

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается устойчивость тонких пластин и пологих оболочек, лежащих на упругом основании и находящихся под действием безмоментных начальных усилий. Основание моделируется изотропным упругим полупространством. В соответствии с принципом локальности граничные условия на контуре пластины или оболочки не ставятся, а критическая нагрузка определяется из условия существования двоякопериодического решения. Проводится сравнение с задачей локальной устойчивости пологих оболочек при отсутствии упругого основания.

1. Введение. Обсудим сначала возможности локального подхода к задачам о потере устойчивости тонких пологих оболочек под действием безмоментных докритических усилий при отсутствии упругого основания. При локальном подходе рассматривается система уравнений с постоянными коэффициентами и прогиб w отыскивается в виде двоякопериодической

$$w(x_1, x_2) = w_0 \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \quad (1.1)$$

(или периодической) функции. Критическая нагрузка определяется в результате минимизации собственного значения задачи по волновым числам k_1, k_2 , определяющим форму прогиба. При этом граничные условия не принимаются во внимание. В [1] при таких допущениях решена задача в случае отсутствия начальных усилий сдвига, а в [2] рассмотрен общий случай локальной потери устойчивости пологих оболочек.

Локальный подход дает полезную информацию при решении многих задач теории устойчивости оболочек. Приближенным методом “замораживания” коэффициентов произвольную задачу устойчивости безмоментного напряженного состояния выпуклой оболочки можно свести к системе с постоянными коэффициентами, а затем использовать результаты по локальной потере устойчивости. К таким задачам относится, например, задача о потере устойчивости эллипсоида вращения под действием внешнего или внутреннего нормального давления. Показано [3], что критическая нагрузка λ_0 , определенная при локальном подходе, служит хорошим первым приближением для точного значения критической нагрузки λ , которое в ряде задач может быть представлено в виде асимптотического ряда

$$\lambda = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \dots, \quad \mu \approx \sqrt{h_*}, \quad h_* = h/R \quad (1.2)$$

по параметру тонкостенности μ (h – толщина оболочки, R – характерный радиус кривизны).

Локальный подход может быть использован при анализе устойчивости выпуклых оболочек, а также цилиндрических и конических оболочек при осевом сжатии. Для оболочек отрицательной гауссовой кривизны; а также для цилиндрических и конических оболочек под действием внешнего нормального давления и/или кручения локальный подход неприменим. В этих задачах при локальном подходе получаем $\lambda_0 = 0$, а форма потери устойчивости простирается от одного края оболочки до другого, что

влечет за собой необходимость удовлетворения граничным условиям. Также неприменим локальный подход и при анализе устойчивости пластин, у которых форма потери устойчивости существенно зависит от размеров и формы контура пластины.

Пусть рассматриваемая задача устойчивости пологой оболочки принадлежит области применимости локального подхода. Рассмотрим вопрос о влиянии граничных условий на критическую нагрузку. В случае прямоугольной области при отсутствии кручения локальное решение (1.1) удовлетворяет условиям шарнирного опирания. Показано [3], что в случае более жестких граничных условий (например, для жесткой заделки краев) критическая нагрузка лишь на малую величину порядка h_* может превосходить значение λ_0 . Если же края оболочки закреплены слабо, имеет место существенное снижение критической нагрузки по сравнению со значением λ_0 . При этом форма потери устойчивости локализуется в окрестности слабо закрепленного края и имеет вид, отличный от (1.1). Случаи слабого закрепления краев оболочки описаны в [4, 5] (см. также [3]).

Присутствие упругого основания существенно меняет описанные выше результаты. При наличии основания локальный подход, позволяющий игнорировать граничные условия, оказывается применимым как для пластин, так и для оболочек нулевой и отрицательной гауссовой кривизны в предположении, что жесткость основания не слишком мала. В [6] содержится детальное исследование устойчивости оболочек с упругим наполнителем и приводится обширная библиография. Ниже результаты локального подхода сравниваются с решениями, полученными в [6] при удовлетворении граничных условий на контуре оболочки.

2. Устойчивость пластины на упругом основании. Основание и пластину считаем упругими однородными и изотропными с упругими параметрами (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) E_0, ν_0 и E, ν соответственно. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, совместив плоскость $x_3 = 0$ с границей пластины и основания. Считаем, что основание занимает полупространство $x_3 \leq 0$, а пластина занимает слой $0 \leq x_3 \leq h$ толщины h . Пусть в плоскости пластины действуют начальные условия T_1^0, T_2^0 , причем усилие $T_1^0 < 0$ является сжимающим, а $T_2^0 \geq T_1^0$. Общий случай присутствия начальных усилий сдвига S^0 сводится к рассматриваемому поворотом осей Ox_1 и Ox_2 вокруг оси Ox_3 . Считаем, что начальные напряжения в основании отсутствуют, а пластина находится в жестком контакте с основанием.

Рассмотрим сначала деформацию основания. Пусть смещения точек плоскости $x_3 = 0$ равны

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2) &= u_i^0 \cos(k_i x_i) \sin(k_j x_j) \quad (i, j = 1, 2, \quad i \neq j) \\ u_3(x_1, x_2) &= u_3^0 \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u_n^0, n = 1, 2, 3$ – амплитуды тангенциальных и нормального смещений. В [6] найдено решение уравнений равновесия основания, затухающее при $x_3 \rightarrow -\infty$. При этом напряжения в плоскости $x_3 = 0$ равны

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= \frac{E_0}{k} ((a_2 k_i^2 + a_4 k_j^2) u_i^0 + a_1 k_1 k_2 u_j^0 + a_3 k k_1 u_3^0) \cos(k_i x_i) \sin(k_j x_j) \\ \sigma_{33} &= E_0 (a_3 (k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0) + k a_2 u_3^0) \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \quad (i, j = 1, 2, \quad i \neq j) \\ k &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)}, \quad a_4 = \frac{1}{2(1 + \nu_0)}, \quad a_2 = a_1 + a_4, \quad a_3 = a_4 - a_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Средняя потенциальная энергия основания Π_0 , отнесенная к единице площади пластины, равна

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \langle \sigma_{13} u_1 + \sigma_{23} u_2 + \sigma_{33} u_3 \rangle = \frac{E_0}{8} \left(\frac{a_2 k_1^2 + a_4 k_2^2}{k} (u_1^0)^2 + \frac{2a_1 k_1 k_2}{k} u_1^0 u_2^0 + \frac{a_2 k_2^2 + a_4 k_1^2}{k} (u_2^0)^2 + 2a_3 u_3^0 (k_1 u_1^0 + k_2 u_2^0) + k a_2 (u_3^0)^2 \right) \quad (2.3)$$

В [6] показано, что формулами (2.2) можно пользоваться и для основания конечной толщины H , если $H \geq 1.5 L$, где $L = \pi/k$ – длина полуволны деформации при потере устойчивости.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа – Лява перемещения точек пластины примем в виде

$$\begin{aligned} u_3 &= A \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \\ u_i &= (h_0 - x_3) A k_i \cos(k_i x_i) \sin(k_j x_j) \quad (i, j = 1, 2, \quad i \neq j) \end{aligned} \quad (2.4)$$

При отсутствии основания

$$h_0 = h/2 \quad (2.5)$$

При наличии основания равенство (2.5) нарушается, однако для мягкого основания равенство (2.5) выполняется приближенно.

Условия жесткого контакта пластины и основания дают $u_1^0 = k_1 h_0 A$, $u_2^0 = k_2 h_0 A$, $u_3^0 = A$ и выражение (2.3) принимает вид

$$\Pi_0 = \frac{E_0 A^2 k}{8} (a_1 (1 - h_0 k)^2 + a_4 (1 + h_0 k)^2) \quad (2.6)$$

Пренебрегая малой величиной $h_0 k$ по сравнению с единицей, получим приближенно

$$\Pi_0 = \frac{E_0 A^2 k}{8} a_2 \quad (2.7)$$

Плотность $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ энергии упругой деформации пластины запишем в виде

$$\Phi = \sigma_1^0 \varepsilon_1 + \sigma_2^0 \varepsilon_2 + \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \left(\varepsilon_1^2 + 2\nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1 - \nu}{2} \varepsilon_{12}^2 \right) \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_i = (x_3 - h_0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, 2), \quad \varepsilon_{12} = (x_3 - h_0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.9)$$

где $\varepsilon_i, \varepsilon_{12}$ – дополнительные деформации при потере устойчивости.

Интегрируя выражение (2.8) по толщине пластины и вычисляя среднее значение по ее площади, в сумме с (2.6) находим среднюю плотность энергии

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 \quad (2.10)$$

$$\Pi_1 = -q A^2 B_1, \quad B_1 = -\frac{1}{8} h (\sigma_1^0 k_1^2 + \sigma_2^0 k_2^2), \quad q > 0 \quad (2.11)$$

$$\Pi_2 = \frac{E A^2 h k^4}{8(1 - \nu^2)} \left(\frac{h^2}{3} - h_0 h + h_0^2 \right)$$

Здесь q – формальный параметр нагружения. Найдем сначала минимум (2.10) по h_0 . От h_0 зависят только слагаемые Π_0 и Π_2 . Получаем

$$\min_{h_0} \{\Pi_0 + \Pi_2\} = B_0 A^2, \quad h_0 = \frac{h(1 + 2b_3 r^2)}{2(1 + b_2 r)}, \quad b_i = \frac{E_0(1 - \nu^2)}{E} a_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.12)$$

$$B_0 = Dk^4 \frac{1 + 4b_2 r + 12(b_2 r^3 + b_3 r^2 + b_1 b_4 r^4)}{8(1 + b_2 r)}, \quad D = \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad r = \frac{1}{kh} = \frac{L}{\pi h}$$

Параметр r пропорционален отношению длины полуволны деформации L к толщине h пластины. При малой жесткости основания $b_k \ll 1$, $r \gg 1$.

Критическое значение q_* параметра нагружения q определяем при минимизации по волновым числам функции $f(k_1, k_2)$:

$$q_* = \min_{k_1, k_2} f(k_1, k_2) = f(k_1^*, k_2^*), \quad f(k_1, k_2) = \frac{B_1}{B_0} \quad (2.13)$$

При $q_* > 1$ устойчивость не теряется, значение $q_* < 1$ соответствует закритической стадии нагружения.

Если $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 < 0$, функция $f(k_1, k_2)$ зависит только от $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ и критической нагрузке соответствует множество форм потери устойчивости при $k = \text{const}$.

Если $\sigma_1^0 < 0$ и $\sigma_1^0 < \sigma_2^0$, то вмятины вытянуты в направлении x_2 , причем $k_2^* = 0$, т.е. реализуется цилиндрический изгиб.

3. Приближенное решение и оценка погрешности. Пусть $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = -\sigma^0 < 0$. Критическое напряжение σ_*^0 находим из соотношений (2.13) и (2.11) при $q_* = 1$:

$$\sigma_*^0 = \min_r \frac{8B_0}{rk^2} \quad (3.1)$$

Сохраняя в B_0 лишь главные слагаемые ($B_0 \approx Dk^4(1 + 12b_2 r^3)/8$), получим приближенно

$$\frac{\sigma_*^0}{E} = \frac{1}{4(1 - \nu^2)r_*^2} = \frac{1}{4(1 - \nu^2)^{1/3}} \left(\frac{12(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)} \right)^{2/3} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{2/3} \quad (3.2)$$

$$r_* = (6b_2)^{-1/3} = \left(\frac{(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)E}{12(1 - \nu_0)(1 - \nu^2)E_0} \right)^{1/3}$$

Приближенные решения (3.1) и (3.2) сравним с точным решением. Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma^0 \Delta u_i = 0, \quad \Delta u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ii} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{ii} + \lambda(\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk}) \quad (i \neq j \neq k), \quad \sigma_{ij} = \mu\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе, а ε_{ij} – деформации.

После разделения переменных (2.1) система (3.3) может быть записана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= \mu(u_i' + k_i u_3) \quad (i = 1, 2), \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)u_3' - \lambda(k_1 u_1 + k_2 u_2) \\ \sigma_{i3}' - ((\lambda + 2\mu)k_i^2 + \mu k_j^2 - \sigma^0 k^2)u_i - (\lambda + \mu)k_1 k_2 u_j + \lambda k_i u_3' &= 0 \quad (i \neq j) \\ \sigma_{33}' - (\mu - \sigma^0)k^2 u_3 - \mu(k_1 u_1' + k_2 u_2') &= 0, \quad (\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

содержащей в качестве неизвестных функций $u_i, \sigma_{i3}, \sigma_{33}$, непрерывные при переходе от основания к пластине.

Путем введения новых неизвестных функций

$$v = \frac{k_1 u_1 + k_2 u_2}{k}, \quad w = \frac{k_2 u_1 - k_1 u_2}{k}, \quad s = \frac{k_1 \sigma_{13} + k_2 \sigma_{23}}{k}, \quad t = \frac{k_2 \sigma_{13} - k_1 \sigma_{23}}{k} \quad (3.5)$$

система (3.4) расщепляется на две независимых системы 2-го и 4-го порядков

$$t' - k^2(\mu - \sigma^0)w = 0, \quad \mu w' = t \quad (3.6)$$

$$s' = (\lambda + 2\mu - \sigma^0)k^2 v - \lambda k u_3', \quad s = \mu(v' + k u_3') \quad (3.7)$$

$$\sigma_{33}' = (\mu - \sigma^0)k^2 u_3 + \mu k v', \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)u_3' - \lambda k v$$

В рассматриваемой задаче устойчивости система (3.6) имеет лишь нулевое решение, а критическое значение нагрузки σ_*^0 находим из системы (3.7). Заметим, что эта система содержит только параметр k и не зависит от волновых чисел k_1 и k_2 по отдельности. Отсюда следует, что критической нагрузке соответствует множество форм потери устойчивости, для которых $k_1^2 + k_2^2 = \text{const}$.

Пренебрегая начальными напряжениями в основании ($\sigma^0 = 0$), находим решение системы (3.7) для основания, затухающее при $x_3 \rightarrow -\infty$ и содержащее две произвольные постоянные v_0 и u_{30} :

$$\begin{aligned} v(x_3) &= (v_0 + a_5(u_{30} - v_0)kx_3)e^{kx_3} \\ s(x_3) &= E_0 k(2a_2 v_0 + 2a_3 u_{30} + a_1(u_{30} - v_0)kx_3)e^{kx_3} \\ u_3(x_3) &= (u_{30} + a_5(u_{30} - v_0)kx_3)e^{kx_3} \\ \sigma_{33}(x_3) &= E_0 k(2a_2 u_{30} + a_1 v_0 + a_1(u_{30} - v_0)kx_3)e^{kx_3} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $a_5 = 1/(3 - 4\nu_0)$, а остальные a_j те же, что и в формулах (2.2). Беря начальные условия при $x_3 = 0$ из (3.8), строим двухпараметрическое семейство решений системы (3.7) для пластины при $0 \leq x_3 \leq h$:

$$\begin{aligned} v(x_3) &= v_0 v^{(1)}(x_3) + u_{30} v^{(2)}(x_3), \quad u_3(x_3) = v_0 u_3^{(1)}(x_3) + u_{30} u_3^{(2)}(x_3) \\ s(x_3) &= v_0 s^{(1)}(x_3) + u_{30} s^{(2)}(x_3), \quad \sigma_{33}(x_3) = v_0 \sigma_{33}^{(1)}(x_3) + u_{30} \sigma_{33}^{(2)}(x_3) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Удовлетворяя условиям $s(h) = \sigma_{33}(h) = 0$ на свободной поверхности $x_3 = h$, получаем уравнение для определения критической нагрузки в виде

$$\Delta(\sigma^0, k) = s^{(1)}(h)\sigma_{33}^{(2)}(h) - s^{(2)}(h)\sigma_{33}^{(1)}(h) = 0 \quad (3.10)$$

Таблица

1	2	3	4	5	6
E_0/E	r_*	σ_*^0/E	r_*	σ_*^0/E	σ_*^0/E
3.0	0.05	0.3308	0.47	0.8723	2.0639
1.0	0.06	0.3308	0.67	0.6048	0.8834
0.3	0.69	0.2624	1.01	0.2710	0.3513
0.1	1.27	0.1376	1.45	0.1303	0.1552
0.03	2.06	0.0620	2.17	0.0584	0.0652
0.01	3.06	0.0295	3.13	0.0281	0.0302
0.003	4.63	0.0130	4.67	0.0126	0.0132
0.001	6.71	0.00621	6.74	0.00605	0.00624
0.0003	10.40	0.00276	10.07	0.00271	0.00277
0.0001	14.53	0.00132	14.52	0.00130	0.00132

Пусть $\sigma^0(k)$ – наименьший положительный корень уравнения (3.10). Тогда критическое значение σ_*^0 напряжения σ^0 равно

$$\sigma_*^0 = \min_k \sigma^0(k) = \sigma^0(k_*) \tag{3.11}$$

В таблице представлена зависимость безразмерных критической нагрузки σ_*^0/E и параметра $r_* = 1/(k_*h)$ от безразмерной жесткости основания E_0/E при $\nu = \nu_0 = 0.3$. В столбцах 2 и 3 приведены точные результаты, полученные по формуле (3.11).

В столбцах 4 и 5 таблицы приведены значения, полученные по приближенным формулам (3.2), а столбце 6 – по более точной формуле (3.1). Сравнение со столбцами 2 и 3 позволяет судить о величине погрешности, которую вносит применение гипотезы прямой нормали для пластины.

Более точная формула (3.1) незначительно уточняет критическую нагрузку по сравнению с формулой (3.2) лишь для весьма мягкого основания. Для основания умеренной жесткости формула (3.2) дает уже более точное значение, чем формула (3.1). Поэтому ниже при рассмотрении пологих оболочек будем использовать допущения, приводящие к формуле (3.2). Для прогиба $w = u_3(x_1, x_2)$ вида (2.4) реакция p основания равна (см. также [6, 7]):

$$p = -E_0 a_2 k w, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \tag{3.12}$$

что соответствует винклеровскому основанию с коэффициентом постели, зависящим от волнообразования.

4. Локальная устойчивость пологой оболочки на упругом основании. Исходим из системы уравнений пологих оболочек

$$-D\Delta\Delta w + \Delta_T w + \Delta_R \Phi + p/R = 0, \quad (Eh)^{-1} \Delta\Delta\Phi + \Delta_R w = 0 \tag{4.1}$$

$$\Delta_T w = T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_R w = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \tag{4.2}$$

где Φ – функция усилий, p – реакция основания (3.12), T_i^0, S^0 – безмоментные начальные усилия, R_1, R_2 – радиусы кривизны срединной поверхности оболочки. Нагружение считаем однопараметрическим с параметром нагружения $\lambda > 0$, который вводим по формулам

$$\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda\{t_1, t_2, t_3\} \quad (4.3)$$

где величины t_i считаем безразмерными и имеющими порядок единицы. При этом пренебрегаем начальными напряжениями в основании (заполнителе).

При локальном подходе решение системы (4.1) ищем в виде

$$w(x_1, x_2) = w_0 e^{iz}, \quad \Phi(x_1, x_2) = \Phi_0 e^{iz}, \quad z = (k_1 x_1 + k_2 x_2)/R \quad (4.4)$$

где $R > 0$ – характерный радиус кривизны. После подстановки решения (4.4) в систему (4.1) получаем явное выражение параметра $\lambda = \lambda(k_1, k_2)$ как функцию волновых чисел k_1 и k_2 . В безразмерных переменных имеем

$$\Lambda = \frac{\lambda}{Eh} = f(k, \varphi) = \frac{\mu^4 k^4 + e\mu^{-2}k + f_R(\varphi)}{k^2 f_T(\varphi)}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad e = \frac{E_0 a_2}{E\sqrt{12(1-\nu^2)}} \quad (4.5)$$

$$f_R(\varphi) = (\rho_2 \cos^2 \varphi + \rho_1 \sin^2 \varphi)^2, \quad f_T(\varphi) = t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \sin \varphi \cos \varphi + t_2 \sin^2 \varphi \quad (4.6)$$

$$k_1 = k \cos \varphi, \quad k_2 = k \sin \varphi, \quad \rho_1 = R/R_1, \quad \rho_2 = R/R_2$$

Критическое значение $\lambda = \lambda_*$ получаем после минимизации λ по волновым числам k_1 и k_2 или

$$\Lambda_* = \min_{k, \varphi}^+ f(k, \varphi) = f(k_*, \varphi_*) \quad (4.7)$$

где знак (+) указывает на то, что ищется положительный минимум, а звездочкой отмечаем критические значения соответствующих величин. Предполагается, что величины t_i таковы, что при некоторых значениях угла φ будет $f_T > 0$, т.е. существуют направления, в которых действуют сжимающие начальные усилия. Тогда минимум в (4.7) ищется по тем φ , для которых $f_T > 0$. Функция $f(k, \varphi)$ содержит малый параметр тонкости μ и малый параметр относительной жесткости основания e . В зависимости от соотношения между этими параметрами, а также от вида функций $f_R(\varphi)$ и $f_T(\varphi)$ приходим к обсуждаемым ниже частным случаям.

Область применимости локального приближения ограничена двумя неравенствами: длина полуволны при потере устойчивости $L = \pi R/k$ должна быть существенно больше толщины оболочки h и меньше ее радиуса кривизны R или в безразмерных переменных

$$\mu^2 \ll k^{-1} \ll 1 \quad (4.8)$$

При этом предполагается, что размер оболочки в плане не меньше R , а закрепление краев не является слабым (см. [3]), ибо только в этом случае можно рассчитывать на то, что влияние граничных условий несущественно.

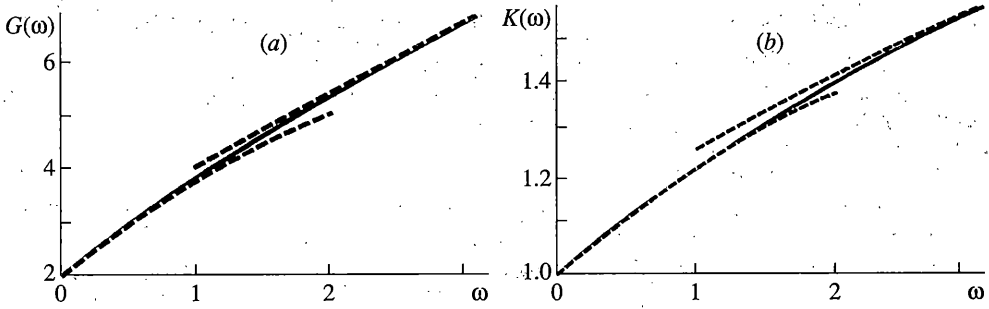
Полагая в формулах (4.5):

$$\Lambda = f(k, \varphi) = \mu^2 g(r, \varphi), \quad k = r\mu^{-1}, \quad e = 2\mu^3 \omega \quad (4.9)$$

приводим функцию f к виду, содержащему один совмещенный параметр ω , введенный в [6]:

$$g(r, \varphi, \omega) = \frac{r^4 + 2\omega r + f_R(\varphi)}{r^2 f_T(\varphi)} \quad (4.10)$$

Переходим к рассмотрению частных случаев.



Фиг. 1

5. Устойчивость сферической оболочки при равномерном внешнем давлении. В этой задаче

$$\rho_1 = \rho_2 = 1, \quad t_1 = t_2 = 1, \quad t_3 = 0, \quad f_R = f_T = 1, \quad g(r) = \frac{r^4 + 2\omega r + 1}{r^2} \quad (5.1)$$

Введем обозначение $G(\omega) = \min_r g(r, \omega)$. При $\omega = 0$ упругое основание отсутствует и $G(0) = 2$, что соответствует классической формуле [8] $\Lambda_* = 2\mu^2$ или $T_1^0 = T_2^0 = -2Eh\mu^2$. При $\omega \ll 1$ влияние основания относительно мало и может быть оценено по приближенным формулам

$$g_* = G(\omega) = 2 + 2\omega\left(1 - \frac{\omega}{8}\right) + O(\omega^3), \quad r_* = K(\omega) = 1 + \frac{\omega}{4}\left(1 - \frac{\omega}{8}\right) + O(\omega^3) \quad (5.2)$$

При $\omega \gg 1$ жесткость основания играет большую роль, чем кривизна оболочки, и имеют место приближенные формулы

$$g_* = G(\omega) = 3\omega^{2/3} + \omega^{-2/3} + O(\omega^{-2}), \quad r_* = K(\omega) = \omega^{1/3} + (3\omega)^{-1} \quad (5.3)$$

при этом первые слагаемые в (5.3) дают результаты, совпадающие с формулами (3.1), (3.2) для пластины, а вторые – учитывают кривизну оболочки. Функции $G(\omega)$ и $K(\omega)$ показаны на фиг. 1 сплошными линиями, а приближенные выражения (5.2) и (5.3) – штриховыми линиями. Области применимости приближенных формул (5.2) и (5.3) с погрешностью 4% перекрываются.

Как и для пластины, волновые числа при потере устойчивости остаются неопределенными, причем $k_1^2 + k_2^2 = k_*^2$.

В [6] для параметров критической нагрузки $G(\omega)$ и волнообразования $K(\omega)$ получены приближенные формулы, которые пригодны для всех значений ω и в принятых здесь обозначениях имеют вид

$$G(\omega) = (2 + 3r(\omega)\omega)/(K(\omega))^2, \quad K(\omega) = (1 + \omega^{4/3})^{1/4} \quad (5.4)$$

При $\omega \ll 1$ и при $\omega \gg 1$ формулы (5.4) имеет меньшую точность, чем формулы (5.2) и (5.3).

6. Устойчивость выпуклых оболочек. Пусть сначала существует особый угол $\varphi = \varphi^*$, при котором функция $f_R(\varphi)$ минимальна, а функция $f_T(\varphi)$ максимальна. Тогда при $\varphi = \varphi^*$

после минимизации функции (4.10) по параметру r получаем

$$g_*(\omega) = \min_r g(r, \varphi_*, \omega) = \frac{\sqrt{f_R^*}}{f_T^*} G(\omega_1), \quad \omega_1 = \frac{\omega}{(f_R^*)^{3/4}}, \quad r_*(\omega) = K(\omega_1)(f_R^*)^{1/4} \quad (6.1)$$

где $f_R^* = f_R(\varphi^*)$, $f_T^* = f_T(\varphi^*)$, а функции $G(\omega)$ и $K(\omega)$ те же, что и в п. 5 и на фиг. 1.

Пусть теперь особого угла нет. В этом случае задача сводится к минимизации функции (4.10) по двум параметрам r и φ . После минимизации по r аналогично (6.1) получаем

$$g_* = \min_{\varphi} \frac{\sqrt{f_R(\varphi)}}{f_T(\varphi)} G(\omega_1), \quad \omega_1 = \frac{\omega}{(f_R(\varphi))^{3/4}}, \quad r_* = K(\omega_1)(f_R(\varphi))^{1/4} \quad (6.2)$$

где функции $G(\omega)$ и $K(\omega)$ те же, что и в п. 5. При отсутствии основания $\omega = \omega_1 = 0$, а также при $\omega \ll 1$ будет $g_* = 2$. Минимум в (6.2) достигается при $\varphi = \varphi_*^{(0)}$ и равен

$$g_* = 2 \min_{\varphi} \frac{\sqrt{f_R(\varphi)}}{f_T(\varphi)} = 2 \frac{\sqrt{f_R(\varphi_0)}}{f_T(\varphi_0)} \quad (6.3)$$

Для ряда частных случаев величины g_* и φ_0 найдены в работах [1–3]. Для весьма жесткого основания $\omega \gg 1$ можно в (4.10) пренебречь слагаемым $f_R(\varphi)$. В результате в силу асимптотических формул (5.3) получаем

$$g_* = 3\omega^{2/3} \min_{\varphi} \frac{1}{f_T(\varphi)} = \frac{3\omega^{2/3}}{f_T(\varphi_1)}, \quad \Lambda_* = \mu^2 g_* = \frac{3(e/2)^{2/3}}{f_T(\varphi_1)} \quad (6.4)$$

где при $\varphi = \varphi_1$ функция $f_T(\varphi)$ имеет наибольшее значение. Вторая из формул (6.4) совпадает с формулой (3.2) для пластины и справедлива для всех рассматриваемых ниже задач при $\omega \gg 1$.

С ростом ω от нуля до бесконечности критическое значение параметра нагружения g_* растет от значения (6.3) до значения (6.4), а угол φ_* меняется от φ_0 до φ_1 (в зависимости от задачи разность $\varphi_1 - \varphi_0$ может иметь любой знак).

Пример 1. Оболочка под действием сжимающих усилий. Пусть в формулах (4.6) $\rho_1 = 1/3$, $\rho_2 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2/3$, $t_3 = 0$. Тогда в силу формул (6.3) при $\omega \ll 1$ будет $\varphi_0 = \pi/2$, $g_* = 2/3$, а при $\omega \gg 1$ формулы (6.4) дают $\varphi_0 = 0$, $g_1^* = 3\omega^{2/3}$. При $\omega \leq 0.336$ имеем $\varphi_*(\omega) \equiv \pi/2$, а при $\omega \geq 0.608$ будет $\varphi_*(\omega) \equiv 0$. Для промежуточных значений ω график функции $\varphi_*(\omega)$ показан на фиг. 2а.

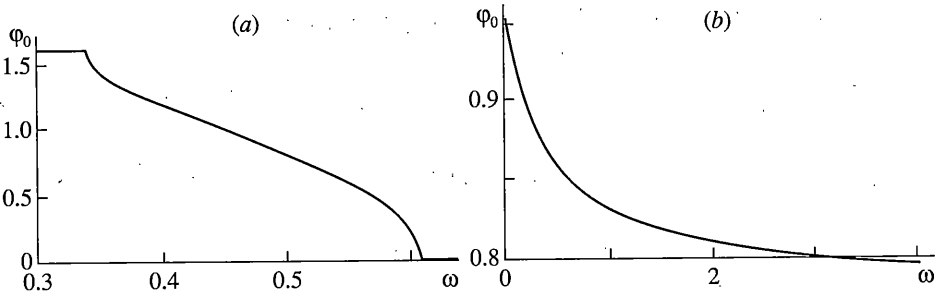
Пример 2. Оболочка под действием усилий сдвига. Пусть в формулах (4.6) $\rho_1 = 1/2$, $\rho_2 = 1$, $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1/2$. Тогда в силу формул (6.3) при $\omega = 0$ имеем $\varphi_0 = \arctg(\sqrt{\rho_2/\rho_1}) = 0.955$ (см. [3]), а при $\omega \rightarrow \infty$ будет $\varphi_* \rightarrow \varphi_0 = \pi/4$.

В примере 1 кривая $\varphi_*(\omega)$ имеет изломы, а в примере 2 она оказывается гладкой (см. фиг. 2, в). После определения $\varphi_*(\omega)$ критические значения $g_*(\omega)$ и $r_*(\omega)$ находим по формулам (6.2).

Пример 3. Цилиндрическая панель при осевом сжатии. В связи со сходством с результатами для выпуклой панели указанная задача рассматривается здесь. Имеем

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = t_3 = 0$$

При отсутствии основания ($\omega = 0$) критической нагрузке $g_* = 2$ отвечает множество форм потери устойчивости (см. [3]). Если же $\omega > 0$, форма потери устойчивости единст-



Фиг. 2

венна, причем

$$\varphi_*(\omega) = 0, \quad g_*(\omega) = G(\omega), \quad r_*(\omega) = K(\omega)$$

где функции $G(\omega)$ и $K(\omega)$ те же, что и в п. 5 и на фиг. 1. Для цилиндрической оболочки при наличии основания форма потери устойчивости осесимметрична.

7. Устойчивость оболочек нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Здесь рассматриваются задачи локальной потери устойчивости оболочек на упругом основании, для которых локальный подход при отсутствии основания неприменим. Это задачи устойчивости цилиндрических оболочек под действием внешнего давления и кручения и все задачи для оболочек отрицательной гауссовой кривизны.

Для цилиндрической оболочки (или панели), находящейся под действием внешнего нормального давления имеем в (4.10), (4.6) $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1, t_1 = t_3 = 0, t_2 = 1$.

Вмятины при потере устойчивости вытянуты в направлении оси x_2 (т.е. $\varphi_* = \pi/2$), а критическая нагрузка определяется из соотношения

$$\Lambda_* = \mu^2 \min_r \{ r^2 + 2\omega r^{-1} \} = 3\mu^2 \omega^{2/3} = 3(\varepsilon/2)^{2/3} \quad (7.1)$$

и равна критической нагрузке для сжатия пластины на упругом основании.

Для цилиндрической оболочки при кручении $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1, t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1$ и формула (4.10) принимает вид

$$g(r, \varphi, \omega) = \frac{r^4 + 2\omega r + \cos^4 \varphi}{2r^2 \sin \varphi \cos \varphi} \quad (7.2)$$

При $\omega \gg 1$ (как и в (6.4)) минимизация функции $g(r, \varphi, \omega)$ по r и φ дает

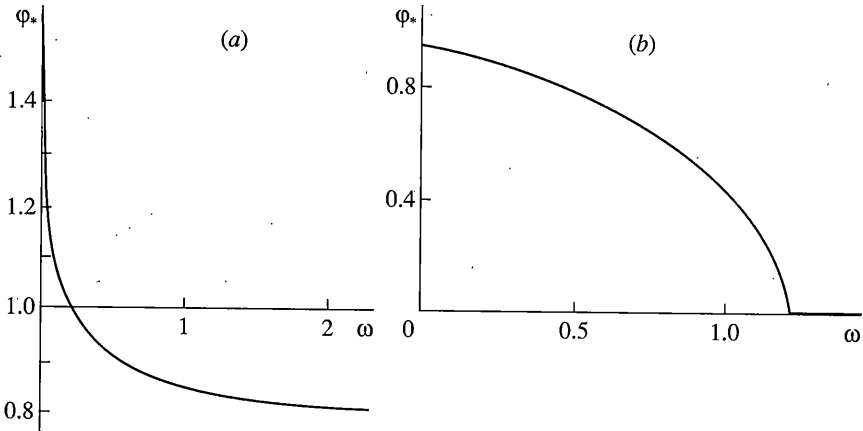
$$g_* = 3\omega^{2/3}, \quad \varphi_* = \varphi_1 = \pi/4, \quad r_* = \omega^{1/3} \quad (7.3)$$

При $\omega \ll 1$ с учетом неравенства $\cos \varphi_* \ll 1$ получаем асимптотические формулы

$$g_* = c_1 \omega^{1/3}, \quad r_* = (5\omega/2)^{1/3}, \quad \varphi_* = \pi/2 - c_2 \omega^{1/3} \quad (7.4)$$

$$c_1 = 2^{2/3} 3^{3/4} 5^{-5/12} = 1.85, \quad c_2 = 2^{-1/3} 3^{1/4} 5^{-1/12} = 1.24$$

Для промежуточных значений параметра ω зависимость $\varphi_*(\omega)$ представлена на фиг. 3 (а), а величины g_* и r_* могут быть найдены для данного $\varphi = \varphi_*$ по формулам (6.1).



Фиг. 3

Для оболочки отрицательной гауссовой кривизны $\rho_1\rho_2 < 0$ и функция $F_R(\varphi) = 0$ при $\varphi = \varphi_* = \pm\varphi_0$, $\varphi_0 = \arctg \sqrt{-\rho_2/\rho_1}$. Пусть φ_1 – точка максимума функции $f_T(\varphi)$, причем $\varphi_1 \neq \pm\varphi_0$. Тогда при $\omega \ll 1$ имеют место асимптотические формулы

$$g_* = \frac{3\omega^{2/3}}{f_T}, \quad r_* = \omega^{1/3}, \quad \varphi_* = \pm\varphi_0 + \frac{3\omega^{4/3} f_T'}{2f_T(f_R')^2} \quad (7.5)$$

где знаки величин φ_1 и $\pm\varphi_0$ совпадают, а функция f_T и производные f_R' и f_T' вычисляются при $\varphi = \pm\varphi_0$. При промежуточных значениях ω угол φ_* изменяется между $\pm\varphi_0$ и φ_1 , а при $\omega \gg 1$ имеет место асимптотическая формула (6.4).

Пример 4. Устойчивость оболочки отрицательной кривизны под действием краевой нагрузки. Пусть

$$\rho_1 = -1/2, \quad \rho_2 = 1, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 1/2, \quad t_3 = 0$$

Тогда $\varphi_0 = \arctg \sqrt{2}$, $\varphi_1 = 0$ и график функции $\varphi_*(\omega)$ показан на фиг. 3, в. Как и в примере 1 функция $\varphi_*(\omega)$ имеет точку излома.

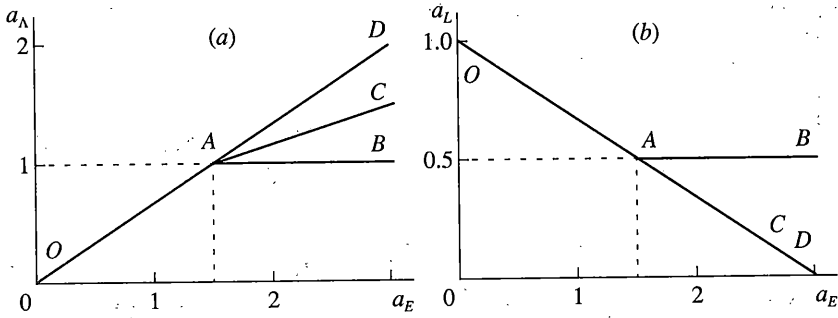
8. Асимптотический портрет. Рассмотрим задачу локальной потери устойчивости оболочки на упругом основании в целом. В полученные в пп. 5–7 оценки параметров критической нагрузки $\Lambda = \sigma_*/E$ и волнообразования $k = \pi R/L$ (L – длина полуволны при потере устойчивости) входят два независимых малых параметра: параметр толщины оболочки $h_* = h/R \sim \mu^2$ и параметр жесткости основания $e \sim E_0/E$. Свяжем их по формуле

$$e = h_*^{a_E} \quad (8.1)$$

и введем показатели a_Λ и a_L , оценивающие порядки величин Λ и L по отношению к параметру тонкостенности h_* :

$$\Lambda \sim h_*^{a_\Lambda}, \quad L \sim h_*^{a_L} \quad (8.2)$$

На фиг. 4 показаны зависимости $a_\Lambda(a_E)$ и $a_L(a_E)$, построенные по полученным выше асимптотическим формулам при $\omega \ll 1$ (мягкое основание) и при $\omega \gg 1$ (жесткое основание). При $\omega \sim 1$ будет $a_E = 3/2$ (точка А на фиг. 4).



Фиг. 4

Для жесткого основания (при $0 < a_E < 3/2$) имеем одни и те же асимптотические формулы (отрезок OA на фиг. 4) для всех рассмотренных выше случаев

$$\Lambda \sim h_*^{2a_E/3} = e^{2/3}, \quad L \sim h_*^{1-a_E/2} = h_* e^{-1/3} \quad (8.3)$$

При этом параметр Λ тот же, что и для пластины, и не зависит от ее толщины, а параметр L в случае пластины в силу (2.12) отнесен к ее толщине. При $a_E \rightarrow 0$ точность локального подхода уменьшается вместе с точностью формулы (3.12) (см. таблицу).

Для мягкого основания (при $a_E > 3/2$) асимптотические формулы для величин Λ и L зависят от знака гауссовой кривизны оболочки и от характера нагружения. Для выпуклых оболочек ($\rho_1 \rho_2 > 0$) и для цилиндрической оболочки при осевом сжатии зависимости $a_\Lambda(a_E)$ и $a_L(a_E)$ показаны на фиг. 4 отрезками AB и совпадают с аналогичными зависимостями при отсутствии основания ($e = 0$).

В остальных случаях при $e = 0$ локальный подход неприменим. При $e > 0$ зависимость $a_\Lambda(a_E)$ для цилиндрической оболочки при кручении показана отрезком AC , а для цилиндрической оболочки при внешнем давлении и для оболочки отрицательной гауссовой кривизны – отрезком AD . Во всех названных здесь случаях (когда локальный подход неприменим при $e = 0$) зависимость $a_L(a_E)$ изображается одним и тем же отрезком AC или AD . Требование $L \ll 1$ (длина полуволны существенно меньше радиуса кривизны и размера оболочки в плане) приводит в этих случаях к ограничению на жесткость основания $a_E < 3$. Если же $a_E \geq 3$, локальный подход неприменим, ибо граничные условия существенно влияют на критическую нагрузку.

Напомним для сравнения (см. [3], [9]), что в этих случаях при $e = 0$ для хорошо закрепленных оболочек средней длины имеют место следующие оценки: для цилиндрической оболочки при внешнем давлении $\Lambda \sim h_*^{3/2}$, $L \sim h_*^{1/4}$, для цилиндрической оболочки при кручении $\Lambda \sim h_*^{5/4}$, $L \sim h_*^{1/4}$, для оболочки отрицательной гауссовой кривизны $\Lambda \sim h_*^{4/3}$, $L \sim h_*^{1/3}$, причем константы в этих оценках зависят от граничных условий и от других факторов.

9. О влиянии начальных напряжений в основании. Выше начальные напряжения в основании не учитывались. Здесь будет показано, что в рассматриваемых задачах их влияние на критическую нагрузку незначительно. Для получения оценки их влияния ограничимся случаем, когда в основании $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = -\sigma^0$ и выполнено условие (4.8). Тогда для вычисления реакции p основания можно воспользоваться системой (3.7);

считая, что при $x_3 = 0$ выполнены условия $v = 0$, $u_3 = u_{30}$, а при $x_3 \rightarrow -\infty$ – условия затухания. В результате вместо формулы (3.12) получаем

$$p(\sigma^0) = \frac{\sigma^0 k q_1}{q_1 q_2 - 1} w, \quad q_1 = \sqrt{1 - \frac{\sigma^0}{\mu}}, \quad q_2 = \sqrt{1 - \frac{\sigma^0}{\lambda + 2\mu}} \quad (9.1)$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе основания, q_1 и q_2 – показатели в затухающем при $x_3 \rightarrow -\infty$ решении системы (3.7):

$$u_3(x_3) = C_1 e^{kq_1 x_3} + C_2 e^{kq_2 x_3} \quad (9.2)$$

Разлагая давление $p(\sigma^0)$ в ряд по σ^0 , получаем

$$p(\sigma^0) = -E_0 k a_2 w \left(1 - a_6 \frac{\sigma^0}{E_0} + O\left(\left(\frac{\sigma^0}{E_0}\right)^2\right) \right), \quad a_6 = 1 + \nu_0 + \frac{1 + \nu_0}{4(1 - \nu_0)(3 - 4\nu_0)} \quad (9.3)$$

Здесь главное слагаемое совпадает с (3.12), а поправка становится существенной лишь в случае, когда начальное напряжение σ^0 сравнимо по величине с модулем упругости основания E_0 . Как следует из формул (9.1), (9.2), при $\sigma^0 > \mu$ затухающего при $x_3 \rightarrow -\infty$ решения не существует, а само основание теряет устойчивость (здесь μ – модуль сдвига основания). Эти случаи здесь не рассматриваются.

Также не рассматривается не являющаяся локальной форма потери устойчивости пластины, когда она без изгиба сдвигается, оставаясь нормальной к основанию, а само основание теряет устойчивость.

10. Заключение. Здесь получено приближенное решение задачи устойчивости оболочки на упругом основании. При этом используется ряд допущений, погрешность которых зависит от рассматриваемой задачи. Для удобства обсуждения введем два параметра:

$$\varepsilon_1 = 1/k = L/(\pi R), \quad \varepsilon_2 = L/L_0 \quad (10.1)$$

где L – длина полуволны деформации, R – характерный радиус кривизны, L_0 – размер оболочки в плане.

Как уже отмечалось, при локальном подходе граничные условия игнорируются. Предположим, что закрепление краев не является слабым. Тогда можно показать, что при определенных ограничениях погрешность, связанная с игнорированием граничных условий, имеет порядок ε_2^2 . Уточнение формы прогиба может быть выполнено по схеме, описанной в [10]. Вопрос об устойчивости при наличии свободных или слабо закрепленных краев требует дополнительного исследования.

Реакция основания в случае оболочки была взята в виде (3.12), полученном для полупространства. Влияние кривизны поверхности контакта оболочки и основания было оценено в [11] и имеет порядок ε_1 . Также формула (3.12) для реакции основания нуждается в уточнении одновременно с уточнением формы прогиба (1.1) в окрестности краев оболочки (за исключением, быть может, случая их шарнирного опирания). По-видимому, величина погрешности при вычислении критической нагрузки имеет порядок $\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, однако величину погрешности можно найти лишь при сравнении с численным решением трехмерной задачи для основания.

Пусть теперь параметры задачи (кривизны оболочки и ее толщина, начальные усилия; податливость основания) являются переменными, однако медленно меняющимися на длине полуволны деформации функциями координат на поверхности оболочки. Тогда, используя прием замораживания этих параметров, можно получить нагрузку $\Lambda_*(x_1, x_2)$ как функцию координат x_1, x_2 . Минимизация этой функции по коор-

динамам дает приближенное значение критической нагрузки. Одновременно находим область на поверхности оболочки, в которой локализуется форма прогиба. Уточнение критической нагрузки, учитывающее влияние переменности параметра, может быть выполнено так же, как и для оболочки при отсутствии основания (см. [3]).

Изложенное выше касается определения критической нагрузки в линейном приближении. Интерес представляет исследование послекритического поведения оболочки. В связи с этим отметим два момента. Были отмечены случаи (у пластины и у сферической оболочки при однородном сжатии, $t_1 = t_2$), когда волновые числа удовлетворяют соотношению $k_1^2 + k_2^2 = \text{const}$, а форма потери устойчивости в линейном приближении остается неопределенной. Послекритический анализ приводит к форме с квадратными вмятинами с $k_1 = k_2$.

Далее, рассмотрим устойчивость оболочек с неправильностями. При отсутствии основания во многих задачах потеря устойчивости происходит по схеме предельной точки на кривой “прогиб – нагрузка”. При наличии основания возможно качественное изменение картины, при котором эта кривая не имеет точки максимума.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00257).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Локальная устойчивость оболочек // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. № 2. С. 111–112.
2. *Ширшов В.П.* Локальная устойчивость оболочек // Тр. 2 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 314–317.
3. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.
4. *Товстик П.Е.* Потеря устойчивости тонких оболочек, связанная со слабым закреплением края // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1991. № 3. С. 76–81.
5. *Ершова З.Г.* Устойчивость цилиндрической панели со слабо закрепленным прямолинейным краем // Вестн. СПб. ун-та. Сер. Математика, механика, астрономия. 1993. № 3. С. 93–97.
6. *Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука, 1977. 332 с.
7. *Морозов Н.Ф., Паукишто М.В., Товстик П.Е.* Устойчивость поверхностного слоя при термонагрузении // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 130–139.
8. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука. 1978. 360 с.
9. *Гольденвейзер А.Л.* О геометрической теории устойчивости оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 143–154.
10. *Болотин В.В.* Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 831–842.
11. *Товстик П.Е.* К задаче о колебаниях тонкого упругого слоя, находящегося в контакте с мягким упругим телом // Вестник ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1986. № 1. С. 93–98.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
13.10.2003