

УДК 531.381

© 2005 г. А.П. МАРКЕЕВ

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В СЛУЧАЕ СТЕКЛОВА

Изучается движение тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Центр тяжести тела лежит на средней или наименьшей по величине оси эллипсоида инерции, а моменты инерции, помимо обычных для твердого тела неравенств “треугольника”, удовлетворяют соответственно условиям $B > A > 2C$ или $2B > A > B > C$, $A > 2C$. При выполнении этих условий уравнения Эйлера – Пуассона допускают частные периодические решения, указанные В.А. Стекловым. В работе исследована задача об орбитальной устойчивости периодических движений твердого тела, соответствующих этим решениям В.А. Стеклова.

1. Два типа решений Стеклова уравнений Эйлера – Пуассона. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести. Вес тела P , расстояние от центра тяжести до неподвижной точки равно l . Движение тела отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$, ось Z которой направим вертикально вверх. С движущимся телом жестко свяжем систему координат $Oxyz$, ее оси x , y и z направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O . Соответствующие моменты инерции равны A , B и C . Через p , q , r и γ_1 , γ_2 , γ_3 обозначаем компоненты вектора угловой скорости и единичного вектора восходящей вертикали Z в системе координат $Oxyz$.

В случае Стеклова [1] предполагается, что центр тяжести тела лежит на главной оси инерции. Пусть этой осью будет ось x . Уравнения Эйлера – Пуассона, описывающие движение твердого тела, будут иметь вид

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr, & B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Pl\gamma_3, & C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq - Pl\gamma_2 \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Если $B = C$, то уравнения (1.1) интегрируемы (случай Лагранжа [2, 3]). Поэтому далее, как и в [1], считаем, что $B \neq C$. Причем, ввиду равноправности осей y и z , без ограничения общности полагаем, что $B > C$.

Частные решения уравнений (1.1) В.А. Стеклов находит при помощи следующего приема. Он требует, чтобы для искомого решения выполнялись два алгебраических соотношения $\gamma_2 = \beta pq$, $\gamma_3 = \delta rp$ при соответствующем выборе постоянных β и δ .

В частном решении Стеклова величины A , B , C , кроме обычных для твердого тела условий

$$A + B > C, \quad B + C > A, \quad C + A > B \quad (1.2)$$

подчинены еще дополнительным ограничениям, вытекающим из требования вещественности искомого решения

$$B > A > 2C \quad (1.3)$$

Из (1.3), в частности, следует, что центр тяжести лежит на средней по величине оси эллипсоида инерции тела для неподвижной точки.

Если ввести безразмерное "время" v по формуле

$$v = \mu(t + t_0), \quad \mu = \sqrt{PI/A} \quad (1.4)$$

где t_0 – произвольная постоянная, то частное решение уравнений Эйлера – Пуассона (1.1), полученное В.А. Стекловым, можно записать в таком виде:

$$p = -\mu \sqrt{\frac{A(2B-A)(A-2C)}{(A-C)^2(B-A)}} \operatorname{cn}z, \quad q = \mu \sqrt{\frac{A^2(A-2C)}{(B-A)(A-C)(B-C)}} \operatorname{sn}z \quad (1.5)$$

$$r = \mu \sqrt{\frac{A^2(2B-A)}{(A-C)^2(B-A)}} \operatorname{dn}z, \quad \gamma_1 = 1 - \frac{A}{A-C} \operatorname{cn}^2z$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{A(2B-A)}{(A-C)(B-C)}} \operatorname{sn}z \operatorname{cn}z, \quad \gamma_3 = -\sqrt{\frac{A(A-2C)}{(A-C)^2}} \operatorname{cn}z \operatorname{dn}z \quad (1.6)$$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{A}{A-C}} v, \quad k^2 = \frac{B-A}{B-C}$$

где $\operatorname{sn}z$, $\operatorname{cn}z$, $\operatorname{dn}z$ – эллиптические функции Якоби, k – их модуль.

В.А. Стеклов ограничился рассмотрением только этого решения. Будем называть его решением Стеклова первого типа. Но полученные в [1] соотношения фактически содержат в себе и второй тип частного решения уравнений (1.1), указанный в [4, 5]. Для решений второго типа моменты инерции должны (помимо неравенств (1.2)) удовлетворять таким неравенствам

$$2B > A > B > C, \quad A > 2C \quad (1.7)$$

Отсюда следует, что для решений второго типа центр тяжести тела лежит на наименьшей по величине оси эллипсоида инерции. Само решение имеет следующий вид:

$$p = \mu \sqrt{\frac{A(2B-A)(A-2C)}{(A-C)^2(A-B)}} \operatorname{sn}z, \quad q = \mu \sqrt{\frac{A^2(A-2C)}{(A-B)(A-C)(B-C)}} \operatorname{cn}z \quad (1.8)$$

$$r = \mu \sqrt{\frac{A^2(2B-A)}{(A-B)(A-C)(B-C)}} \operatorname{dn}z, \quad \gamma_1 = -1 + \frac{A}{A-C} \operatorname{sn}^2z$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{A(2B-A)}{(A-C)(B-C)}} \operatorname{sn}z \operatorname{cn}z, \quad \gamma_3 = -\sqrt{\frac{A(A-2C)}{(A-C)(B-C)}} \operatorname{sn}z \operatorname{dn}z \quad (1.9)$$

$$k^2 = \frac{A-B}{A-C}$$

где z определяется первым из равенств (1.6).

2. Некоторые свойства решений Стеклова. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для решений Стеклова обоих типов проекция кинетического момента тела на вертикаль равна нулю

$$K_Z = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = 0 \quad (2.1)$$

Период τ решений Стеклова по времени t вычисляется по формуле

$$\tau = 4kK(k) \sqrt{\frac{A-C}{PI}} \quad (2.2)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, а величина k определяется из равенств (1.6) или (1.9) в зависимости от типа решения.

В предельном случае, когда $A = 2C$, решения Стеклова описывают плоские маятниковобразные вращения тела вокруг оси z , занимающей неизменное горизонтальное положение. Для этих вращений

$$p = q = 0, \quad r = \frac{2\sqrt{2}\mu}{k} \operatorname{dn}z, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{k} v \quad (2.3)$$

$$\gamma_1 = 1 - 2\operatorname{cn}^2 z, \quad \gamma_2 = 2\operatorname{sn}z\operatorname{cn}z, \quad \gamma_3 = 0$$

причем для решения первого типа $k^2 = 1 - C/(B - C)$, а для решений второго типа $k^2 = 1 - (B - C)/C$.

Ориентацию твердого тела относительно неподвижной системы координат будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ , вводимых обычным образом. Тогда

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta \quad (2.4)$$

Для обоих типов решений угол нутации θ периодически с периодом τ изменяется между своими минимальным и максимальным значениями, лежащими внутри отрезка $[0, \pi]$, $\arccos u \leq \theta \leq \pi - \arccos u$. При этом для решений первого типа (при всех значениях k) и для решений второго типа (если $0 < k^2 \leq 1/2$) $u = \sqrt{A(A - 2C)/(A - C)}$, а для решений второго типа при $1 > k^2 \geq 1/2$ имеем $u = 1/2 \sqrt{A(A - 2C)/(A - B)(B - C)}$.

Исследуем характер поведения угла собственного вращения φ на решениях Стеклова. Из равенств (1.5), (1.6) и (1.8), (1.9) с использованием соотношений (2.4) и известных правил действий с эллиптическими функциями [6] можно получить

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sqrt{A(2B - A)}}{\sqrt{(A - C)(B - C)}} \frac{\operatorname{dn}z}{1 - \gamma_3^2} \varepsilon \quad (2.5)$$

причем для решений первого типа $\varepsilon = \operatorname{sn}^2 z + C/(A - C)\operatorname{cn}^2 z$, а для решений второго типа $\varepsilon = \operatorname{cn}^2 z + C/(A - C)\operatorname{sn}^2 z$. В областях (1.2), (1.3) и (1.2), (1.7) допустимых значений моментов инерции правая часть равенства (2.5) положительна, т.е. для решений Стеклова обоих типов угол φ – монотонно возрастающая функция времени.

Найдем приращение $\Delta\varphi$ угла φ за время, равное периоду τ . Для этого надо проинтегрировать правую часть равенства (2.5) по z от 0 до $4K(k)$. Но проще найти $\Delta\varphi$ иначе. Заметим, что из периодичности функций $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и соотношений (2.4) следует, что величина $\Delta\varphi$ кратна 2π , т.е. $\Delta\varphi = 2\pi n$. Далее, из непрерывности $\Delta\varphi$ относительно A, B, C вытекает, что целое число n в последнем равенстве должно быть одним и тем же в областях допустимых значений моментов инерции. Поэтому для нахождения числа n достаточно, например, рассмотреть предельный случай $A = 2C$. Из (2.3) и (2.5) следует, что при $A = 2C$ для обоих типов решений имеем

$$d\varphi/dz = 2\operatorname{dn}z$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\varphi = 2 \int_0^{4K(k)} \operatorname{dn}z dz = 4\pi$$

Таким образом $n = 2$, т.е. на решениях Стеклова угол собственного вращения монотонно возрастает и за период получает приращение, равное 4π .

Теперь выясним, что изменяется за период угол прецессии ψ . Используя кинематическое уравнение Эйлера $r = \psi \gamma_3 + \phi$, можно получить, что на решениях Стеклова первого и второго типов имеем соответственно

$$\frac{d\psi}{dz} = \sqrt{\frac{(A-2C)(2B-A)}{(A-C)(B-C)}} \frac{\operatorname{cn}z}{1-\gamma_3^2} \left(\frac{A}{A-C} \operatorname{dn}^2 z - 1 \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\sqrt{(A-2C)(2B-A)}}{A-C} \frac{\operatorname{sn}z}{1-\gamma_3^2} \left(\frac{A}{B-C} \operatorname{dn}^2 z - 1 \right) \quad (2.7)$$

Приращение $\Delta\psi$ за период τ равняется интегралу по отрезку длины $4K(k)$ от правых частей равенств (2.6) и (2.7). Для обоих типов решений $\Delta\psi = 0$. Для решения второго типа это сразу следует из нечетности подынтегральной функции. А в случае решения первого типа подынтегральная функция тоже будет нечетной, если вместо z ввести новую переменную $v = z - K(k)$.

Выражения, заключенные в последние круглые скобки в равенствах (2.6) и (2.7), положительны при любых значениях z . Поэтому изменение знака ψ происходит только два раза за период. Для решений первого типа в эти моменты $\operatorname{sn}z = 0$, а $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, т.е. ось x , несущая центр тяжести, проходит через восходящую вертикаль Z . Для решений второго типа ψ меняет знак, когда $\operatorname{sn}z = 0$, а $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, т.е. когда ось x проходит через нисходящую вертикаль.

Решения Стеклова неоднократно рассматривались в научной литературе с аналитической и геометрической точек зрения [2, 3, 5, 7–9]. Простой и изящный прием, предложенный В.А. Стекловым при нахождении частных решений уравнений Эйлера – Пуассона, оказался весьма плодотворным и получил дальнейшее развитие и обобщение [10–13]. Обсуждение ряда полученных на этом пути результатов содержится в [2, 3, 14].

Основная цель данной работы состоит в решении задачи об орбитальной устойчивости периодических движений твердого тела, соответствующих решениям Стеклова.

3. Запись решений Стеклова в канонически сопряженных переменных. Кинетическая и потенциальная энергия вычисляются по формулам

$$T = 1/2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \Pi = Pl\gamma_1 \quad (3.1)$$

Для обобщенных импульсов, соответствующих углам Эйлера, имеем такие выражения:

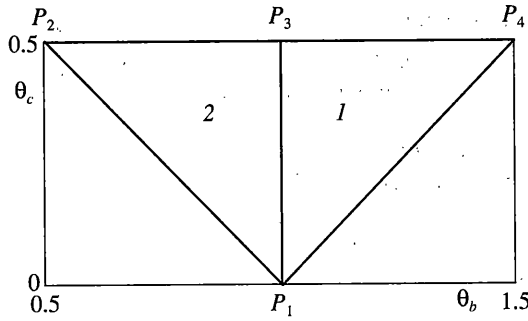
$$p_\psi = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3, \quad p_\theta = Ap\cos\phi - Bq\sin\phi, \quad p_\phi = Cr \quad (3.2)$$

Угол ψ – циклическая координата, поэтому $p_\psi = \text{const}$. Согласно (2.1), на решениях Стеклова $p_\psi = 0$. Будем предполагать, что и в возмущенном движении $p_\psi = 0$. Тогда из (2.4) и (3.2) находим

$$Ap = p_\theta \cos\phi - p_\phi \sin\phi \operatorname{ctg}\theta, \quad Bq = -p_\theta \sin\phi - p_\phi \cos\phi \operatorname{ctg}\theta, \quad Cr = p_\phi \quad (3.3)$$

В качестве независимой переменной примем величину v из (1.4) и введем безразмерные импульсы p_1, p_2 при помощи канонического (с валентностью, равной $(A\mu)^{-1}$) преобразования вида

$$p_\phi = A\mu p_1, \quad p_\theta = A\mu p_2, \quad \phi = q_1, \quad \theta = q_2 \quad (3.4)$$



Фиг. 1

Тогда функция Гамильтона F будет равна поделенной на P_1 полной механической энергии $T + \Pi$, выраженной через q_1, q_2, p_1, p_2 по формулам (3.1), (3.3) и (3.4):

$$F = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\theta_c} + \left(\sin^2 q_1 + \frac{1}{\theta_b} \cos^2 q_1 \right) \operatorname{ctg}^2 q_2 \right] p_1^2 + \left(\frac{1}{\theta_b} - 1 \right) \sin q_1 \cos q_1 \operatorname{ctg} q_2 p_1 p_2 + \frac{1}{2} \left(\cos^2 q_1 + \frac{1}{\theta_b} \sin^2 q_1 \right) p_2^2 + \sin q_1 \sin q_2 \quad (3.5)$$

$$\theta_b = B/A, \quad \theta_c = C/A$$

На фиг. 1 области допустимых значений инерционных параметров θ_b, θ_c для решений Стеклова и второго типов обозначены цифрами 1 и 2 соответственно. Они представляют собой прямоугольные треугольники $P_1 P_3 P_4$ и $P_1 P_2 P_3$ с вершинами $P_1(1, 0), P_2(0.5, 0.5), P_3(1, 0.5), P_4(1.5, 0.5)$.

Решениям Стеклова уравнений Эйлера – Пуассона соответствуют периодические решения

$$q_i = f_i(w), \quad p_i = g_i(w) \quad (i = 1, 2) \quad (3.6)$$

дифференциальных уравнений с гамильтонианом (3.5). При этом для решений первого типа

$$\begin{aligned} \sin f_1 \sin f_2 &= 1 - \frac{1}{1 - \theta_c} \operatorname{cn}^2 z, \quad \cos f_1 \sin f_2 = \sqrt{\frac{2\theta_b - 1}{(1 - \theta_c)(\theta_b - \theta_c)}} \operatorname{snz} \operatorname{cnz} \\ \cos f_2 &= -\frac{\sqrt{1 - 2\theta_c}}{1 - \theta_c} \operatorname{cnz} \operatorname{dnz}, \quad g_1 = \frac{\theta_c}{1 - \theta_c} \sqrt{\frac{2\theta_b - 1}{\theta_b - 1}} \operatorname{dnz} \\ g_2 &= -\sqrt{\frac{1 - 2\theta_c}{(1 - \theta_c)(\theta_b - 1)}} \left[\sqrt{\frac{2\theta_b - 1}{1 - \theta_c}} \cos f_1 \operatorname{cnz} + \frac{\theta_b}{\sqrt{\theta_b - \theta_c}} \sin f_1 \operatorname{snz} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$z = \frac{2K(k)}{\pi} w, \quad k^2 = \frac{\theta_b - 1}{\theta_b - \theta_c}$$

а для решений второго типа

$$\sin f_1 \sin f_2 = -1 + \frac{1}{1 - \theta_c} \operatorname{sn}^2 z, \quad \cos f_1 \sin f_2 = \sqrt{\frac{2\theta_b - 1}{(1 - \theta_c)(\theta_b - \theta_c)}} \operatorname{snz} \operatorname{cnz}$$

$$\cos f_2 = -\sqrt{\frac{1-2\theta_c}{(1-\theta_c)(\theta_b-\theta_c)}} \operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad g_1 = \theta_c \sqrt{\frac{2\theta_b-1}{(1-\theta_b)(1-\theta_c)(\theta_b-\theta_c)}} \operatorname{dn} z, \quad (3.8)$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{1-2\theta_c}{(1-\theta_c)(1-\theta_b)}} \left[\sqrt{\frac{2\theta_b-1}{1-\theta_c}} \cos f_1 \operatorname{sn} z - \frac{\theta_b}{\sqrt{\theta_b-\theta_c}} \sin f_1 \operatorname{cn} z \right]$$

$$z = \frac{2K(k)}{\pi} w, \quad k^2 = \frac{1-\theta_b}{1-\theta_c}$$

В (3.6)–(3.8) введена новая независимая переменная

$$w = \frac{\pi}{2kK(k)\sqrt{1-\theta_c}} v = \frac{2\pi}{\tau} (t + t_0) \quad (3.9)$$

Решения (3.6) обоих типов 2π -периодичны относительно w .

4. Гамильтониан возмущенного движения. Изоэнергетическая редукция. Для исследования орбитальной устойчивости периодических движений Стеклова введем новые канонически сопряженные переменные ξ_i, η_i ($i = 1, 2$) так, чтобы невозмущенное движение (3.6) записывалось в виде $\xi_1(w) = w + \xi_1(0), \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0$, а новая функция Гамильтона $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ была 2π -периодической относительно ξ_1 . Алгоритм построения таких переменных разработан ранее [15]. В рассматриваемой конкретной задаче он выглядит следующим образом. Предварительно в системе с гамильтонианом (3.5) вместо независимой переменной v введем переменную w , определенную равенствами (3.9). Замечая затем (см. п. 2), что $df_1/dw \neq 0$, переменные ξ_i, η_i ($i = 1, 2$) можно ввести при помощи следующего канонического унивалантного преобразования:

$$q_1 = f_1(\xi_1), \quad q_2 = f_2(\xi_1) + \xi_2$$

$$p_1 = g_1(\xi_1) + \left(\frac{df_1(\xi_1)}{d\xi_1} \right)^{-1} \left(\eta_1 + \frac{dg_2(\xi_1)}{d\xi_1} \xi_2 - \frac{df_2(\xi_1)}{d\xi_1} \eta_2 \right), \quad p_2 = g_2(\xi_1) + \eta_2 \quad (4.1)$$

Задача об орбитальной устойчивости периодического движения (3.6) эквивалентна задаче об устойчивости системы с гамильтонианом Γ по отношению к возмущениям величин η_1, ξ_2, η_2 . Функция Γ представима в виде ряда

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_k + \dots$$

$$\Gamma_2 = \eta_1 + \Phi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \quad \Gamma_3 = \Psi_1(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \Phi_3(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \quad (4.2)$$

$$\Gamma_4 = \chi(\xi_1)\eta_1^2 + \Psi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \Phi_4(\xi_2, \eta_2, \xi_1)$$

где отброшена аддитивная постоянная, равная значению гамильтониана на невозмущенном движении; Γ_k – форма степени k относительно $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2; \chi(\xi_1)$ – 2π -периодическая функция от ξ_1 ; Φ_m, Ψ_m – формы степени m относительно ξ_2, η_2 с 2π -периодическими по ξ_1 коэффициентами. Условия орбитальной устойчивости и неустойчивости могут быть выражены [15–17] через коэффициенты нормальной формы гамильтониана возмущенного движения (4.2).

Необходимые вычисления можно сильно упростить, если заметить, что эти условия совпадают с условиями устойчивости и неустойчивости положения равновесия $\xi_2 = \eta_2 = 0$ редуцированной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, описывающей возмущенное движение на изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$. Разрешив послед-

нее равенство относительно η_1 , получим $\eta_1 = -H(\xi_2, \eta_2, \xi_1)$, где $H - 2\pi$ -периодическая по ξ_1 функция, представимая рядом

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots + H_k + \dots \quad (4.3)$$

$$H_2 = \Phi_2, \quad H_3 = \Phi_3 - \Phi_2 \Psi_1, \quad H_4 = \Phi_4 - \Phi_3 \Psi_1 + \Phi_2 \Psi_1^2 - \Phi_2 \Psi_2 + \chi \Phi_2^2$$

Здесь H_k – форма степени k относительно ξ_2, η_2 .

На изоэнергетическом уровне $\Gamma = 0$ уравнения возмущенного движения имеют гамильтонову форму (уравнения Уиттекера [18]) с гамильтонианом (4.3). Роль независимой переменной играет координата ξ_1 . Следует отметить, что фактическое осуществление замены переменных (4.1) и получение разложений (4.2), (4.3) приводят к довольно громоздким выкладкам. Они осуществлялись на компьютере с использованием систем аналитических вычислений.

5. Об устойчивости в линейном приближении. Пусть $X(\xi_1)$ – матрица фундаментальных решений линейной системы с гамильтонианом H_2 . Ее элементы x_{ij} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_{1j}}{d\xi_1} = \frac{\partial H_2(x_{1j}, x_{2j}, \xi_1)}{\partial x_{2j}}, \quad \frac{dx_{2j}}{d\xi_1} = -\frac{\partial H_2(x_{1j}, x_{2j}, \xi_1)}{\partial x_{1j}} \quad (j = 1, 2) \quad (5.1)$$

и начальным условиям

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0 \quad (5.2)$$

Характеристическое уравнение матрицы $X(2\pi)$ имеет вид

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0 \quad (5.3)$$

$$a = 1/2(x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)) \quad (5.4)$$

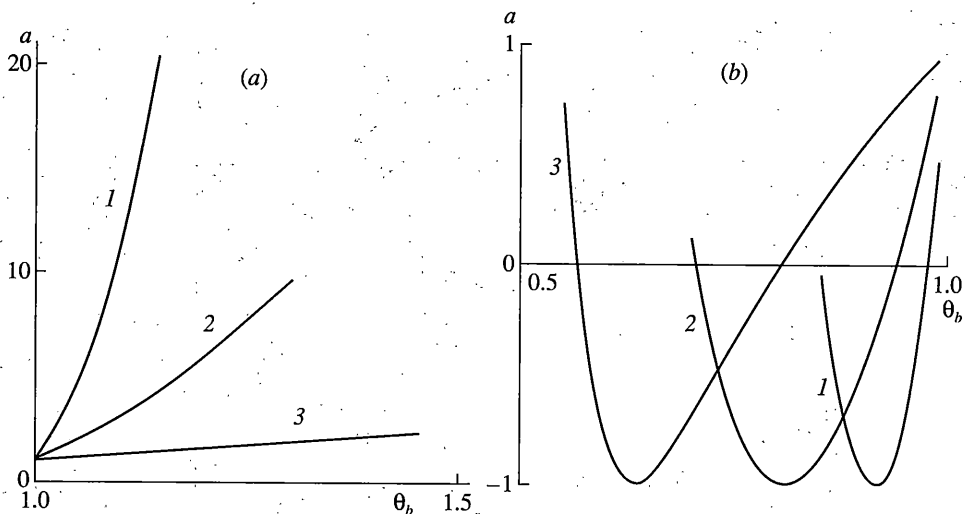
Рассмотрим сначала решения первого типа. Вычисления показали, что при всех значениях параметров θ_b, θ_c из области их допустимых значений (область 1 на фиг. 1) величина $a > 1$. В качестве примера на фиг. 2, a показана зависимость величины a от θ_b для трех значений параметра θ_c . На кривых, обозначенных цифрами 1, 2 и 3 значения θ_c равны соответственно 0.15, 0.3 и 0.45.

Так как $a > 1$, то периодическое движение твердого тела, соответствующее решению Стеклова первого типа, орбитально неустойчиво. И не только в первом приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи [19]. Этот факт впервые был отмечен в [20].

Далее рассмотрим решение второго типа. Оказалось, что всюду в области допустимых значений параметров (область 2 на фиг. 1) $|a| \leq 1$. В качестве примера на фиг. 2, b показана зависимость величины a от θ_b для трех значений параметра θ_c . Для кривых 1, 2 и 3 значения θ_c равны соответственно 0.15, 0.3 и 0.45.

Так как $|a| \leq 1$, то для получения строгих выводов об устойчивости движения твердого тела в случае решения Стеклова второго типа недостаточно рассмотрения только первого приближения [19]. Необходим нелинейный анализ устойчивости. Результаты нелинейного исследования изложены в следующем разделе.

6. Нелинейный анализ устойчивости периодического движения, соответствующего решению второго типа. *6.1. Об алгоритме исследования.* Нелинейную задачу об устойчивости положения равновесия $\xi_2 = \eta_2 = 0$ редуцированной системы будем решать, сводя ее к исследованию устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения, порождаемого системой уравнений движения, соответствующей гамильтониану (4.3).



Фиг. 2

Пусть q_0, p_0 – начальное значение переменных ξ_2, η_2 , а q_1, p_1 – их значения при $\xi_1 = 2\pi$. Если q_0, p_0 достаточно малы, то q_1, p_1 будут аналитическими функциями относительно q_0, p_0 и задают отображение T окрестности положения равновесия на себя. Задача об устойчивости положения равновесия $\xi_2 = \eta_2 = 0$ эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $q_0 = p_0 = 0$ отображения T . В дальнейшем потребуются разложения функций q_1, p_1 в ряды до членов третьей степени включительно. Согласно ранее разработанному алгоритму [21], их можно получить следующим образом. Пусть $G_3(q_0, p_0, \xi_1)$ и $G_4(q_0, p_0, \xi_1)$ – формы H_3 и H_4 из разложения (4.3), в которых сделана замена переменных

$$\xi_2 = x_{11}(\xi_1)q_0 + x_{12}(\xi_1)p_0, \quad \eta_2 = x_{21}(\xi_1)q_0 + x_{22}(\xi_1)p_0 \quad (6.1)$$

где x_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{X}(\xi_1)$, удовлетворяющие системе (5.1), (5.2).

Рассмотрим равенства

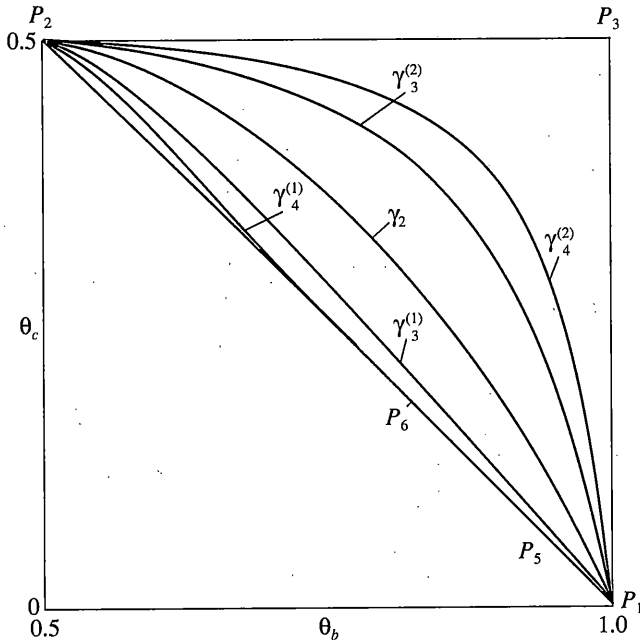
$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi_1} = -G_3, \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi_1} = -G_4 - \frac{\partial G_3}{\partial p_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial q_0} \quad (6.2)$$

где $\Phi_k = \Phi_k(q_0, p_0, \xi_1)$. ($k = 3, 4$) – формы степени k относительно q_0, p_0 , удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k(q_0, p_0, 0) \equiv 0 \quad (k = 3, 4) \quad (6.3)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q_0, p_0 в левой и правой частях равенств (6.2), получим девять обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которым должны удовлетворять коэффициенты форм Φ_3 и Φ_4 . Из (5.2) и (6.3) следует, что при $\xi_1 = 0$ значения этих коэффициентов равны нулю.

В силу замены (6.1) функции G_3 и G_4 зависят от $x_{ij}(\xi_1)$. Поэтому упомянутые девять уравнений должны рассматриваться совместно с уравнениями (5.1). Проинтегрировав эту систему тринадцати уравнений от $\xi_1 = 0$ до $\xi_1 = 2\pi$, найдем значения коэффициентов форм Φ_3 и Φ_4 при $\xi_1 = 2\pi$.



Фиг. 3

Введем обозначения $S_k = \Phi_k(q_0, p_0, 2\pi)$ ($k = 3, 4$). Тогда искомое отображение T записывается в следующем виде:

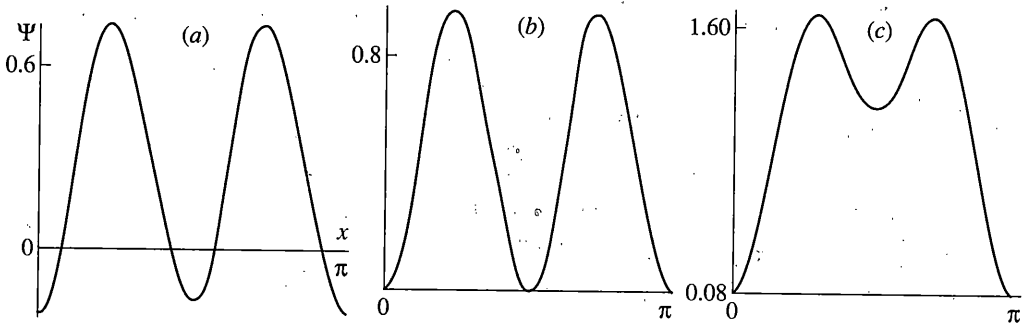
$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}(2\pi) \begin{pmatrix} q_0 - \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0 \partial p_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} - \frac{\partial S_4}{\partial p_0} + O_4 \\ p_0 + \frac{\partial S_3}{\partial q_0} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0^2} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial S_4}{\partial q_0} + O_4 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

где O_4 – совокупность членов выше третьей степени относительно q_0, p_0 .

Зная отображение (6.4), можно [21, 22] выписать условия устойчивости и неустойчивости его неподвижной точки $q_0 = p_0 = 0$. Ниже эти условия выписаны для тех частных случаев, которые встречаются в рассматриваемой конкретной задаче об устойчивости периодического движения твердого тела.

6.2. Резонансные случаи. Резонансные кривые. Пусть $\rho = \exp(i\alpha)$ и $\bar{\rho} = \exp(-i\alpha)$ – корни характеристического уравнения (5.3) (мультипликаторы). Так как $|a| \leq 1$, то α – вещественное число, причем $\cos \alpha = a$.

Если $\rho^k = 1$, то имеет место резонанс порядка k . Для задачи об устойчивости чаще всего наиболее важны резонансы до четвертого порядка включительно. Вычисления показывают, что этим резонансам отвечают пять кривых $\gamma_2, \gamma_3^{(n)}, \gamma_4^{(n)}$ ($n = 1, 2$), показанных на фиг. 3. Каждая из резонансных кривых начинается в вершине P_1 треугольника $P_1P_2P_3$ и оканчивается в его вершине P_2 . На кривой γ_2 реализуется резонанс вто-



Фиг. 4

рого порядка, здесь $a = -1$. Кривые $\gamma_3^{(1)}$ и $\gamma_3^{(2)}$ соответствуют резонансу третьего порядка, на них $a = -1/2$. И на кривых $\gamma_4^{(1)}$ и $\gamma_4^{(2)}$ имеет место резонанс четвертого порядка, здесь $a = 0$. Кривая $\gamma_4^{(1)}$ состоит из двух участков P_1P_5 и P_6P_2 ($P_5(0.936868, 0.063132)$, $P_6(0.821425, 0.178575)$). Участок P_1P_5 этой кривой мало отличается от отрезка P_1P_5 прямой P_1P_2 . На фиг. 3 этот отрезок и участок кривой неотличимы.

(а) Резонанс второго порядка. Расчеты показали, что во всех точках кривой γ_2 резонанса второго порядка матрица $X(2\pi)$ в отображении (6.4) диагональна

$$X(2\pi) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Согласно [21, 22] условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки $q_0 = p_0 = 0$ отображения (6.4) могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть $\Psi(x)$ – функция вещественного переменного x , определяемая равенствами

$$R_4(q_0, p_0) = 2S_4 - \frac{\partial S_3}{\partial q_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0}, \quad \Psi(x) = R_4(\sin x, \cos x)$$

Очевидно, что $\Psi(x + \pi) \equiv \Psi(x)$. Если уравнение $\Psi(x) = 0$ не имеет корней, то неподвижная точка устойчива; если же существует корень $x = x_*$, но при этом $d\Psi(x_*)/dx_* \neq 0$, то имеет место неустойчивость.

Сформулированные условия были проверены численно. Оказалось, что кривая γ_2 разбивается точкой $P_7(0.7320, 0.3776)$ на два участка P_1P_7 и P_7P_2 , на первом из которых неподвижная точка $q_0 = p_0 = 0$ отображения неустойчива, а на втором устойчива. В самой точке P_7 вопрос об устойчивости остался открытым.

В качестве иллюстрации к результатам вычислений на фиг. 4 приведены графики функции $\Psi(x)$ для трех точек кривой γ_2 : точки $(0.790291, 0.32)$, лежащей на участке P_1P_7 (фиг. 4, а), пограничной точки P_7 (фиг. 4, б) и точки $(0.680003, 0.42)$, лежащей на участке P_7P_2 (фиг. 4, с).

(б) Резонанс третьего порядка. Далее будем исследовать устойчивость для параметров θ_b, θ_c , лежащих внутри треугольника $P_1P_2P_3$, но не принадлежащих кривой резонанса второго порядка γ_2 . Предварительно сделаем следующую замену переменных:

$$q = x_{12}(2\pi)Q, \quad p = (a - x_{11}(2\pi))Q + \sqrt{1 - a^2}P \quad (6.5)$$

Эта замена приводит линейную часть отображения (6.4) к вещественной нормальной форме

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

представляющей собой поворот на угол $\alpha = \arccos a$.

Преобразование (6.5) является каноническим с валентностью c , задаваемой равенством $cx_{12}(2\pi)\sqrt{1-a^2} = 1$. В новых переменных отображение (6.4) будет таким

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} Q_0 - \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0 \partial P_0} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + O_4 \\ P_0 + \frac{\partial F_3}{\partial Q_0} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0^2} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_0} + O_4 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$F_3 = cS_3, \quad F_4 = cS_4 + \frac{1}{2}x_{12}(2\pi)(a - x_{11}(2\pi))\left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0}\right)^2 \quad (6.7)$$

где S_3 и S_4 выражены через переменные Q_0, P_0 в соответствии с заменой (6.5).

Запишем функции F_3 и F_4 в виде

$$F_k = \sum_{\nu+\mu=k} f_{\nu\mu} Q_0^\nu P_0^\mu \quad (k=3,4)$$

и в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$a_1 = f_{30} - f_{12}, \quad a_2 = f_{12} + 3f_{30}, \quad a_3 = f_{22} - f_{40} - f_{04}$$

$$b_1 = f_{21} - f_{03}, \quad b_2 = f_{21} + 3f_{03}, \quad b_3 = f_{13} - f_{31}$$

$$\sigma = 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) - 8a_2b_2 + 6(a_1b_2 - a_2b_1) + 9 \operatorname{ctg}(\alpha/2)(a_1^2 + b_1^2) + 3 \operatorname{ctg}(\alpha/2)(a_2^2 + b_2^2)$$

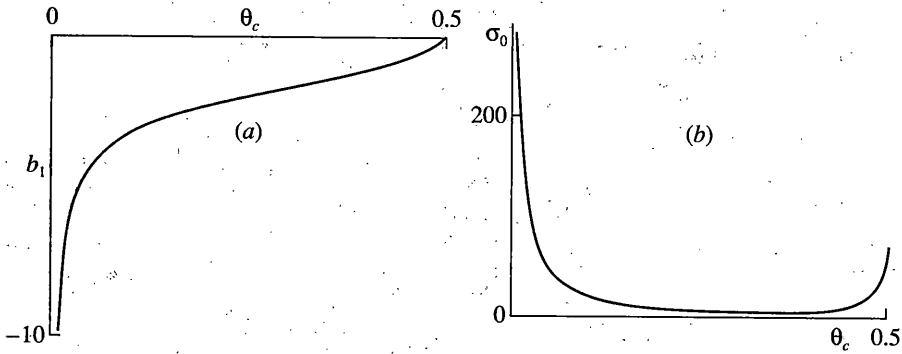
$$\sigma_0 = 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) - 8a_2b_2 + \sqrt{3}(a_2^2 + b_2^2)$$

$$\sigma_1 = 2[4a_3 + 9a_1b_1 - a_2b_2 + 3 \operatorname{ctg}(\alpha/2)(a_1a_2 - b_1b_2)]$$

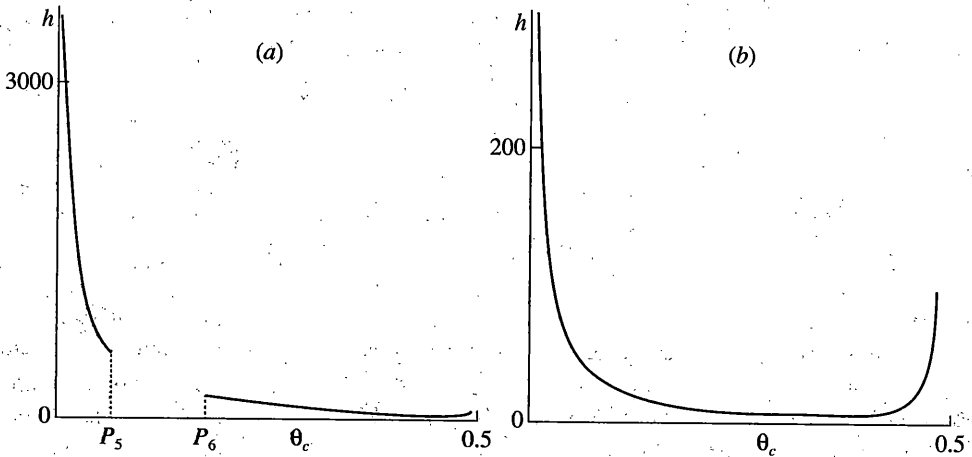
$$\sigma_2 = 8b_3 - 9(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 6 \operatorname{ctg}(\alpha/2)(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Рассмотрим случай, когда реализуется резонанс третьего порядка, т.е. когда параметры θ_b, θ_c лежат на кривой $\gamma_3^{(1)}$ или $\gamma_3^{(2)}$. Если для таких значений параметров хотя бы одна из величин a_1 или b_1 отлична от нуля, то имеет место неустойчивость; если же $a_1^2 + b_1^2 = 0$, но при этом $\sigma_0 \neq 0$, то неподвижная точка $q_0 = p_0 = 0$ отображения (6.4) устойчива [21, 22].

Расчеты показали, что на всей резонансной кривой $\gamma_3^{(1)}$ величина a_1 обращается в нуль. Зависимость же b_1 от θ_c вдоль этой кривой показана графически на фиг. 5, а. Так как $b_1 \neq 0$, то на кривой $\gamma_3^{(1)}$ неподвижная точка $q_0 = p_0 = 0$ неустойчива.



Фиг. 5



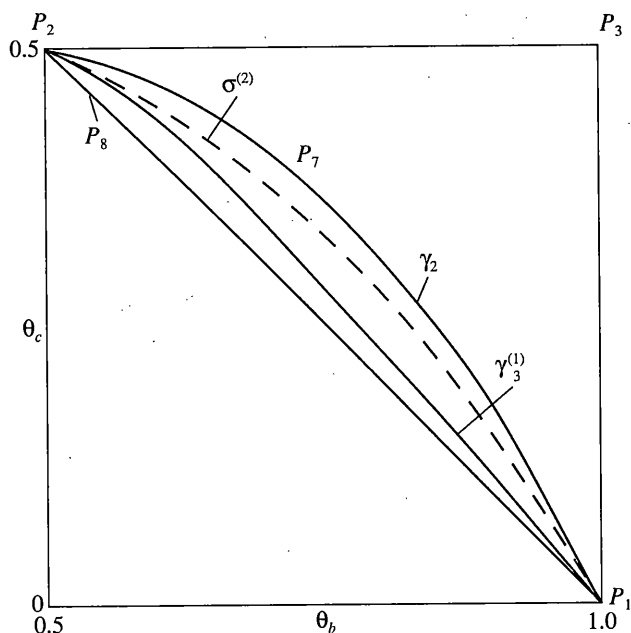
Фиг. 6

На кривой $\gamma_3^{(2)}$ обе величины a_1 и b_1 равны нулю, а σ_0 отлична от нуля (фиг. 5, b). Следовательно на этой резонансной кривой имеет место устойчивость.

(с) Резонансы четвертого порядка. Пусть параметры θ_b, θ_c лежат на кривой $\gamma_4^{(1)}$ или $\gamma_4^{(2)}$, т.е. реализуется резонанс четвертого порядка. Условия устойчивости и неустойчивости при этом резонансе выглядят так. Пусть $h = |\sigma| - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. На кривых $\gamma_4^{(1)}$ и $\gamma_4^{(2)}$ h можно считать функцией одного параметра θ_c . Если $h > 0$, то неподвижная точка $q_0 = p_0 = 0$ отображения (6.4) устойчива, при $h < 0$ она неустойчива.

Графики функции h для кривых $\gamma_4^{(1)}$ и $\gamma_4^{(2)}$ показаны на фиг. 6, а и фиг. 6, b соответственно. Так как значения функции h для обеих кривых положительны, то при резонансе четвертого порядка имеет место устойчивость.

6.3. Нерезонансный случай. Теперь рассмотрим нерезонансный случай, когда параметры θ_b, θ_c лежат внутри треугольника $P_1P_2P_3$, но не принадлежат резонансным кривым $\gamma_2, \gamma_3^{(n)}, \gamma_4^{(n)}$ ($n = 1, 2$). В этом случае достаточное условие устойчивости записывается [21, 22] в виде неравенства $\sigma \neq 0$.



Фиг. 7

Вычисления показали, что существует кривая, на которой это условие не выполнено. Кривая $\sigma = 0$ состоит из двух участков $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$. Участок $\sigma^{(1)}$ расположен вблизи вершины P_2 . Он начинается в точке $P_8(0.512643, 0.487357)$ отрезка P_1P_2 и при $\theta \rightarrow 0.5$ сколь угодно близко подходит к точке P_2 , оставаясь между отрезком P_1P_2 и резонансной кривой $\gamma_4^{(1)}$. Участок $\sigma^{(2)}$ располагается между резонансными кривыми $\gamma_3^{(1)}$ и γ_2 и соединяет вершины P_1 и P_2 треугольника $P_1P_2P_3$. На фиг. 7 участок $\sigma^{(2)}$ изображен штриховой линией, участок $\sigma^{(1)}$ на фиг. 7 не показан.

6.4. *Результаты нелинейного анализа.* Фиг. 7 иллюстрирует описанные выше результаты нелинейного анализа устойчивости периодического движения твердого тела, соответствующего решению Стеклова второго типа уравнений Эйлера – Пуассона. На кривой $\gamma_3^{(1)}$ резонанса третьего порядка и на участке P_1P_7 кривой γ_2 резонанса второго порядка движение орбитально неустойчиво. На участке $\sigma^{(2)}$ (а также на не показанном на фиг. 7 участке $\sigma^{(1)}$) кривой $\sigma = 0$ и в точке P_7 кривой γ_2 вопрос об устойчивости остался открытым. Для остальных значений параметров θ_b, θ_c , лежащих внутри треугольника $P_1P_2P_3$, периодические движения Стеклова второго типа орбитально устойчивы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (НШ – 1477.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стеглов В.А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1899. Т. 10. Вып. 1. С. 1–3.

2. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
3. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера – Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 167 с.
4. Кузьмин П.А. Дополнение к случаю В.А. Стеклова движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 2. С. 243–245.
5. Кузьмин П.А. Частные виды движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки (в трудах русских ученых) // Тр. Казан. авиац. ин-та. 1953. Т. 27. С. 91–121.
6. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
7. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Исследование решения В.А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Математическая физика. Киев: Наук. думка, 1968. Вып. 5. С. 194–202.
8. Богоявленский А.А. О частных случаях движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 5. С. 622–645.
9. Богоявленский А.А. О некоторых частных решениях задачи движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 6. С. 738–749.
10. Горячев Д.Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1899. Т. 10. Вып. 1. С. 23–24.
11. Чаплыгин С.А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1904. Т. 12. Вып. 1. С. 1–4.
12. Kowalewski N. Eine neue particuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Annalen. 1908. Bd. 65. S. 528–537.
13. Харламов П.В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 26–34.
14. Кудряшова Л.В., Мозалевская Г.В. Об одном классе решений задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Математическая физика. Киев: Наук. думка, 1968. Вып. 5. С. 139–150.
15. Маркеев А.П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 929–938.
16. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
17. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
18. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 591 с.
19. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
20. Кучер Е.Ю. Характеристические показатели периодических решений Стеклова и Чаплыгина // Механика твердого тела. Донецк: Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, 2003. Вып. 33. С. 33–39.
21. Маркеев А.П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 6. С. 3–12.
22. Маркеев А.П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.

Москва

Поступила в редакцию
26.04.2004