + fm\left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{r^5} - \frac{\mathbf{q}}{r^3}\right]\right\} = 0 \qquad (29)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_1 - \frac{\mu_0}{m_\Sigma}\mathbf{R}_2 - \frac{m}{m_\Sigma}\Gamma\mathbf{q}, \quad Q_1 = |\mathbf{Q}_1|, \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \frac{\Gamma^{-1}\mathbf{Q}_1}{Q_1}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\Gamma^{-1}\mathbf{R}_2}{R_2}$$

При выводе уравнения (29) были использованы следующие приближенные равенства:

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{r}}{|\mathbf{a}+\mathbf{r}|^3} \approx \frac{\mathbf{a}}{a^3} + \frac{\mathbf{r}}{a^3} - \frac{3(\mathbf{a}, \mathbf{r})\mathbf{a}}{a^5}, \quad |\mathbf{a}| \gg |\mathbf{r}|$$

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{q}}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|^3} \approx \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{r^5} - \frac{\mathbf{q}}{r^3}, \quad |\mathbf{q}| \ll |\mathbf{r}|$$

Пренебрегая действием диссипативных сил, получим следующую задачу теории упругости для определения функции $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1$:

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\left\{\left[\frac{2}{3}\omega^2 - \frac{fM}{r_1^3}\right]\mathbf{r} + \nabla_{\mathbf{r}}U_1 + \nabla_{\mathbf{r}}U_2 + \nabla_{\mathbf{r}}U_3 + \right.$$

$$\left. + \nabla_{\mathbf{r}}U_4 + \nabla_{\mathbf{r}}U_5 + \nabla_{\mathbf{r}}U_6\right\} = 0, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (30)$$

$$\mathbf{u}|_{r=r_0} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_n|_{r=r_1} = 0. \qquad (31)$$

Краевые условия (31) означают равенство нулю перемещений на внутренней границе упругой оболочки и равенство нулю напряжений на ее внешней границе. Функции U_i ($i = 1, \ldots, 6$) являются сферическими и определяются следующими равенствами:

$$U_1 = \frac{1}{6}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})^2, \quad U_2 = -\frac{3f}{Q_1^3}\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{r})^2\right]$$

$$U_3 = -\frac{3f\mu_0}{R_2^3}\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{r})^2\right]$$

$$U_4 = -\frac{c}{M}(\mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad U_5 = \frac{fm}{r}, \quad U_6 = \frac{fm}{r^3}(\mathbf{q}, \mathbf{r})$$

Поскольку уравнение (30) линейно, то его решение можно представить в виде суммы

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{6}\mathbf{u}_{1k} \qquad (32)$$

Граничные условия для $\mathbf{u}_{1k}$ ($k = 0, 1, \ldots, 6$) формулируются в виде равенства нулю напряжений на внешней границе деформируемой оболочки и равенства нулю перемещений на ее внутренней границе. Уравнения, которым удовлетворяют функции $\mathbf{u}_{1k}$ ($k = 0, 1, \ldots, 6$), имеют вид

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_{10} + \mu\Delta\mathbf{u}_{10} + \rho\left[\frac{2}{3}\omega^2 - \frac{fM}{r_1^3}\right]\mathbf{r} = 0 \\
&(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_{1k} + \mu\Delta\mathbf{u}_{1k} + \rho\nabla_{\mathbf{r}}U_k = 0 \quad (k = 1, \ldots, 6)
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Решения краевых задач (33), (31) представляются в виде [4]:

$$\mathbf{u}_{10} = \left[\frac{2}{3}\omega^2 - \frac{fM}{r_1^3}\right]\left(a_1 r^2 + a_2 + \frac{a_3}{r^3}\right)\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u}_{1m} = \left[b_1 r^2 + b_2 + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^5}\right]\nabla_{\mathbf{r}}U_m + \left[b_5 + \frac{b_6}{r^5} + \frac{b_7}{r^7}\right]U_m\mathbf{r} \quad (m = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{u}_{14} = \left[c_1 r^2 + c_2 + \frac{c_3}{r} + \frac{c_4}{r^3}\right]\frac{c}{M}\mathbf{q} + \left[c_5 + \frac{c_6}{r^3} + \frac{c_7}{r^5}\right]\frac{c}{M}(\mathbf{q}, \mathbf{r})\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u}_{15} = -fm[d_1 + d_2 r^2 + d_3 r^3]\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{u}_{16} = fm[h_1 + h_2 r^2 + h_3 r^3 + h_4 r^5]\frac{\mathbf{q}}{r^3} + fm[h_5 + h_6 r^2 + h_7 r^5]\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{q})\mathbf{r}}{r^5}$$

$$a_1 = -\frac{\rho}{10(\lambda+2\mu)}, \quad a_2 = -\frac{a_1[(5\lambda+6\mu)r_1^5 + 4\mu r_0^5]}{[4\mu r_0^3 + (3\lambda+2\mu)r_1^3]}$$

$$a_3 = -\frac{a_1 r_0^3 r_1^3[(3\lambda+2\mu)r_0^2 - (5\lambda+6\mu)r_1^2]}{[4\mu r_0^3 + (3\lambda+2\mu)r_1^3]}$$

$$
\begin{aligned}
b_1 = -\frac{\rho}{2\Delta}\{&80\mu^2 r_0^7 r_1^3 + 24(\lambda+\mu)(5\lambda+11\mu)r_0^5 r_1^5 + 8\mu(9\lambda+14\mu)r_0^{10} - \\
&-5(\lambda+2\mu)(15\lambda+16\mu)r_0^3 r_1^7 + 2(3\lambda+8\mu)(5\lambda+4\mu)r_1^{10}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 = \frac{\rho}{2\Delta}\{&8(15\lambda^2+46\lambda\mu+51\mu^2)r_0^7 r_1^5 - (63\lambda^2+114\lambda\mu+56\mu^2)r_0^5 r_1^7 + \\
&+4(3\lambda+8\mu)(4\lambda+3\mu)r_1^{12} + 8\mu(9\lambda+14\mu)r_0^{12}\}
\end{aligned}
$$

$$b_3 = \frac{\rho\mu}{\Delta}r_0^3 r_1^3\{(21\lambda+16\mu)r_0^2 r_1^7 - 10(4\lambda+3\mu)r_1^9 - 16(\lambda+6\mu)r_0^7 r_1^2 + 40\mu r_0^9\}$$

$$b_4 = \frac{\rho(\lambda+\mu)}{\Delta}r_0^5 r_1^5\{24\mu r_0^7 - 2(3\lambda+26\mu)r_0^5 r_1^2 + (15\lambda+16\mu)r_0^2 r_1^5 - 6(4\lambda+3\mu)r_1^7\}$$

$$b_5 = -\frac{2\rho(\lambda+\mu)}{\Delta}r_1^3\{60\mu r_0^7 - 12(2\lambda+17\mu)r_0^5 r_1^2 + 5(3\lambda+26\mu)r_0^3 r_1^4 - 2(3\lambda+8\mu)r_1^7\},$$

$$b_6 = \frac{3(\lambda+\mu)}{\mu}b_3, \quad b_7 = -5b_4$$

$$\Delta = \mu\{200(3\lambda^2 + 8\lambda\mu + 7\mu^2)r_0^7 r_1^3 - 1008(\lambda+\mu)^2 r_0^5 r_1^5 +$$

$$+ 25(27\lambda^2 + 56\lambda\mu + 28\mu^2)r_0^3 r_1^7 + 8(2\lambda + 7\mu)(9\lambda + 14\mu)r_0^{10} +$$

$$+ 2(3\lambda + 8\mu)(19\lambda + 14\mu)r_1^{10}\}$$

$$c_1 = \frac{\rho}{\Delta_1}\{6\mu(\lambda+2\mu)r_0^5 + \lambda\mu r_1^5 + 2(\lambda+\mu)(2\lambda+3\mu)r_0^2 r_1^3\}$$

$$c_2 = -\frac{\rho}{3r_0\Delta_1}\{\mu(7\lambda+4\mu)r_0^3 r_1^5 + 18(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 5\mu^2)r_0^5 r_1^3 +$$

$$+ 2(2\lambda+5\mu)(3\lambda+2\mu)r_1^8 + 18\mu(\lambda+2\mu)r_0^8\}$$

$$c_3 = \frac{\rho(\lambda+3\mu)r_1^3}{6\mu(\lambda+2\mu)}, \quad c_4 = \frac{\rho}{3\Delta_1}(\lambda+\mu)r_0^2 r_1^5\{(3\lambda+2\mu)r_1^3 + 4\mu r_0^3\}$$

$$c_5 = \frac{2\rho}{\Delta_1}(\lambda+\mu)r_1^3\{2\mu r_1^2 - (\lambda+4\mu)r_0^2\}, \quad c_6 = \frac{\rho(\lambda+\mu)r_1^3}{6\mu(\lambda+2\mu)}$$

$$c_7 = 3c_4, \quad \Delta_1 = 6\mu(\lambda+2\mu)[2(\lambda+4\mu)r_0^5 + (3\lambda+2\mu)r_1^5]$$

$$d_1 = \frac{\rho r_1^2 r_0^2[2\lambda r_0 - (3\lambda+2\mu)r_1]}{2(\lambda+2\mu)[4\mu r_0^3 + (3\lambda+2\mu)r_1^3]}, \quad d_2 = \frac{\rho}{2(\lambda+2\mu)}$$

$$d_3 = -\frac{\rho[2\mu r_0^2 + \lambda r_1^2]}{(\lambda+2\mu)[4\mu r_0^3 + (3\lambda+2\mu)r_1^3]}$$

$$h_1 = -\frac{\rho}{3\Delta_1}(\lambda+4\mu)r_0^2 r_1^2[(3\lambda+2\mu)r_1^3 + 4\mu r_0^3], \quad h_2 = -\frac{\rho\lambda}{6\mu(\lambda+2\mu)}$$

$$h_3 = \frac{2\rho}{3r_0\Delta_1}(\lambda+\mu)[9(\lambda+4\mu)r_0^5 - 10\mu r_0^3 r_1^2 + 2(3\lambda+2\mu)r_1^5]$$

$$h_4 = -\frac{2\rho}{\Delta_1}(2\lambda+3\mu)[(\lambda+4\mu)r_0^2 - 2\mu r_1^2], \quad h_5 = -3h_1$$

$$h_6 = -\frac{\rho(\lambda+4\mu)}{6\mu(\lambda+2\mu)}, \quad h_7 = \frac{2\rho}{\Delta_1}(\lambda+4\mu)[(\lambda+4\mu)r_0^2 - 2\mu r_1^2]$$

Коэффициенты a_i, d_i ($i = 1, 2, 3$), b_j, c_j, h_j ($i = 1, \ldots, 7$) пропорциональны плотности ρ и зависят от коэффициентов Ламе λ, μ и радиусов r_0, r_1.

Функции $\mathbf{u}_{10}$ и $\mathbf{u}_{15}$ описывают сферически симметричные деформации упругой оболочки. Решение $\mathbf{u}_{11}$ отражает сжатие упругого слоя вдоль оси вращения. Функция $\mathbf{u}_{12}$ описывает приливную деформацию планеты вдоль оси, соединяющей притягивающий центр O с центром D абсолютно твердой невесомой сферы. Функция $\mathbf{u}_{13}$ описывает приливную деформацию планеты вдоль оси, проходящей через точки D и F, которая вызвана гравитационным полем спутника. Указанные функции обладают свойством центральной симметрии, т.е. $\mathbf{u}_{1k}(-\mathbf{r}, t) = -\mathbf{u}_{1k}(\mathbf{r}, t)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 5)$. Слагаемые $\mathbf{u}_{14}$ и $\mathbf{u}_{16}$ в (32) описывают деформации упругого слоя, вызванные наличием внутреннего подвижного ядра. Эти функции являются "четными": $\mathbf{u}_{1l}(-\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{1l}(\mathbf{r}, t)$ $(l = 4, 6)$. Еще раз отметим, что зависимость от времени полученных решений $\mathbf{u}_{1k}(k = 0, 1, \ldots, 6)$ осуществляется через вектор-функции $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{q}$, которые являются решениями невозмущенной системы уравнений (24)–(27).

Данная задача является модельной задачей теории неклассических приливов [5], учитывающей внутреннее строение планеты, в частности наличие у нее внутреннего ядра, способного совершать колебания.

Автор выражает благодарность Баркину Ю.В., привлекшему внимание автора к задаче, а также Вильке В.Г. за совместное обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-05-64176).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. М.: Изд-во МГУ, 1998. 271 с.
3. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. М. Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 1997. Ч. 1. 216 с.; Ч. 2. 160 с.
4. *Лейбензон Л.С.* Краткий курс теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1942. 304 с.
5. *Авсюк Ю.Н.* Приливные силы и природные процессы. М.: РАН Объединенный институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта, 1996. 188 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.06.2002