

УДК 533.6.013.42

© 2005 г. В. В. БОЛОТИН, А. В. ПЕТРОВСКИЙ, В. П. РАДИН

### **УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОГОСТУПЕНЧАТОЙ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Рассматривается многоступенчатая система твердых тел, звенья (ступени) которой нагружены мертвыми силами (силы инерции), заднее звено нагружено на конце следящей силой (сила тяги), направленной вдоль оси нижнего звена. Звенья соединены между собой при помощи вязкоупругих элементов, характеристики которых предполагаются линейными. Главные оси соединений ортогональны между собой, в ненагруженном состоянии плоскости этих осей (главные плоскости) ортогональны осям звеньев системы и параллельны между собой. В ненагруженном состоянии оси повернуты в главных плоскостях относительно друг друга. Исследована устойчивость тривиального решения задачи, когда отклонение продольных осей звеньев от вектора ускорения центра масс системы равно нулю. Построены границы областей дивергенции и флаттера. Проведен численный анализ послекритического поведения системы, в частности, проведено исследование ее динамического поведения при медленно меняющейся силе тяги. Этот анализ позволил выявить типы динамического поведения, обнаружить бифуркации режимов и области хаотического поведения системы.

Поведение упругих систем под действием непотенциальных (в частности, следящих) сил изучено достаточно подробно [1–6]. Однако здесь имеется еще немало вопросов, представляющих интерес с точки зрения нелинейной динамики. Одной из таких задач является задача о динамическом поведении системы твердых тел (ступеней), связанных между собой вязкоупругими элементами, при нагружении мертвыми и следящими силами. Примером мертвых сил могут быть силы инерции (при неизменном направлении вектора ускорения центра масс). Следящая сила – это сила тяги. В этой системе возможны квазистатический (дивергенция) и динамический (флаттер) типы потери устойчивости. Представляет интерес исследование сочетания этих типов. Здесь возможно явление вторичного флаттера в области дивергенции, впервые обнаруженное для аэроупругих систем [7] и в дальнейшем подробно изученное [8–10]. В данной статье проводится полный систематический анализ как равновесных состояний типа дивергенции, так и движений в области флаттера системы из трех ступеней. Основное внимание уделяется исследованию устойчивости направления вектора ускорения центра масс системы.

1. Рассмотрим систему трех последовательно соединенных твердых тел (звеньев, ступеней ракетно-космической системы). Пусть в невозмущенном (устойчивом) состоянии центр масс системы движется по прямой линии в заданном направлении с заданным ускорением. Это движение будем называть невозмущенным. Введем фиксированную систему координат  $OX_1X_2X_3(X)$ , связанную с невозмущенным движением. Ось  $X_3$  направим параллельно вектору ускорения центра масс системы. Начало координат выберем в центре масс. В этой системе координат каждое звено нагружено

в центре его массы даламберовой силой инерции  $P_j = -aM_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ;  $a$  – ускорение,  $M_j$  – массы тел). Примем нумерацию, начиная от заднего звена. Силы  $P_j$  являются мертвыми (потенциальными). Кроме этих сил, на свободном конце заднего звена действует следующая сила (сила тяги)  $Q$ .

Наряду с глобальной системой координат  $X$ , для каждого звена введем жестко связанную с ним систему  $OY_1Y_2Y_3(Y)$ . В ненагруженном состоянии оси обеих систем совпадают. Векторы будем задавать компонентами либо в системе  $X$ , либо в системе  $Y$ ; на используемую систему будет указывать нижний индекс  $X$  или  $Y$ .

Предположим, что звенья системы связаны между собой так, что любой взаимный поворот звеньев можно представить как последовательность двух поворотов вокруг осей  $Y_1$  и  $Y_2$ . Пусть сначала происходит поворот вокруг  $Y_1$ , а затем – вокруг новой оси  $Y_2$ . Аналогично переход от глобальной к жестко связанной со звеном системе координат происходит в результате поворота сначала вокруг оси  $X_1$ , а затем – вокруг новой оси  $X_2$ . Углы поворота  $X \rightarrow Y$  обозначим:  $\varphi_1, \varphi_2$  – для первого звена,  $\varphi_3, \varphi_4$  – для второго и  $\varphi_5, \varphi_6$  – для третьего. Преобразование от глобальной системы координат к жестко связанной с  $j$ -м звеном системе координат можно представить матрицей [11]:

$$H(\varphi_k, \varphi_{k+1}) = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{k+1} & \sin \varphi_k \sin \varphi_{k+1} & -\cos \varphi_k \sin \varphi_{k+1} \\ 0 & \cos \varphi_k & \sin \varphi_k \\ \sin \varphi_{k+1} & -\sin \varphi_k \cos \varphi_{k+1} & \cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 3, 5) \quad (1.1)$$

Векторы абсолютных угловых скоростей звеньев определяются соотношениями

$$\omega_{jY} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{2j} & 0 & -\sin \varphi_{2j} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_{2j} & 0 & \cos \varphi_{2j} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_{2j-1} \\ \dot{\varphi}_{2j} \\ 0 \end{vmatrix} = W(\varphi_{2j}) \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_{2j-1} \\ \dot{\varphi}_{2j} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$W(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, 3)$$

Пусть  $L_j$  – длина  $j$ -го звена,  $\gamma_j L_j$  ( $0 < \gamma_j < 1$ ) – расстояние от крайней задней точки до центра масс звена. Для невозмущенной системы расстояние от крайней задней точки системы до ее центра масс равно

$$z_c = \frac{M_1 \gamma_1 L_1 + M_2 (L_1 + \gamma_2 L_2) + M_3 (L_1 + L_2 + \gamma_3 L_3)}{M_1 + M_2 + M_3} \quad (1.3)$$

Рассмотрим возмущенное движение системы относительно глобальной (неинерциальной) системы координат  $X$ . Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий звеньев. Кинетическая энергия каждого звена равна сумме кинетических энергий относительного поступательного движения его центра масс и вращения вокруг центра масс. Мера инерционности вращения задается тензором (матрицей) моментов инерции  $I_j = \|I_{kl}^{(j)}\|$  в системе координат  $Y$  относительно центра масс звена:

$$2T = \sum_{j=1}^3 (\omega_{jY}, I_j \omega_{jY}) + \sum_{j=1}^3 M_j v_j^2, \quad v_j = |\mathbf{v}_j| \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{v}_j$  – вектор относительной скорости центра масс  $j$ -го звена. Векторы  $\mathbf{v}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) не являются независимыми. Их можно выразить через вектор относительной скорости центра масс всей системы  $\mathbf{v}_c = \|\mathbf{v}_{1c} \ \mathbf{v}_{1c} \ \mathbf{v}_{1c}\|^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1X} &= \mathbf{v}_{cX} + (L_1 - z_c) \mathbf{H}^T(\varphi_3, \varphi_4) [\omega_{2Y} \times \mathbf{e}_{2Y}] + (1 - \gamma_1) L_1 \mathbf{H}^T(\varphi_1, \varphi_2) [\omega_{1Y} \times \mathbf{e}_{1Y}] \\ \mathbf{v}_{2X} &= \mathbf{v}_{cX} + (L_1 + \gamma_2 L_2 - z_c) \mathbf{H}^T(\varphi_3, \varphi_4) [\omega_{2Y} \times \mathbf{e}_{2Y}] \\ \mathbf{v}_{3X} &= \mathbf{v}_{cX} + (L_1 + L_2 - z_c) \mathbf{H}^T(\varphi_3, \varphi_4) [\omega_{2Y} \times \mathbf{e}_{2Y}] + \gamma_3 L_3 \mathbf{H}^T(\varphi_5, \varphi_6) [\omega_{3Y} \times \mathbf{e}_{3Y}] \\ \mathbf{e}_{kY} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (1.5)$$

Векторы  $\mathbf{e}_{kY}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) в формулах (1.5) – это единичные векторы, направленные по оси  $Y_3$  каждого звена.

Кинетическая энергия (1.4) может быть записана как однородная квадратичная форма обобщенных скоростей  $\dot{\phi}_k, v_{cX}$ :

$$2T = (\mathbf{p}, \mathbf{A}\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & \dots & \dot{\phi}_6 & v_{1cX} & v_{2cX} & v_{3cX} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_\phi + \mathbf{A}_v$$

$$\mathbf{A}_\phi(\varphi) = \begin{bmatrix} W^T(\varphi_2) \mathbf{I}_1 \mathbf{W}(\varphi_2) & & & & & \\ & W^T(\varphi_4) \mathbf{I}_2 \mathbf{W}(\varphi_4) & & & 0 & \\ & & W^T(\varphi_6) \mathbf{I}_3 \mathbf{W}(\varphi_6) & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_v = \|a_{jk}\|, \quad a_{jk} = a_{kj}$$

$$a_{11} = (1 - \gamma_1)^2 M_1 L_1^2 \cos^2 \varphi_2, \quad a_{12} = 0$$

$$a_{13} = \frac{(1 - \gamma_1) M_1 L_1 [(1 - \gamma_1) M_1 L_1 - (\gamma_2 M_2 + M_3) L_2 - \gamma_3 M_3 L_3] \cos \varphi_2 \cos \varphi_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

$$a_{14} = \frac{(1 - \gamma_1) M_1 L_1 [(1 - \gamma_1) M_1 L_1 - (\gamma_2 M_2 + M_3) L_2 - \gamma_3 M_3 L_3] \cos \varphi_2 \sin \varphi_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

$$a_{15} = a_{16} = a_{17} = 0, \quad a_{18} = -(1 - \gamma_1) M_1 L_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad a_{19} = -(1 - \gamma_1) M_1 L_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$a_{22} = (1 - \gamma_1)^2 M_1 L_1^2$$

$$a_{23} = \frac{(1 - \gamma_1) M_1 L_1 [-(1 - \gamma_1) M_1 L_1 + (\gamma_2 M_2 + M_3) L_2 + \gamma_3 M_3 L_3] \sin \varphi_2 \cos \varphi_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

$$a_{24} = \frac{(1 - \gamma_1) M_1 L_1}{M_1 + M_2 + M_3} [(1 - \gamma_1) M_1 L_1 - (\gamma_2 M_2 + M_3) L_2 - \gamma_3 M_3 L_3] \times$$

$$\times [\sin \varphi_2 \sin \varphi_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \cos \varphi_2 \cos \varphi_4], \quad a_{25} = a_{26} = 0$$

$$a_{27} = (1 - \gamma_1)M_1L_1 \cos \varphi_2, \quad a_{28} = (1 - \gamma_1)M_1L_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$a_{29} = -(1 - \gamma_1)M_1L_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$a_{33} = \frac{\cos^2 \varphi_4}{(M_1 + M_2 + M_3)^2} \{ M_1 [(1 - \gamma_1)M_1L_1 - (\gamma_2M_2 + M_3)L_2 - \gamma_3M_3L_3]^2 + \\ + M_2 [(1 - \gamma_1)M_1L_1 + \gamma_2M_1L_2 - (1 - \gamma_2)M_3L_2 - \gamma_3M_3L_3]^2 + \\ + M_3 [(1 - \gamma_1)M_1L_1 + (M_1 + M_2)L_2 - \gamma_2M_2L_2 - \gamma_3M_3L_3]^2 \}, \quad a_{34} = 0$$

$$a_{35} = -\frac{\gamma_3M_3L_3 \cos \varphi_4 \cos \varphi_6 \cos(\varphi_3 - \varphi_5)}{M_1 + M_2 + M_3} [(1 - \gamma_1)M_1L_1 + (M_1 + M_2)L_2 - \gamma_2M_2L_2 - \gamma_3M_3L_3]$$

$$a_{36} = \frac{\gamma_3M_3L_3 \cos \varphi_4 \sin \varphi_6 \sin(\varphi_3 - \varphi_5)}{M_1 + M_2 + M_3} \times \\ \times [(1 - \gamma_1)M_1L_1 + (M_1 + M_2)L_2 - \gamma_2M_2L_2 - \gamma_3M_3L_3], \quad a_{37} = a_{38} = 0$$

$$a_{39} = -\frac{\cos \varphi_3 \cos \varphi_4}{M_1 + M_2 + M_3} \{ M_1 [(1 - \gamma_1)M_1L_1 - (\gamma_2M_2 + M_3)L_2 - \gamma_3M_3L_3] - \\ - M_2 [(1 - \gamma_1)M_1L_1 + \gamma_2M_1L_2 - (1 - \gamma_2)M_3L_2 - \gamma_3M_3L_3]^2 - \\ - M_3 [(1 - \gamma_1)M_1L_1 + (M_1 + M_2)L_2 - \gamma_2M_2L_2 - \gamma_3M_3L_3]^2 \}$$

Движение описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, 6), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{v}_{jcx}} = Q_{6+j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

Обобщенные силы  $Q_j$  представляют собой суммы сил

$$Q_j = Q_{jc} + Q_{jd} + Q_{jp} + Q_{jq}$$

$$\begin{pmatrix} Q_{1c} \\ \vdots \\ Q_{6c} \end{pmatrix} = -\mathbf{C}(\varphi_1, \dots, \varphi_6) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_{1d} \\ \vdots \\ Q_{6d} \end{pmatrix} = -\mathbf{B}(\varphi_1, \dots, \varphi_6) \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_6 \end{pmatrix}$$

$$Q_{7c} = Q_{8c} = Q_{9c} = 0, \quad Q_{7d} = Q_{8d} = Q_{9d} = 0$$

$$Q_{1p} = a(1 - \gamma_1)M_1L_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad Q_{2p} = a(1 - \gamma)M_1L_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$$Q_{3p} = a[(1 - \gamma_1)M_1L_1 - \gamma_3M_3L_3] \sin \varphi_3 \cos \varphi_4$$

$$Q_{4p} = a[(1 - \gamma_1)M_1L_1 - \gamma_3M_3L_3] \cos \varphi_3 \sin \varphi_4$$

$$Q_{5p} = a\gamma_3M_3L_3 \sin \varphi_5 \cos \varphi_6, \quad Q_{6p} = a\gamma_3M_3L_3 \cos \varphi_5 \sin \varphi_6$$

$$Q_{7p} = Q_{8p} = 0, \quad Q_{9p} = -a(M_1 + M_2 + M_3)$$

$$Q_{1q} = -Q\gamma_1L_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (1 + \cos \varphi_1), \quad Q_{2q} = Q\gamma_1L_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$Q_{3Q} = Q \frac{[(1 - \gamma_1)M_1 L_1 - \gamma_2 M_2 L_2 - M_3(L_2 + \gamma_3 L_3)] \cos \varphi_2 \cos \varphi_4 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

$$Q_{4Q} = -Q \frac{[(1 - \gamma_1)M_1 L_1 - \gamma_2 M_2 L_2 - M_3(L_2 + \gamma_3 L_3)]}{M_1 + M_2 + M_3} [\cos \varphi_2 \sin \varphi_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - \sin \varphi_2 \cos \varphi_4]$$

$$Q_{5Q} = Q_{6Q} = 0, \quad Q_{7Q} = Q \sin \varphi_2, \quad Q_{8Q} = -Q \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$Q_{9Q} = Q \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

где  $Q_{jc}$ ,  $Q_{jd}$  – упругие и диссипативные силы;  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}$  – матрицы жесткости и демпфирования соединений звеньев;  $Q_{jP}$ ,  $Q_{jQ}$  – обобщенные силы, соответствующие даламберовым силам инерции  $P_j$  и следящей силе  $Q$ . Обобщенные силы  $Q_{jP}$ ,  $Q_{jQ}$  определяются через мощности даламберовых сил инерции и следящей силы  $Q$  (мощность равна скалярному произведению силы на вектор скорости точки приложения силы)

$$Q_{jg} = (mgl/2)[f_j(\mathbf{q}) + g_j(\mathbf{q})], \quad Q_{jP} = Plf_j(\mathbf{q}), \quad Q_{jQ} = -Qlh_j(\mathbf{q}) \quad (1.7)$$

$$f_1(\mathbf{q}) = \cos q_1 \sin q_2 \cos q_4 + \sin q_1 (\cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 + \cos q_3 - \sin q_3 \sin q_4)$$

$$f_2(\mathbf{q}) = \cos q_1 \sin q_2 \cos q_3 \cos q_4 + \sin q_1 \cos q_2 \cos q_4$$

$$f_3(\mathbf{q}) = \cos q_1 (\cos q_2 \cos q_3 \cos q_4 + \cos q_3 \sin q_4 + \sin q_3)$$

$$f_4(\mathbf{q}) = \cos q_1 (\cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 + \sin q_3 \cos q_4) - \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4$$

$$g_1(\mathbf{q}) = 2 \sin q_1 \cos q_3, \quad g_3(\mathbf{q}) = 2 \cos q_1 \sin q_3, \quad g_2(\mathbf{q}) = g_4(\mathbf{q}) = 0$$

$$h_1(\mathbf{q}) = \sin q_2 \cos q_3 \cos q_4, \quad h_3(\mathbf{q}) = \sin q_4, \quad h_2(\mathbf{q}) = h_4(\mathbf{q}) = 0$$

Подставим (1.3), (1.5) и (1.7) в уравнения (1.6) и введем безразмерные параметры  $c_j = \sigma_j c$ ,  $\omega_0^2 = 12c/ml^2$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\varepsilon_j = 12b_j/ml^2 \omega_0$ ,  $\alpha = Pl/c$ ,  $\beta = Ql/c$ ,  $\gamma = mgl/2c$ , где  $c$  – характерная жесткость (например, минимальная из  $c_j$ ). В результате получим следующие уравнения движения:

$$a_{jk}(\mathbf{q})q_k'' + \varepsilon_j q_j' + \sigma_j q_j + \left[ \frac{\partial a_{jl}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right] q_k' q_l' -$$

$$-(\alpha + \gamma)f_j(\mathbf{q}) - \gamma g_j(\mathbf{q}) + \beta h_j(\mathbf{q}) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.8)$$

Здесь по дважды повторяющимся индексам  $k$  и  $l$  подразумевается суммирование от 1 до 4, по индексу  $j$  нет суммирования. Штрихи обозначают производные по безразмерному времени  $\tau$ .

2. Исследуем устойчивость тривиального решения уравнений (1.8)  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$ . Линеаризованные уравнения распадаются на две независимые одногиперные подсистемы, описывающие плоские возмущения

$$\mathbf{A}\xi'' + \mathbf{B}\xi' + [\mathbf{C} - (\alpha + \gamma)\mathbf{F} - \gamma\mathbf{G} + \beta\mathbf{H}]\xi = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2), \quad (b_1, b_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{или} \quad (\varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

$$\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2), \quad (c_1, c_2) = (\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{или} \quad (\sigma_3, \sigma_4)$$

где  $\xi$  – вектор с компонентами  $q_1, q_2$  или  $q_3, q_4$ .

Таким образом, потеря устойчивости происходит в одной из главных плоскостей ( $X_1X_3$  или  $X_2X_3$ ). Она может быть либо квазистатической (дивергенция), либо динамической (флаттер). Характеристическое уравнение для подсистемы (2.1):

$$\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \quad p_1 = (b_1 + 8b_2)/7 \quad (2.2)$$

$$p_2 = (4c_1 + 32c_2 - 28\gamma + b_1b_2 - 20\alpha - 10\beta)/28$$

$$p_3 = [c_1b_2 + c_2b_1 - \gamma(b_1 + 4b_2) - \alpha(b_1 + 2b_2)]/28 \quad (2.3)$$

$$p_4 = [\alpha^2 + \alpha(\beta - c_1 - 2c_2 + 4\gamma) + \beta\gamma + c_1(c_2 - \gamma) - \gamma(2c_2 - 3\gamma)]/28$$

имеет в области устойчивости только корни с отрицательными действительными частями. По критерию Рауса–Гурвица необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$p_1 > 0, \quad p_3 > 0, \quad p_4 > 0, \quad H = p_3(p_1p_2 - p_3) - p_1^2p_4 > 0 \quad (2.4)$$

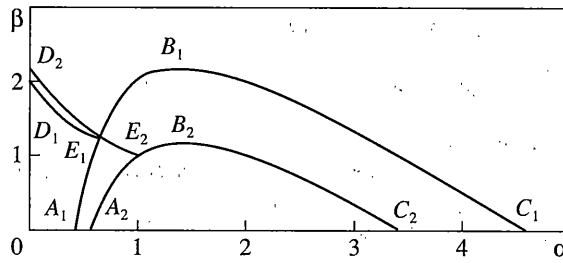
Первое из неравенств (2.4) выполняется всегда, остальные определяют область устойчивости тривиального равновесия. Нарушение неравенства  $p_4 > 0$  приводит к потере устойчивости по типу дивергенции. Неравенство  $p_3 > 0$  выполняется при  $\alpha < \alpha_* = [c_1b_2 + c_2b_1 - \gamma(b_1 + 4b_2)]/(b_1 + 2b_2)$ . Кривая  $H(\alpha, \beta) = 0$  ( $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$ ) ограничивает снизу область первичного флаттера. Границы областей дивергенции и флаттера пересекаются при значениях параметров  $\beta = \beta_* = [\gamma(4c_2 - 3\gamma) - c_1(c_2 - \gamma) + \alpha_*(c_1 + 2c_2 - 4\gamma) - \alpha_*^2]/(\alpha_* + \gamma)$ ,  $\alpha = \alpha_*$ . В этой точке характеристическое уравнение (2.2) имеет два нулевых корня.

На фиг. 1 представлены границы областей устойчивости тривиальных решений уравнений (2.1), соответствующие двум главным плоскостям системы с параметрами  $(\sigma_1, \dots, \sigma_4) = (1, 2, 2, 1)$ ,  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4) = (0.05, 0.25, 0.25, 0.05)$ ,  $\gamma = 0$ ,  $a = 0.05$ . Параболы  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  ограничивают области дивергенции, кривые  $D_1E_1$  и  $D_2E_2$  – области флаттера подсистем. В точках  $E_1$  и  $E_2$  характеристическое уравнение (2.2) имеет нулевой корень кратности два. Тривиальное равновесие системы устойчиво в области  $A_1E_1D_1$ . При пересечении границы  $A_1E_1$  происходит статическая потеря устойчивости, при пересечении границы  $D_1E_1$  – динамическая. Первичная потеря устойчивости происходит в плоскости обобщенных координат  $q_1, q_2$ . Справа от точки  $E_1$ , в зависимости от величины следящей силы  $\beta$ , система может находиться в состоянии либо нетривиального плоского равновесия (дивергенция), либо движения (флаттер). Формы флаттера могут быть как плоскими, так и пространственными. Анализ послекритических состояний возможен только на основе нелинейных уравнений (1.8).

Нетривиальные состояния равновесия в области дивергенции описываются статическими решениями системы (1.8). Они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} -c_1x_1 + c_2x_2 + (\alpha + 3\gamma)\sin x_1 - \beta\sin x_2 &= 0 \\ c_2x_2 - (\alpha + \gamma)\sin(x_1 + x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $(x_1, x_2) = (q_1, q_2)$  или  $(q_3, q_4)$ ,  $(c_1, c_2) = (\sigma_1, \sigma_2)$  или  $(\sigma_3, \sigma_4)$ . Состояния равновесия развиваются в плоскости минимальной жесткости.



Фиг. 1

Состояния равновесия отыскивались численно. Из уравнений (2.5) определялись параметры  $\beta$  и  $x_1$  при заданных  $0 \leq \alpha \leq 5$  и  $0 \leq x_1 + x_2 \leq \pi$ . При этом в системе *MATLAB* формировалась сетка (матрица) значений  $(\alpha, x_1 + x_2)$ , покрывающая заданную область. Затем вычислялась соответствующая матрица значений  $x_2$  (а, следовательно, и  $x_1$ ), определенная вторым уравнением (2.5). После этого из первого уравнения определялась матрица значений  $\beta$ . При каждом значении  $\alpha$  множество состояний равновесия определяется неравенством  $0 \leq \beta \leq \beta_{\max}$ , где  $\beta_{\max}$  – максимальное из всех найденных значений  $\beta$  при заданном  $\alpha$ . Все множество значений  $\beta_{\max}$ , соответствующих различным  $\alpha$ , образует верхнюю границу области существования состояний равновесия.

Для исследования устойчивости плоских форм равновесия рассмотрим возмущенные состояния  $\tilde{q}_j(t) = q_j + \xi_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), где два из четырех значений  $q_j$  ( $q_3, q_4$  или  $q_1, q_2$ ) равны нулю, остальные два удовлетворяют уравнениям (2.5). Относительно вариаций  $\xi_j$  получим две независимые подсистемы уравнений, отвечающие потере устойчивости без выхода и с выходом из плоскости первоначальной равновесной формы

$$A_j(x)\xi_j'' + B_j(x)\xi_j' + C_j(x)\xi_j = 0 \quad (j = 1, 2)$$

$$A_1(x) = \begin{vmatrix} 12\cos q_2 + 20 & 6\cos q_2 + 4 \\ 6\cos q_2 + 4 & 4 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

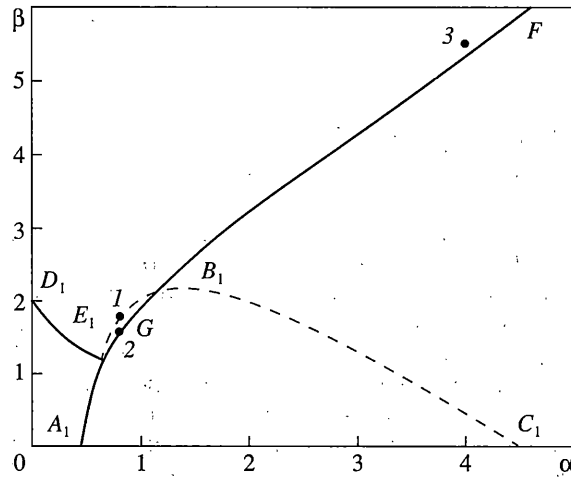
$$A_2(x) = \begin{vmatrix} 4\cos^2 q_2 + 12\cos q_2 + a\sin^2 q_2 + 16 & 4\cos q_2 + 6 \\ 4\cos q_2 + 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$C_{1,2}(x, \alpha, \beta) = \begin{Bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \text{diag}(\sigma_3, \sigma_4) \end{Bmatrix} - (\alpha + \gamma)F_{1,2}(x) - \gamma G_{1,2}(x) + \beta H_{1,2}(x)$$

$$F_1(x) = \begin{vmatrix} \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \\ \cos(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

$$F_2(x) = \begin{vmatrix} \cos q_1(1 + \cos q_2) & \cos q_1 \\ \cos q_1 & \cos(q_1 + q_2) \end{vmatrix}$$

$$G_1(x) = G_2(x) = \begin{vmatrix} 2\cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Фиг. 2

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \cos q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xi_1 = \|\xi_1, \xi_2\|^T, \quad \xi_2 = \|\xi_3, \xi_4\|^T, \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) = \text{diag}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

$$\mathbf{x} = \|x_1, x_2\|^T = \|q_1, q_2\|^T \quad \text{или} \quad \|q_3, q_4\|^T$$

Матрицы  $\mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{F}_j$ ,  $\mathbf{G}_j$ ,  $\mathbf{H}_j$  записаны для случая  $\mathbf{x} = \|q_1, q_2\|^T$ . В случае  $\mathbf{x} = \|q_3, q_4\|^T$  эти матрицы более громоздки и здесь не приводятся.

Каждой из двух подсистем (2.6) отвечает характеристическое уравнение вида (2.2). Коэффициенты характеристических уравнений были получены средствами компьютерной алгебры. Проверка выполнения критерия Рауса–Гурвица для всех состояний равновесия, описываемых уравнениями (2.5), проводилась численно в системе MATLAB. Результаты анализа положений равновесия системы с параметрами, соответствующими фиг. 1, представлены на фиг. 2. Линия  $A_1E_1F$  является верхней границей области дивергенции по параметру  $\beta$ . В области  $G$  наблюдается вторичный флаттер. Это явление впервые было обнаружено в задаче о панельном флаттере [7].

3. Послекритическое поведение исследовалось численным интегрированием уравнений (1.8). Исследовалась область параметров нагружения до значений  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 7$ . Весьма существенным вопросом является задание начальных условий. Если в начальный момент времени задать нулевые значения координат и скоростей в одной из главных плоскостей, система вырождается в систему с двумя степенями свободы. Плоская форма движения в дальнейшем сохраняется, так как при численном интегрировании два уравнения из четырех на каждом шаге дают тривиальный результат. Исследование движений в плоскости первичной потери устойчивости ( $q_3 = q_4 = 0$ ) обнаружило, что они всегда выходят на периодические режимы (пределные циклы). При некоторых значениях  $\alpha$  и  $\beta$  плоские движения оказываются неустойчивыми.

Плоские периодические движения описываются уравнениями, вытекающими из (1.8) при  $q_3 = q_4 \equiv 0$ :

$$a_{jk}(\mathbf{q})q_k'' + \varepsilon_j \dot{q}_j' + \sigma_j q_j + d_{jkl} q_k' \dot{q}_l' - (\alpha + \gamma) f_j(\mathbf{q}) - \gamma g_j(\mathbf{q}) + \beta h_j(\mathbf{q}) = 0 \quad (j, k, l = 1, 2)$$

$$a_{11} = 12 \cos q_{12} + 20, \quad a_{12} = a_{21} = 6 \cos q_2 + 4, \quad a_{22} = 4$$



$$\begin{aligned}
 d_{111} &= d_{112} = d_{222} = 0, & d_{211} &= -d_{122} = 6 \sin q_2 \\
 d_{212} &= -d_{221} = 3 \sin q_2, & d_{121} &= -12 \sin q_2 \\
 f_1 &= \sin(q_1 + q_2) + \sin q_1, & f_2 &= \sin(q_1 + q_2) \\
 g_1 &= 2 \sin q_1, & g_2 &= 0, & h_1 &= \sin q_2, & h_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Для исследования устойчивости этих движений составим уравнения относительно возмущений  $\xi_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). В первом порядке по  $\xi_j$  они имеют вид (2.6), но элементы матриц  $B_j$  и  $C_j$  нужно дополнить слагаемыми, содержащими скорости и ускорения невозмущенного движения. Система (2.6) имеет блочно-диагональную структуру, вследствие чего возмущения в плоскости и из плоскости первоначального движения не влияют друг на друга. Устойчивость по отношению к возмущениям в плоскости очевидна: в противном случае было бы невозможно численно получить установившиеся периодические движения. Поэтому нужно исследовать лишь поведение возмущений из плоскости первоначального движения, удовлетворяющих второй паре уравнений (2.6):

$$A(q)\xi'' + B(q, q')\xi' + C(q, q', q'')\xi = 0 \tag{3.2}$$

$$A(q) = A_2(q)$$

$$B(q, q') = - \begin{vmatrix} \varepsilon_3 \cdot 0 \\ 0 & \varepsilon_4 \end{vmatrix} + \sin q_2 \begin{vmatrix} q_2'(12 + 8 \cos q_2 - 2a \cos q_1) & a(q_1' + q_2') \\ 8q_2' - a(q_1' + q_2') & 0 \end{vmatrix}$$

$$C(q, q', q'') = C_2(q) + \sin q_2 \begin{vmatrix} -q_1''[(4-a)\cos q_2 + 6] & (4-a)(q_1'' + q_2'') \\ -4q_1'' & 6q_1'' \end{vmatrix} -$$

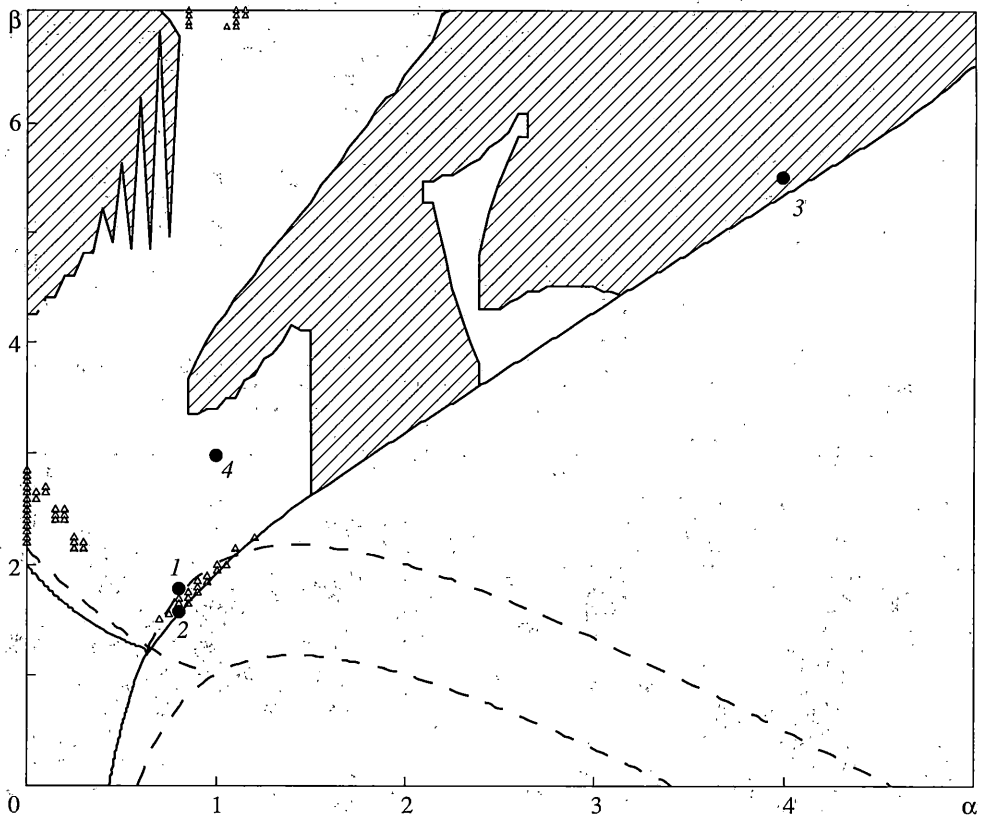
$$-q_1'' \begin{vmatrix} (4-a)\cos^2 q_2 + 12\cos q_2 + 16 - a & (4-a)\cos(q_2 + 6) \\ (4-a)\cos q_2 + 6 & 6\cos q_2 + 4 - a \end{vmatrix} -$$

$$-q_1'q_2' \begin{vmatrix} 8\cos^2 q_2 + 12\cos q_2 - a\cos 2q_2 & (8-2a)\cos q_2 \\ (8-a)\cos q_2 & 8-2a \end{vmatrix} - q_2'' \begin{vmatrix} 0 & (4-a)\cos q_2 \\ 0 & (4-a) \end{vmatrix}$$

Здесь  $\xi = \|\xi_3, \xi_4\|^T$  – вектор возмущений из плоскости первоначального движения, матрицы  $A_2$  и  $C_2$  определены в (2.7).

Таким образом, задача сводится к исследованию устойчивости тривиального решения уравнения с периодическими коэффициентами (3.2). Применим теорию Флоке Ляпунова [11]. Будем вычислять матрицу монодромии и определять ее собственные значения (мультипликаторы). Плоская форма движения будет устойчивой, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы, и неустойчивой, если модуль хотя бы одного мультипликатора превысит единицу. Заметим, что вариации движения являются дополнительными степенями свободы. При этом среди мультипликаторов нет строго единичных вдали от точек первичной бифуркации системы [12].

Численная реализация состояла в следующем. При заданных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  проводилось численное интегрирование системы уравнений (3.1) до установления периодического режима. Затем вычислялся период колебаний, после чего матрица



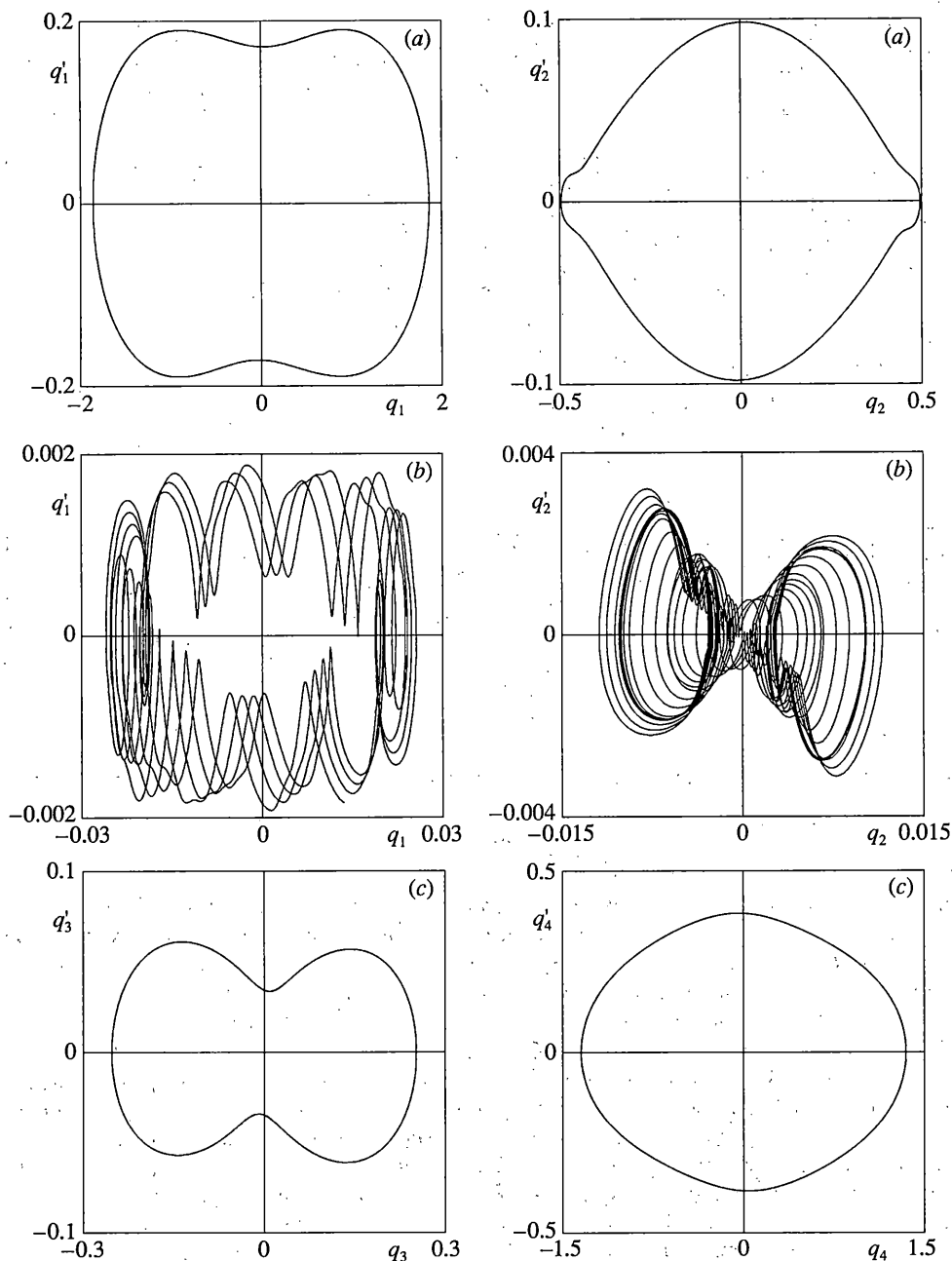
Фиг. 3

монодромии вычислялась путем интегрирования системы уравнений (3.2) в течение первого периода. Система приводилась к нормальной форме Коши. Искомым объектом в этой системе является матрицант, который в начале периода равен единичной матрице. Матрица монодромии есть значение матрицанта в конце периода. Далее вычислялись собственные значения матрицы монодромии (мультипликаторы).

На фиг. 3 точки, принадлежащие области неустойчивости периодических движений в плоскости первичной потери устойчивости, отмечены сеткой. Характерны существование островков устойчивости и неустойчивости в окружении альтернативной области и полосовое чередование областей в левом верхнем углу графика. Для полной уверенности в достоверности результатов, представленных на фиг. 3, был проведен дополнительный вычислительный эксперимент. В нем при выборочных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  интегрировались уравнения (1.8) при  $q_3 = q_4 = 0$  до установления периодического режима, после чего задавались малые возмущения из плоскости первоначального движения, и интегрирование продолжалось. Результаты эксперимента контролировались по реализациям и фазовым портретам решений.

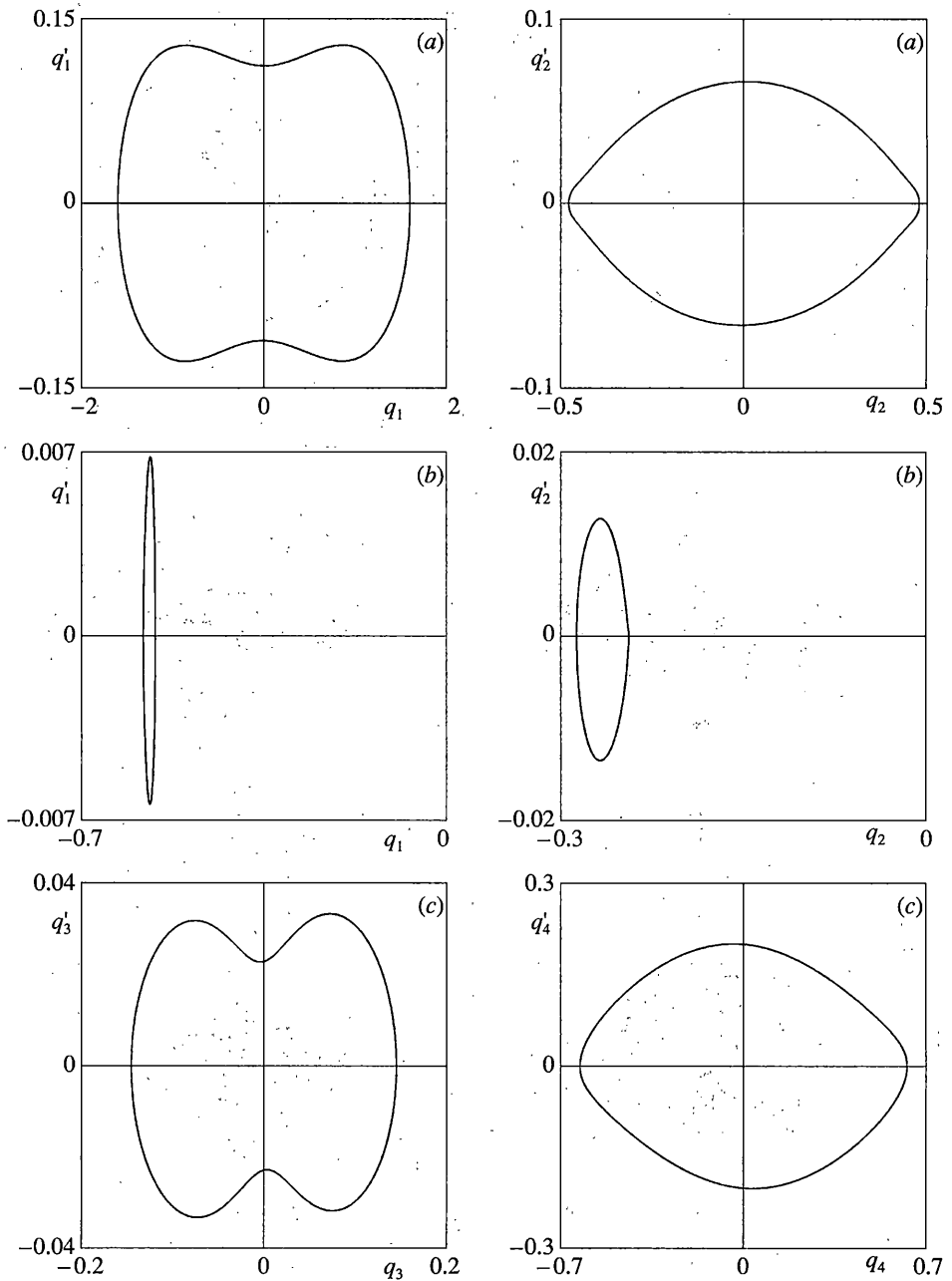
Иллюстрация типов послекритического поведения системы дается на фиг. 4–6, где представлены фазовые портреты для трех точек 1, 2 и 3 (см. фиг. 2), взятых соответственно вблизи границы неустойчивости в областях первичного и вторичного флаттера и в дальней закритической области.

Фазовые портреты на фиг. 4–6,а получены при задании плоского начального отклонения ( $q_1 = 0.1, q_2 = 0.2$  при нулевых начальных скоростях) в плоскости первичной



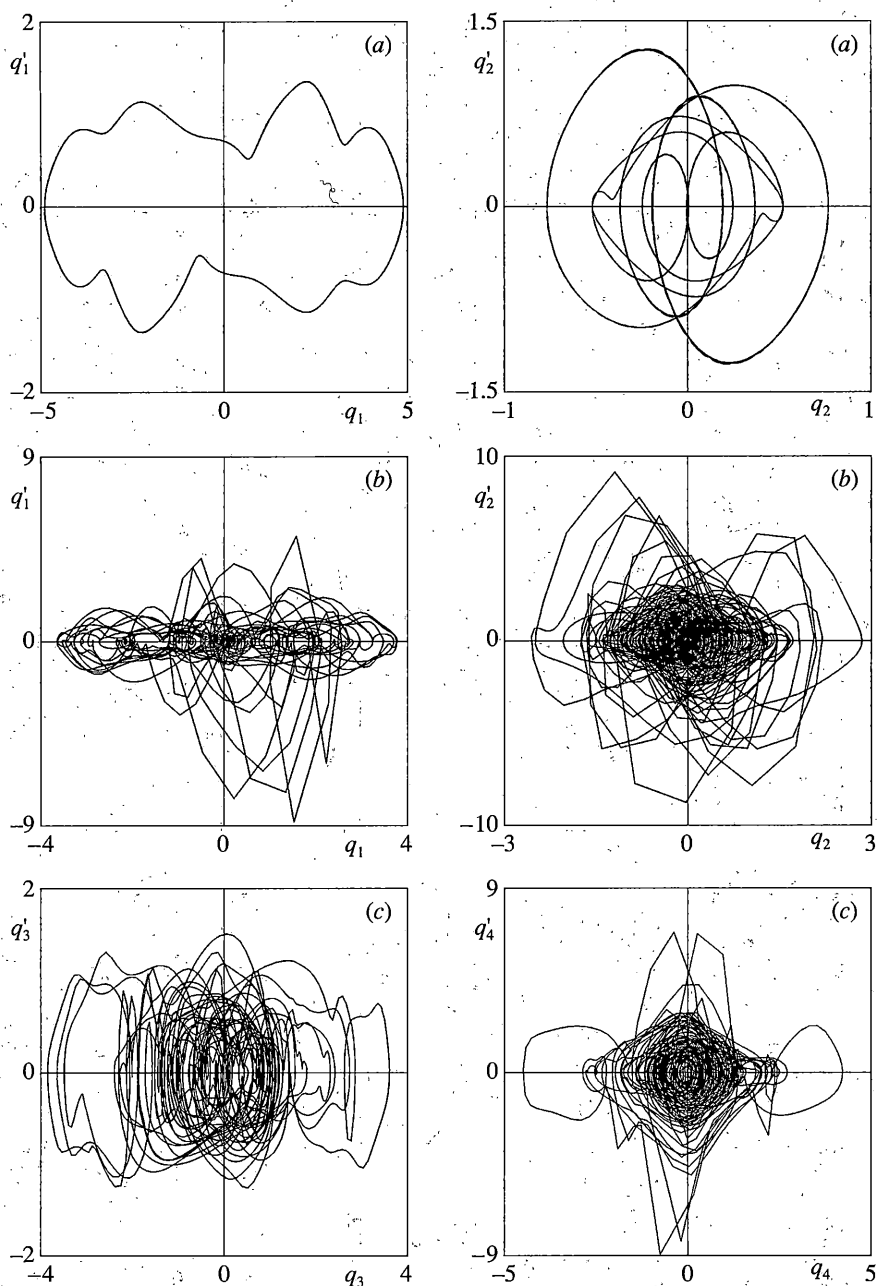
Фиг. 4

потери устойчивости. По мере удаления от границы области флаттера  $D_1E_1$  (фиг. 1, 2) предельные циклы становятся более сложными. Остальные фазовые портреты на фиг. 4–6 получены при тех же самых начальных значениях  $q_1$  и  $q_2$  и при  $q_3 = 0.01$ ,  $q_4 = 0.02$ . Вблизи к границе области первичной неустойчивости точка 1 и 2 движение остается периодическим, но происходит перекачка энергии от координат  $q_1$ ,  $q_2$



Фиг. 5

к координатам  $q_3, q_4$ . Предельные циклы по  $q_3$  и  $q_4$  весьма похожи на предельные циклы плоского движения. Колебания по координатам  $q_1$  и  $q_2$  происходят с существенно меньшей амплитудой и существенно большей частотой. В области вторичного флаттера (точка 2 на фиг. 2) колебания в плоскости первичной потери устойчивости (координаты  $q_1, q_2$ ) происходят вблизи динамически неустойчивого положения равновесия.



Фиг. 6

Два симметричных положения равновесия находятся из уравнений (2.5). В точке 2 (фиг. 2) им соответствуют  $(q_1; q_2) = \pm(0.5295; 0.2932)$ . На фиг. 5, b видно, что предельные циклы по координатам  $q_1$  и  $q_2$  охватывают положение равновесия с  $(q_1; q_2) = -(0.5295; 0.2932)$ . Колебания могли бы происходить и вблизи другого (симметричного) положения равновесия. Это зависит от начальных условий. Совсем иной характер имеет движе-

ние в близкой к точке 2 точке 1, находящейся в области первичного флаттера (фиг. 4,б). В этой точке существует единственное динамически неустойчивое (тривиальное) положение равновесия. Колебания по  $q_1, q_2$  в точке 1, в отличие от точки 2, имеют нерегулярный характер. Предельные циклы на фиг. 4,б охватывают тривиальное положение равновесия. В дальней закритической области (точка 3 на фиг. 2) характер колебаний – хаотический. Аттракторы, представленные на фиг. 6,б и с – типично хаотические с редкими выбросами по координатам и скоростям. Распределение энергии между степенями свободы приближается к равномерному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00656) и Минобразования РФ (проект 205.02.01.022).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. О колебаниях и устойчивости стержней, нагруженных неконсервативными силами // Колебания в турбомашинах. М.: Изд. АН СССР, 1959. С. 23–42.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Int. J. Solid Struct. 1969. V. 5. № 9. P. 965–989.
4. Жинжер Н.И. Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 1. С. 149–155.
5. Jin J.-D. Bifurcation analysis of double pendulum with a follower force // J. Sound Vibr. 1992. V. 154. № 2. P.191–204.
6. Kounadis A.N. On the failure of static stability analyses of nonconservative systems in regions of divergence instability // Int. J. Solids and Structures. 1994. V. 31. № 15. P. 2099–2120.
7. Bolotin V.V., Petrovsky A.V., Grishko A.A. Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic nonlinear system in the divergence domain // J. Sound Vibr. 1996. V. 191. № 3. P. 431–451.
8. Гришко А.А., Петровский А.В., Радин В.П. О влиянии внутреннего трения на устойчивость панели в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 173–181.
9. Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Gantes Ch. Non-linear panel flutter in remote post-critical domain // Int. J. Non-Linear Mechanics // 1998. V. 33. № 5. P. 753–764.
10. Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Gantes Ch., Roberts J.B. Influence of initial conditions on the postcritical behavior of nonlinear aeroelastic system // J. Nonlinear Dynamics. 1998. № 15. P. 63–81.
11. Петровский А.В. Устойчивость и послекритическое поведение обращенного пространственного маятника при непотенциальном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 165–176.
12. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. 2-е изд. / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
13. Гришко А.А., Дубовских Ю.А., Петровский А.В. О послекритическом поведении диссипативных нелинейных систем // Прикладная механика. 1998. Т. 34. № 6. С. 92–98.

Москва

Поступила в редакцию  
27.04.2004